Nom :

Interrogation 21

Exercice 1 Donner les développements limités (aux ordres demandés en les points considérés) suivant :

1. $\cos(x)$ à l'ordre $2n$ en 0 ;
2. $\operatorname{sh}(x)$ à l'ordre $2n+1$ en 0 ;
3. $\tan(x)$ à l'ordre 5 en 0 ;
4. $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ à l'ordre 1 en 3.

Exercice 2

1. Soit f continue sur $\mathbb{R}$. On pose $g : x \mapsto \int_{2x}^{x^2} f(t)\mathrm{d}t$. Justifier que g est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donner sa dérivée.
2. Énoncer, avec les bonnes hypothèses, l'inégalité de Taylo–Lagrange à l'ordre n pour une fonction f sur $[a;b]$. En déduire que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e$.
3. Donner la limite de la suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{k^2}$.

Exercice 3 On considère f l'application définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ f(x,y,z) = (-2y+z, y, x+2y)$$

1. Justifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ et donner sa matrice M dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.
2. On considère (e_1, e_2, e_3) définie par : $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de passage de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{B}$.
3. En déduire la matrice de f dans $\mathcal{C}$. Que penser de f ?