Interrogation 21

Exercice 1 1. $\cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$

2. $\operatorname{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$

3. $\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ donc $\tan'(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \tan^2(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)$ puis
 $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$.

4. On pose $x = 3+h$: $\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2} = (3+h)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 + \frac{h}{3}\right)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{h}{6} + o(h)\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{18}h + o(h)$.

Exercice 2

1. On pose F primitive de f sur $\mathbb{R}$ (existe car f continue sur $\mathbb{R}$) et alors pour tout $x \in \mathbb{R}$: $g(x) = F(x^2) - F(2x)$, donc g est $\mathcal{C}^1$ par combinaison linéaire et composée avec : $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = 2xf(x^2) - 2f(2x)$.
2. Si f est $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a; b]$ avec $|f^{n+1}|$ majorée par M sur $[a; b]$, alors :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right| \leq M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Les dérivées de exp valent toutes exp, qu'on majore sur $[0; 1]$ par e . Et ainsi :

$$\left| \exp(1) - \sum_{k=0}^n \frac{\exp^{(k)}(0) \cdot (1-0)^k}{k!} \right| \leq \frac{e|1-0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

ce qui donne :

$$\left| e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right| \leq \frac{e}{(n+1)!}$$

d'où la limite demandée par encadrement.

3. On fait apparaître une somme de Riemann :

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{k^2} = \sum_{k=1}^n \frac{n}{(k+n)^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1 + (k/n))^2}$$

qui tend donc par théorème des sommes de Riemann vers $\int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2} dx = [-1/(1+x)]_0^1 = -1/2 + 1 = 1/2$.

Exercice 3 On considère f l'application définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, f(x, y, z) = (-2y + z, y, x + 2y)$$

1. Justifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ et donner sa matrice M dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

2. On considère (e_1, e_2, e_3) définie par : $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de passage de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{B}$.

3. En déduire la matrice de f dans $\mathcal{C}$. Que penser de f ?

1. f est l'application linéaire canoniquement associée à la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ donc c'est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, et $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

2. On pose $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(e_1, e_2, e_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Alors (par pivot par exemple) on trouve que P est inversible d'inverse : $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & -1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & -1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$. Et par définition $P = \text{Pass}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$ donc $P^{-1} = \text{Pass}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}$.

3. On trouve que, par formule de changement de base :

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc f est la symétrie par rapport à $\text{Vect}(e_2, e_3)$ parallèlement à $\text{Vect}(e_1)$.