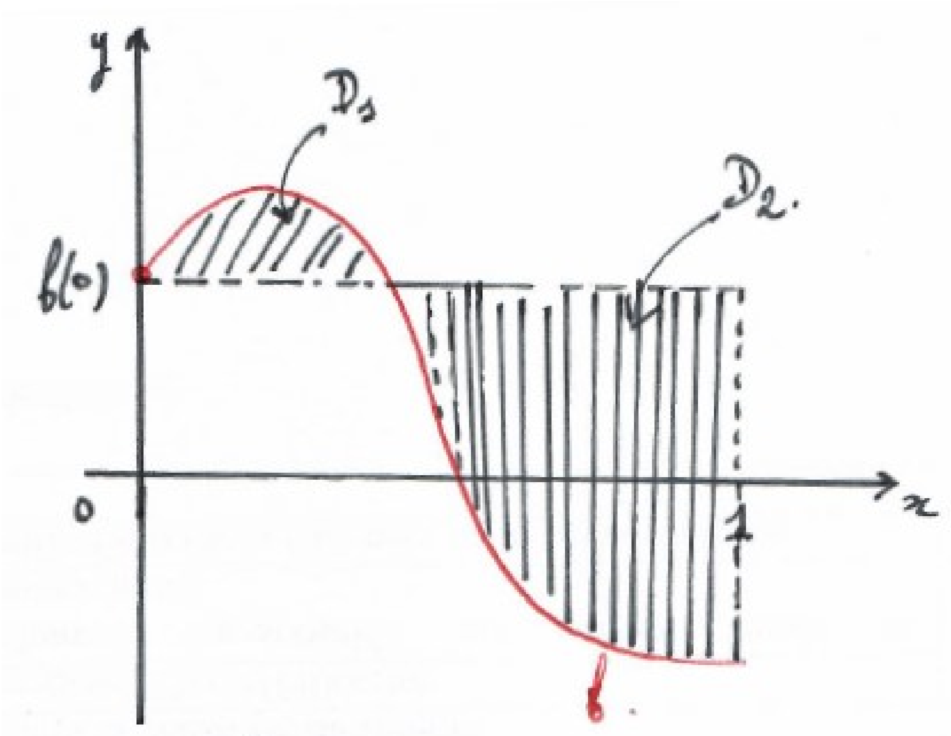
Sujet de fin d'année (d'après Centrale PC 2021) : proposition de corrigé

I. Généralités sur les formules de quadrature

I.A - Exemples élémentaires

1. • La formule de quadrature $I_0(f) = f(0)$ est
   — exacte sur $\mathbb{R}_0[X]$, car pour tout $P \in \mathbb{R}_0[X]$, on a $P(t) = P(0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, donc
   $$\int_0^1 P(t)dt = \int_0^1 P(0)dt = P(0) = I_0(P).$$
   — inexacte sur $\mathbb{R}_1[X]$ car, pour $P = X \in \mathbb{R}_1[X]$, on a
   $$\int_0^1 P(t)dt = \int_0^1 tdt = \frac{1}{2} \neq 0 = P(0) = I_0(P).$$
   La formule de quadrature $I_0(f) = f(0)$ est donc d'ordre 0.
   • Dans la représentation graphique suivante, on a $I_0(f) = \text{aire}(\mathcal{D}_1) - \text{aire}(\mathcal{D}_2)$.



2. • La formule de quadrature $I_0(f) = f(1/2)$ est
   — exacte sur $\mathbb{R}_0[X]$, car pour tout $P \in \mathbb{R}_0[X]$, on a $P(t) = P(1/2)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, donc
   $$\int_0^1 P(t)dt = \int_0^1 P(1/2)dt = P(1/2) = I_0(P).$$
   — exacte sur $\mathbb{R}_1[X]$ car, pour $P = aX + b \in \mathbb{R}_1[X]$, on a
   $$\int_0^1 P(t)dt = \int_0^1 at + bdt = \left[\frac{a}{2}t^2 + bt\right]_0^1 = \frac{a}{2} + b = P(1/2) = I_0(P).$$
   — inexacte sur $\mathbb{R}_2[X]$ car, pour $P = X^2 \in \mathbb{R}_2[X]$, on a
   $$\int_0^1 P(t)dt = \int_0^1 t^2dt = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{4} = P(1/2) = I_0(P).$$
   La formule de quadrature $I_0(f) = f(1/2)$ est donc d'ordre 1.
   Rq : comme l'intégrale et I_0 sont linéaires, une formule de quadrature est exacte sur $\mathbb{R}_n[X]$ si et seulement si elle est exacte pour les polynômes $1, X, \dots, X^n$.
   En utilisant cette idée, on aurait pu rédiger ces deux premières questions autrement, en ne testant que les polynômes $1, X$ et X^2.

3. $I_2(f)$ est exacte sur $\mathbb{R}_2[X]$ si et seulement si elle est exacte pour les polynômes 1, X et X^2, c'est-à-dire si

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^1 1dt = I_0(1) \\ \displaystyle\int_0^1 tdt = I_0(X) \\ \displaystyle\int_0^1 t^2dt = I_0(X^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 \\ 1/2 = 0 + \dfrac{1}{2}\lambda_1 + \lambda_2 \\ 1/3 = 0 + \dfrac{1}{4}\lambda_1 + \lambda_2 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_3}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 1 = \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 \\ 1/6 = 0 + \dfrac{1}{4}\lambda_1 \\ 1/3 = 0 + \dfrac{1}{4}\lambda_1 + \lambda_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_0 = 1/6 \\ \lambda_1 = 2/3 \\ \lambda_2 = 1/6 \end{cases}.$$

Pour $P = X^3$, on a

$$I_2(P) = 0 + (1/2)^3(2/3) + 1(1/6) = 1/4 = \int_0^1 t^3dt = \int_0^1 P(t)dt,$$

donc cette formule de quadrature est encore valable sur $\mathbb{R}_3[X]$.
Pour $P = X^4$, on a

$$I_2(P) = 0 + (1/2)^4(2/3) + 1(1/6) = 5/24 \neq 1/5 = \int_0^1 t^4dt = \int_0^1 P(t)dt,$$

donc cette formule de quadrature n'est pas valable sur $\mathbb{R}_4[X]$.
La formule de quadrature I_2 est donc d'ordre 3.

I.B - Construction de formules d'ordre quelconque

Rq : vous aurez reconnu dans les 3 questions suivantes des questions de cours sur les polynômes de Lagrange. Même dans des concours assez sélectifs, il y a des questions de cours, et même quand ce n'est pas le cas ce sont les mêmes idées que dans le cours qu'il faut développer...

4. • Pour tout $(P,Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda P + Q) &= ((\lambda P + Q)(x_0), (\lambda P + Q)(x_1), \ldots, (\lambda P + Q)(x_n)) \\ &= (\lambda P(x_0) + Q(x_0), \lambda P(x_1) + Q(x_1), \ldots, \lambda P(x_n) + Q(x_n)) \quad \text{(par linéarité de l'évaluation)} \\ &= \lambda(P(x_0), P(x_1), \ldots, P(x_n)) + (Q(x_0), Q(x_1), \ldots, Q(x_n)) \\ &= \lambda\varphi(P) + \varphi(Q), \end{aligned}$$

donc φ est linéaire.
• Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, si $\varphi(P) = 0$, alors $P(x_0) = P(x_1) = \ldots = P(x_n) = 0$, donc P, de degré au plus n, a au moins $n+1$ racines distinctes (les x_i), donc $P = 0$.
On a donc $\mathrm{Ker}(\varphi) \subset \{0\}$. L'autre inclusion étant évidente, on a $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$ et φ est injective.
• D'après le théorème du rang,

$$\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = \dim(\mathbb{R}_n[X]) - \dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = (n+1) - 0 = n+1 = \dim(\mathbb{R}^{n+1}).$$

De plus, $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathbb{R}^{n+1}$, donc, par inclusion et égalité des dimensions, $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}^{n+1}$, donc φ est surjective.
• φ est donc bien un isomorphisme.

5. Soit $i \in [\![0,n]\!]$. Pour tout $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$\left(\forall j \in [\![0,n]\!], \quad L_i(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i, \\ 1 & \text{si } j = i. \end{cases}\right) \Leftrightarrow \varphi(L_i) = (\delta_{i,j})_{j=0..n} \in \mathbb{R}^{n+1},$$

où $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$.
Comme φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ sur $\mathbb{R}^{n+1}$, on a bien l'existence et l'unicité de L_i, et, en notant φ^{-1} la bijection réciproque de φ, on a

$$L_i = \varphi^{-1}((\delta_{i,j})_{j=0..n}).$$

6. $((\delta_{i,j})_{j=0..n})_{i=0..n}$ est une base de $\mathbb{R}^{n+1}$ (c'est la base canonique), donc $(L_i)_{i=0..n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ comme image d'une base de $\mathbb{R}^{n+1}$ par un isomorphisme (φ^{-1}).

7. Comme $P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto \displaystyle\int_0^1 P(x)w(x)dx$ est linéaire (et bien définie car pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $x \mapsto x^k w(x)$ est intégrable sur I) et $I_n : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \lambda_j f(x_j)$ est aussi linéaire, donc e est linéaire, donc I_n est exacte sur $\mathbb{R}_n[X]$ si et seulement si elle est exacte sur une base de $\mathbb{R}_n[X]$, donc si et seulement si elle est exacte sur $(L_0, \ldots, L_n)$.
Or, pour tout $j \in [\![0,n]\!]$,

$$I_n(L_j) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k L_j(x_k) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \delta_{k,j} = \lambda_j,$$

donc I_n est exacte sur $\mathbb{R}_n[X]$ si et seulement si

$$\forall j \in [\![0,n]\!], \quad \lambda_j = \int_I L_j(x)w(x)dx.$$

8. • L_0 a pour racines $1/2$ et 1, donc L_0 est un multiple de $(X-1/2)(X-1)$, donc il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $L_0 = (X-1/2)(X-1)Q$.
Comme de plus L_0 est de degré au plus 2, on a $\deg(Q) \leq 0$, donc il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $Q = a$ et, par suite, $L_0 = a(X-1/2)(X-1)$.
Enfin, $L_0(0) = 1$, donc $a = \dfrac{1}{(0-1/2)(0-1)}$ et $L_0 = \dfrac{(X-1/2)(X-1)}{(0-1/2)(0-1)}$.
• De même, on montre que $L_1 = \dfrac{(X-0)(X-1)}{(1/2-0)(1/2-1)}$ et $L_2 = \dfrac{(X-0)(X-1/2)}{(1-0)(1-1/2)}$. D'après la question précédente, $I_2 : f \mapsto \lambda_0 f(0) + \lambda_1 f(1/2) + \lambda_2 f(1)$ est exacte sur $\mathbb{R}_2[X]$ si et seulement si

$$\lambda_0 = \int_0^1 L_0(x)dx, \qquad \lambda_1 = \int_0^1 L_1(x)dx \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \int_0^1 L_2(x)dx.$$

Après calcul de ces intégrales, on retrouve bien

$$\lambda_0 = 1/6, \quad \lambda_1 = 2/3 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = 1/6.$$

I.C - Noyau de Peano et évaluation de l'erreur

9. Comme f est de classe $\mathcal{C}^{m+1}$ sur $[a,b]$, on a, d'après la formule de Taylor-reste intégral, pour tout $x \in [a,b]$,

$$\begin{aligned} R_m(x) &= \frac{1}{m!}\int_a^b \varphi_m(x,t)f^{(m+1)}(t)dt = \frac{1}{m!}\int_a^x \underbrace{\varphi_m(x,t)}_{=(x-t)^m} f^{(m+1)}(t)dt + \frac{1}{m!}\int_x^b \underbrace{\varphi_m(x,t)}_{=0 \text{ pour } t\in]x,b]} f^{(m+1)}(t)dt \\ &= \int_a^x \frac{(x-t)^m}{m!} f^{(m+1)}(t)dt \\ &= f(x) - \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \quad \text{(d'après Taylor-reste intégral).} \end{aligned}$$

donc, comme e est linéaire,

$$e(R_m) = e(f) - \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)}{k!} e(x \mapsto (x-a)^k).$$

Enfin, comme I_n est d'ordre m et $x \mapsto (x-a)^k$ est polynomiale de degré $k \leq m$ (pour tout $k \in [\![0,m]\!]$), on a $e(x \mapsto (x-a)^k) = 0$ et donc

$$e(R_m) = e(f).$$

10. Soit $m \geq 1$. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} e(f) = e(R_m) &= \int_a^b R_m(x)w(x)dx - \sum_{j=0}^n \lambda_j R_m(x_j) \\ &= \frac{1}{m!}\int_a^b \left(\int_a^b \varphi_m(x,t)f^{(m+1)}(t)dt\right) w(x)dx - \frac{1}{m!}\sum_{j=0}^n \lambda_j \int_a^b \varphi_m(x_j,t)f^{(m+1)}(t)dt \\ &= \frac{1}{m!}\int_a^b \left(\int_a^b \varphi_m(x,t)f^{(m+1)}(t)w(x)dt\right) dx - \frac{1}{m!}\sum_{j=0}^n \lambda_j \int_a^b \varphi_m(x_j,t)f^{(m+1)}(t)dt. \end{aligned}$$

Or $(x,t) \in [a,b]^2 \mapsto \varphi_m(x,t)f^{(m+1)}(t)w(x)$ est continue comme produit de fonctions continues (φ_m l'est d'après l'énoncé car $m \geq 1$, et $f^{(m+1)}$ l'est car f est de classe $\mathcal{C}^{m+1}$ et w l'est car c'est un poids), donc, d'après l'égalité donnée dans l'énoncé,

$$\begin{aligned} e(f) &= \frac{1}{m!}\int_a^b \left(\int_a^b \varphi_m(x,t)f^{(m+1)}(t)w(x)dt\right) dx - \frac{1}{m!}\sum_{j=0}^n \lambda_j \int_a^b \varphi_m(x_j,t)f^{(m+1)}(t)dt \\ &= \frac{1}{m!}\int_a^b \left(\int_a^b \varphi_m(x,t)f^{(m+1)}(t)w(x)dx\right) dt - \frac{1}{m!}\sum_{j=0}^n \lambda_j \int_a^b \varphi_m(x_j,t)f^{(m+1)}(t)dt \\ &= \frac{1}{m!}\int_a^b \left(\int_a^b \varphi_m(x,t)f^{(m+1)}(t)w(x)dx - \sum_{j=0}^n \lambda_j \varphi_m(x_j,t)f^{(m+1)}(t)\right) dt \\ &= \frac{1}{m!}\int_a^b \left(f^{(m+1)}(t)\int_a^b \varphi_m(x,t)w(x)dx - f^{(m+1)}(t)\sum_{j=0}^n \lambda_j \varphi_m(x_j,t)\right) dt \\ &= \frac{1}{m!}\int_a^b K_m(t)f^{(m+1)}(t)dt \end{aligned}$$

où $K_m : t \in [a,b] \mapsto \int_a^b \varphi_m(x,t)w(x)dx - \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \varphi_m(x_j,t) = e(x \mapsto \varphi_m(x,t))$.

I.D - Exemple : méthode des trapèzes

11. Avec les notations de l'énoncé, on a

$$\begin{aligned} K_1 : t \in [0,1] \mapsto & \int_0^1 \varphi_1(x,t)dx - \left(\frac{1}{2}\varphi_1(0,t) + \frac{1}{2}\varphi_1(1,t)\right) \\ &= \int_0^t 0dx + \int_t^1 (x-t)dx - \left(\frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times (1-t)\right) \\ &= \frac{(1-t)^2}{2} - \frac{1}{2}(1-t) = \frac{t(t-1)}{2}. \end{aligned}$$

Par suite, si g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$, comme toutes les hypothèses de la partie I.C sont vérifiées (avec $m = 1$), on a

$$e(g) = \frac{1}{1!}\int_0^1 K_1(t)g''(t)dt = \int_0^1 \frac{t(t-1)}{2} g''(t)dt.$$

Or, pout tout $t \in [0,1]$,

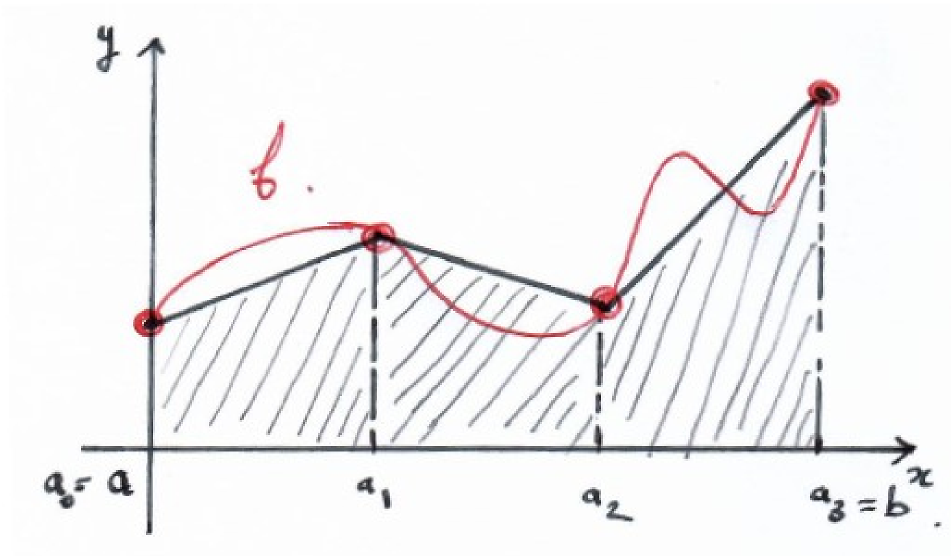
$$\left|\frac{t(t-1)}{2}g''(t)\right| = \frac{t(1-t)}{2}|g''(t)| \leq \frac{t-t^2}{2}\|g''\|_\infty^{[0,1]},$$

donc, par positivité de l'intégrale ($0 \leq 1$), on a :

$$|e(g)| = \left|\int_0^1 \frac{t(t-1)}{2}g''(t)dt\right| \leq \int_0^1 \left|\frac{t(t-1)}{2}g''(t)\right| dt \leq \int_0^1 \frac{t-t^2}{2}\|g''\|_\infty^{[0,1]}dt = \|g''\|_\infty^{[0,1]}\left[\frac{t^2}{4} - \frac{t^3}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{12}\|g''\|_\infty^{[0,1]}.$$

$\|g''\|_\infty^{[0,1]}$ *existe car* g'' *est continue sur le segment* $[0,1]$.

12. $T_n(f)$ est la somme des aires (algébriques) hachurées, ie l'aire (algébrique) située sous la ligne brisée.



13. *Le graphique ci-dessus nous permet de voir que l'erreur totale est la somme des erreurs commise sur chaque intervalle* $[a_i, a_{i+1}]$*, ce qui nous incite à écrire ce qui suit :*
On a

$$\begin{aligned} e_n(f) &= \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f(a_i)+f(a_{i+1})}{2} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)dx - \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f(a_i)+f(a_{i+1})}{2} \quad \text{(relation de Chasles)} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1}\int_0^1 f((a_{i+1}-a_i)t+a_i)(a_{i+1}-a_i)dt - \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f(a_i)+f(a_{i+1})}{2} \quad \left(\text{chagement de variable affine } t = \frac{x-a_i}{a_{i+1}-a_i}\right) \\ &= \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\int_0^1 f((a_{i+1}-a_i)t+a_i)dt - \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f(a_i)+f(a_{i+1})}{2} \quad \left(\text{car } a_{i+1}-a_i = h = \frac{b-a}{n}\right) \\ &= \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\left(\int_0^1 f((a_{i+1}-a_i)t+a_i)dt - \frac{f(a_i)+f(a_{i+1})}{2}\right) \\ &= \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} e(g_i), \end{aligned}$$

en posant $g_i : t \in [0,1] \mapsto f((a_{i+1}-a_i)t + a_i)$, avec $g(0) = f(a_i)$ et $g(1) = f(a_{i+1})$.

14. Pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, g_i est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$, donc, d'après la question 11, on a

$$|e(g_i)| \leq \frac{1}{12}\|g_i''\|_\infty^{[0,1]}.$$

Or, pour tout $t \in [0,1]$, $(a_{i+1}-a_i)t + a_i \in [a_i, a_{i+1}] \subset [a,b]$, donc

$$|g_i''(t)| = \left|(a_{i+1}-a_i)^2 f''((a_{i+1}-a_i)t+a_i)\right| = (a_{i+1}-a_i)^2 |f''((a_{i+1}-a_i)t+a_i)| \leq \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \|f''\|_\infty^{[a,b]},$$

donc $\|g_i''\|_\infty^{[0,1]} \leq \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \|f''\|_\infty^{[a,b]}$, et, par suite,

$$|e(g_i)| \leq \frac{1}{12}\|g_i''\|_\infty^{[0,1]} \leq \frac{1}{12}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \|f''\|_\infty^{[a,b]}.$$

Finalement, d'après l'inégalité triangulaire généralisé,

$$\begin{aligned}
|e_n(f)| &= \left|\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} e(g_i)\right| \leq \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}|e(g_i)| \\
&\leq \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{1}{12}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \|f''\|_\infty^{[a,b]}\right) \\
&= \frac{b-a}{n} \times n\left(\frac{1}{12}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \|f''\|_\infty^{[a,b]}\right) \\
&\frac{(b-a)^3}{12n^2}\|f''\|_\infty^{[a,b]}.
\end{aligned}$$

II. Polynômes orthogonaux et applications

II.A - Etude d'un produit scalaire

15. • Pour tout $(f,g,h) \in E^3$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\langle \lambda f + g, h\rangle &= \int_I (\lambda f + g)(x)h(x)w(x)dx = \int_I (\lambda f(x) + g(x))h(x)dx \quad \text{(par linéarité de l'évaluation)} \\
&= \lambda \int_I f(x)h(x)w(x)dx + \int_I g(x)h(x)w(x)dx \quad \text{(par linéarité de l'intégrale)} \\
&= \lambda\langle f,h\rangle + \langle g,h\rangle,
\end{aligned}$$

donc $\langle .,.\rangle$ est linéaire à gauche.
• Pour tout $(f,g) \in E^2$,

$$\begin{aligned}
\langle f,g\rangle &= \int_I f(x)g(x)w(x)dx = \int_I g(x)f(x)w(x)dx \quad \text{(par symétrie du produit dans } \mathbb{R}) \\
&= \langle g,f\rangle,
\end{aligned}$$

donc $\langle .,.\rangle$ est symétrique.
• $\langle .,.\rangle$ est linéaire à gauche et symétrique, donc bilinéaire.
• Pour tout $f \in E$, pour tout $x \in I$, $f^2(x)w(x) \geq 0$ car $f(x) \in \mathbb{R}$ et $w(x) > 0$.
D'où, par positivité de l'intégrale, $\langle f,f\rangle = \int_I f^2(x)w(x)dx \geq 0$.
Enfin, comme $x \mapsto f^2(x)w(x)$ est continue positive, on obtient :

$$\begin{aligned}
\langle f,f\rangle = 0 &\Rightarrow \int_I f^2(x)w(x)dx = 0 \\
&\Rightarrow \forall x \in I, \quad f^2(x)w(x) = 0 \\
&\Rightarrow \forall x \in I, \quad f^2(x) = 0 \quad (\text{car } w(x) \neq 0) \\
&\Rightarrow \forall x \in I, \quad f(x) = 0 \\
&\Rightarrow f = 0.
\end{aligned}$$

$\langle .,.\rangle$ est donc bien défini positif.
• $\langle .,.\rangle$ définit donc bien un produit scalaire sur E.

II.B - Polynômes orthogonaux associés à un poids

18. • Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(p_0, \ldots, p_n)$ est une famille libre (degrés échelonnés) composée de $n+1$ polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$, espace de dimension $n+1$, donc c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

• Comme p_n est de degré n, on a $\sum_{i=1}^{k} m_i \leq n$.

Soit $q(X) = \prod_{i=1}^{k}(X - x_i)^{\varepsilon_i}$ (comme dans l'énoncé).
Comme, pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, $m_i \geq 1 \geq \varepsilon_i$, on a

$$\deg(q) = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i \leq \sum_{i=1}^{k} 1 \leq \sum_{i=1}^{k} m_i \leq n,$$

avec égalité si et seulement si

$$\begin{cases} \forall i \in [\![1,k]\!],\ \varepsilon_i = 1 \\ \forall i \in [\![1,k]\!],\ m_i = 1 \\ \sum_{i=1}^{k} m_i = n \end{cases} \underset{L_2 \Rightarrow L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \forall i \in [\![1,k]\!],\ m_i = 1 \\ k = n \end{cases}.$$

L'égalité a donc lieu si et seulement si p_n possède n racines distinctes et simples dans $\mathring{I}$.
• Supposons que p_n ne possède pas n racines simples dans $\mathring{I}$.
Alors q est de degré inférieur ou égal à $n-1$, donc, comme $(p_0, \dots, p_{n-1})$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, il existe $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que $q = \sum_{j=0}^{n-1} a_j p_j$, et on a donc, par linéarité à droite de $\langle .,. \rangle$,

$$\langle p_n, q \rangle = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \underbrace{\langle p_n, p_j \rangle}_{=0 \text{ car } j \neq n} = 0.$$

Or, on a aussi, en notant $p_n = \prod_{i=1}^{k}(X - x_i)^{m_i} r(X)$, où r n'a pas de racine dans l'intervalle $\mathring{I}$, donc est de signe constant sur I,

$$\langle p_n, q \rangle = \int_I p_n(x) q(x) w(x) dx = \int_I \prod_{i=1}^{k}(x - x_i)^{m_i + \varepsilon_i} r(x) w(x) dx,$$

où, pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, $m_i + \varepsilon_i$ est pair (somme de deux entiers de même parité), donc

$$\forall x \in I, \quad \prod_{i=1}^{k} \underbrace{(x - x_i)^{m_i + \varepsilon_i}}_{\geq 0} r(x) \underbrace{w(x)}_{>0} \text{ est de signe constant sur } I.$$

La fonction $x \mapsto \prod_{i=1}^{k}(x - x_i)^{m_i + \varepsilon_i} r(x) w(x)$ est donc continue sur I (comme produit de fonctions continues), de signe constant sur I, intégrable sur I (car E contient les fonctions polynomiales), non identiquement nulle (car $P_n Q \neq 0$), I est un intervalle d'intérieur non vide, donc, par stricte positivité de l'intégrale,

$$\langle p_n, q \rangle = \int_I \prod_{i=1}^{k}(x - x_i)^{m_i + \varepsilon_i} r(x) w(x) dx \neq 0.$$

On a une contradiction. D'où, par l'absurde, p_n possède n racines simples dans $\mathring{I}$.
Rq : Cette démonstration reste valable dans le cas où p_n a 0 racine dans $\mathring{I}$ en l'état en considérant qu'un produit vide vaut 1.

II.C - Applications : méthodes de quadrature de Gauss

19. $Q_n = \prod_{i=0}^{n}(X - x_i)$ est un polynôme de degré exactement $n+1$.
En particulier, $Q_n \neq 0$, donc $\langle Q_n, Q_n \rangle > 0$, ie $\int_I Q_n(x)^2 w(x) dx > 0$.
Or $I_n(Q_n^2) = 0$, car pour tout $j \in [\![0,n]\!]$, x_j est racine de Q_n^2, donc

$$e(Q_n^2) = \int_I Q_n(x)^2 w(x) dx - I_n(Q_n^2) \neq 0.$$

La formule de quadrature I_n n'est donc pas exacte pour Q_n^2 de degré $2n+2$, donc son ordre vaut au maximum $2n+1$.

20. • Supposons que $m = 2n+1$.
Le polynôme $Q_n = \prod_{i=0}^{n}(X - x_i)$ est unitaire de degré $n+1$ et, pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, le polynôme $p_i Q_n$ est de degré au plus $2n+1$, donc

$$0 = e_n(p_i Q_n) = \int_I p_i(x) Q_n(x) w(x) dx - \sum_{j=0}^{n} \lambda_j p_i(x_j) \underbrace{Q_n(x_j)}_{=0} = \langle p_i, Q_n \rangle.$$

D'où, par unicité de la famille $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a $p_{n+1} = Q_n = \prod_{i=0}^{n}(X - x_i)$, donc p_{n+1} a pour racines les $(x_i)_{i=0..n}$.

• Réciproquement, si les x_i sont les racines de p_{n+1}, alors, comme p_{n+1} est unitaire de degré $n+1$ et a pour racines $(x_i)_{i=0..n}$, on a $p_{n+1} = \prod_{i=0}^{n}(X - x_i)$.

Soit $P \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$. D'après le théorème de la division euclidienne, il existe $Q, R \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$P = Qp_{n+1} + R, \quad \text{où } \deg(R) < n+1 \text{ et } \deg(Q) \le (2n+1) - (n+1) = n.$$

On a alors, par linéarité de e,

$$e(P) = e(Qp_{n+1}) + e(R).$$

Or e est d'ordre au moins n d'après la question 7, donc $e(R) = 0$.

De plus,

$$e(Qp_{n+1}) = \int_I Q(x)p_{n+1}(x)w(x)dx - \sum_{j=0}^{n} \lambda_j Q(x_j)\underbrace{p_{n+1}(x_j)}_{=0} = \langle Q, p_{n+1}\rangle = 0,$$

en décomposant Q dans la base $(p_0, \ldots, p_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ comme dans la question 18.

On a donc bien $e(P) = e(Qp_{n+1}) + e(R) = 0 + 0 = 0$, donc la formule de quadrature I_n est d'ordre au moins $2n+1$.

Comme elle est d'ordre au plus $2n+1$ d'après la question précédente, elle est donc bien d'ordre exactement $2n+1$.

• On a donc bien l'équivalence demandée.

II.D - Exemple 1

21. • p_0 est unitaire de degré 0, donc $p_0 = 1$.

• p_1 est unitaire de degré 1, donc s'écrit sous la forme $p_1 = X + a$ où $a \in \mathbb{R}$.

De plus, $\langle p_1, p_0\rangle = 0$, donc

$$0 = \int_{-1}^{1} p_1(x)p_0(x)w(x)dx = \int_{-1}^{1} x + adx = 2a,$$

donc $a = 0$ et, par suite, $p_1 = X$.

• p_2 est unitaire de degré 2, donc s'écrit sous la forme $p_2 = X^2 + aX + b$ où $a, b \in \mathbb{R}$.

De plus, $\langle p_2, p_0\rangle = 0$, donc

$$0 = \int_{-1}^{1} p_2(x)p_0(x)w(x)dx = \int_{-1}^{1} x^2 + ax + bdx = \frac{2}{3} + 2b,$$

donc $b = -\frac{1}{3}$.

On a aussi $\langle p_2, p_1\rangle = 0$, donc

$$0 = \int_{-1}^{1} p_2(x)p_1(x)w(x)dx = \int_{-1}^{1} x^3 + ax^2 + bxdx = \frac{2}{3}a,$$

donc $a = 0$ et, par suite, $p_2 = X^2 - \frac{1}{3}$.

• p_3 est unitaire de degré 3, donc s'écrit sous la forme $p_3 = X^3 + aX^2 + bX + c$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$.

De plus, $\langle p_3, p_0\rangle = 0$, donc

$$0 = \int_{-1}^{1} p_3(x)p_0(x)w(x)dx = \int_{-1}^{1} x^3 + ax^2 + bx + cdx = \frac{2}{3}a + 2c,$$

donc $a = -3c$.

On a aussi $\langle p_3, p_1\rangle = 0$, donc

$$0 = \int_{-1}^{1} p_3(x)p_1(x)w(x)dx = \int_{-1}^{1} x^4 + ax^3 + bx^2 + cxdx = \frac{2}{5} + \frac{2}{3}b,$$

donc $b = -\frac{3}{5}$.

Enfin, $\langle p_3, p_2\rangle = 0$, donc

$$0 = \int_{-1}^{1} p_3(x)p_2(x)w(x)dx = \int_{-1}^{1} x^5 + ax^4 + (b-1/3)x^3 + (c-a/3)x^2 - \frac{b}{3}x - \frac{c}{3}dx = \frac{2}{5}a + \frac{2}{3}(c-a/3) - 2c/3 = \left(-\frac{6}{5} + \frac{4}{3} - \frac{2}{3}\right)c,$$

donc $c = 0$, puis $a = -3c = 0$ et, par suite, $p_3 = X^3 - \frac{3}{5}X$.

Du calcul un peu pénible... Pour gagner du temps, j'ai souvent utilisé $\int_{-1}^{1} x^n dx = \begin{cases} 0 & \textit{si } n \textit{ est impair} \\ \dfrac{2}{n+1} & \textit{si } n \textit{ est pair} \end{cases}$.

22. D'après la question 20, en prenant pour les x_i les racines de $p_3 = X(X^2 - 3/5)$, ie

$$x_0 = -\sqrt{3/5}, \quad x_2 = 0 \quad \text{et} \quad x_3 = \sqrt{3/5},$$

et, pour tout $j \in [\![0,2]\!]$,

$$\lambda_j = \int_{-1}^{1} L_j(x)w(x)dx,$$

on aura, en posant $I_2(f) = \sum_{j=0}^{2} \lambda_j f(x_j)$, une formule de quadrature d'ordre 5.

Calculons les λ_j : Les polynomes (L_0, L_1, L_2) forment la base de Lagrange associés aux points $(-\sqrt{3/5}, 0, \sqrt{3/5})$. On a donc, comme à la question 8

$$\begin{aligned}
L_0 &= \frac{(X-0)(X-\sqrt{3/5})}{(-\sqrt{3/5}-0)(-\sqrt{3/5}-\sqrt{3/5})} = \frac{5}{6}(X^2 - \sqrt{3/5}X),\\
L_1 &= \frac{(X+\sqrt{3/5})(X-\sqrt{3/5})}{(0+\sqrt{3/5})(0-\sqrt{3/5})} = -\frac{5}{3}(X^2 - 3/5)\\
\text{et } L_2 &= \frac{(X+\sqrt{3/5})(X-0)}{(\sqrt{3/5}+\sqrt{3/5})(\sqrt{3/5}-0)} = \frac{5}{6}(x^2 + \sqrt{3/5}X),
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\lambda_0 &= \int_{-1}^{1} L_0(x)w(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{5}{6}(x^2 - \sqrt{3/5}x)dx = \frac{5}{9},\\
\lambda_1 &= \int_{-1}^{1} L_1(x)w(x)dx = \int_{-1}^{1} -\frac{5}{3}(x^2 - 3/5)dx = -\frac{10}{9} + 2 = \frac{8}{9}\\
\text{et } \lambda_2 &= \int_{-1}^{1} L_2(x)w(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{5}{6}(x^2 + \sqrt{3/5}x)dx = \frac{5}{9}.
\end{aligned}$$

La formule de quadrature recherchée est donc :

$$I_2 : f \mapsto \frac{5}{9}f(-\sqrt{3/5}) + \frac{8}{9}f(0) + \frac{5}{9}f(\sqrt{3/5}).$$