Nom :

Interrogation 10

Exercice 1 Énoncer les croissances comparées en $+^{i}nfty$ en termes de o :

1. si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$: $\alpha < \beta \Leftrightarrow x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} x^\beta$;
2. si $a, b \in \mathbb{R}_+^*$: $a < b \Leftrightarrow a^x \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}(b^x)$;
3. si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$: $(\ln(x))^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(x^\beta\right)$;
4. si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$: $x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(e^{\beta x}\right)$.

Exercice 2

Énoncer les croissances comparées en 0 en termes de o :

1. si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors : $\alpha > \beta \Leftrightarrow x^\alpha \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}\left(x^\beta\right)$;
2. si $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$: $x^\alpha \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}\left(|\ln(x)|^\beta\right)$ et $|\ln(x)|^\beta \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right)$.

Exercice 3

Donner les équivalents en 0 des quantités suivantes :

1. $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$
2. $\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1$
3. $\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$
4. $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$
5. $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$
6. $\mathrm{Arcsin}(x) \underset{x\to 0}{\sim}$
7. $(\alpha \in \mathbb{R})$ $(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{\sim} 1$

Exercice 4 Donner un équivalent en a des quantités suivantes :

1. $a=0$: $\dfrac{\sin(x)+\cos(x)}{\sin(x)+x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x}$

2. $a=0$: $(x+5)\ln(1+x^3) \underset{x\to 0}{\sim} 5x^3$

3. $a=+\infty$: $(x+5)\ln(1+x^3) \underset{x\to +\infty}{\sim} 3x\ln(x)$

4. $a=2$: on pose $x=2+h$ avec h tendant vers 0 : $\sqrt{x}-\sqrt{2}=\sqrt{2}\left(\sqrt{1+h/2}-1\right)=$ $\sqrt{2}\dfrac{1}{2}\dfrac{h}{2} \underset{h\to 0}{\sim} \dfrac{\sqrt{2}h}{4} \underset{x\to 2}{\sim} \dfrac{\sqrt{2}}{4}(x-2)$

5. $a=+\infty$: $\dfrac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)}=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} \underset{x\to +\infty}{\sim} 1$

6. $a=0$: $x\cos(x)+\tan(x)\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$

7. $a=+\infty$: $\dfrac{e^x+\ln(x)-4}{x^2+\ln(x)-\sqrt{x}} \underset{x\to +\infty}{\sim} \dfrac{e^x}{x^2}$

8. $a=+\infty$: $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}=\sqrt{x}\left(\sqrt{1+1/x}-\sqrt{1-1/x}\right) \underset{x\to +\infty}{=} \sqrt{x}\left(\dfrac{1}{2x}-\dfrac{-1}{2x}+\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) \underset{x\to +\infty}{\sim}$ $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$