

Sujet de fin d'année – inspiré de Centrale

Dans tout ce sujet, $I = [a, b]$ et w est une fonction continue et strictement positive de I dans $\mathbb{R}$; on dit que w est *un poids* sur I .

Etant donné une fonction continue $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, on cherche à approcher l'intégrale $\int_I f(x)w(x)dx$ par une expression de la forme

$$I_n(f) = \sum_{j=0}^n \lambda_j f(x_j),$$

où $n \in \mathbb{N}$, $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ sont $n+1$ points distincts dans I .

Une telle expression $I_n(f)$ est appelée *formule de quadrature* et on note

$$e(f) = \int_I f(x)w(x)dx - \sum_{j=0}^n \lambda_j f(x_j)$$

l'*erreur de quadrature* associée. On remarque que e est une forme linéaire sur l'espace vectoriel des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$.

On rappelle qu'un polynôme est dit unitaire si son coefficient dominant est 1.

Etant donné un entier $m \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_m[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à m . On dit qu'une formule de quadrature $I_n(f)$ est *exacte sur* $\mathbb{R}_m[X]$ si,

$$\forall P \in \mathbb{R}_m[X], \quad e(P) = 0,$$

ce qui signifie que, pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à m ,

$$\int_I P(x)w(x)dx = \sum_{j=0}^n \lambda_j P(x_j).$$

Enfin, on appelle *ordre d'une formule de quadrature* $I_n(f)$ le plus grand entier $m \in \mathbb{N}$ pour lequel la formule de quadrature $I_n(f)$ est exacte sur $\mathbb{R}_m[X]$.

Les parties II et III s'appuient sur la partie I et sont indépendantes entre elles.

I. Généralités sur les formules de quadrature

I.A - Exemples élémentaires

Dans cette sous-partie, on se place dans le cas $I = [0, 1]$ et $\forall x \in I$, $w(x) = 1$. On cherche donc à approcher $\int_0^1 f(x)dx$ lorsque f est une fonction continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Déterminer l'ordre de la formule de quadrature $I_0(f) = f(0)$ et représenter graphiquement l'erreur associée $e(f)$.
2. Faire de même avec la formule de quadrature $I_0(f) = f(1/2)$.
3. Déterminer les coefficients $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ pour que la formule $I_2(f) = \lambda_0 f(0) + \lambda_1 f(1/2) + \lambda_2 f(1)$ soit exacte sur $\mathbb{R}_2[X]$. Cette formule de quadrature est-elle d'ordre 2?

I.B - Construction de formules d'ordre quelconque

On revient au cas général. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère $n+1$ points distincts dans I , notés $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, et une fonction continue f de I dans $\mathbb{R}$.

4. Montrer que l'application $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \mapsto (P(x_0), P(x_1), \dots, P(x_n)) \end{cases}$ est un isomorphisme.
5. Montrer que, pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad L_i(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i, \\ 1 & \text{si } j = i. \end{cases}$$

6. Montrer que $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Cette base est appelée *base de Lagrange associée aux points* $(x_0, \dots, x_n)$.
7. Montrer que la formule de quadrature $I_n(f) = \sum_{j=0}^n \lambda_j f(x_j)$ est exacte sur $\mathbb{R}_n[X]$ si, et seulement si,

$$\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \lambda_j = \int_I L_j(x)w(x)dx.$$

8. On se place dans le cas $I = [0, 1]$ et $\forall x \in I$, $w(x) = 1$. Déterminer la base de Lagrange associée aux points $(0, 1/2, 1)$ et retrouver ainsi les coefficients de la formule de quadrature $I_2(f)$ de la question 3.

I.C - Noyau de Peano et évaluation de l'erreur

Pour tout entier naturel m , on considère la fonction $\varphi_m : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi_m(x, t) = \begin{cases} (x - t)^m & \text{si } x \geq t, \\ 0 & \text{si } x < t. \end{cases}$$

On observe que φ_m est continue si $m \geq 1$ et discontinue si $m = 0$.

On considère une formule de quadrature $I_n(f) = \sum_{j=0}^n \lambda_j f(x_j)$.

On note $m \in \mathbb{N}$ l'ordre de cette formule et on cherche à évaluer l'erreur associée :

$$e(f) = \int_a^b f(x)w(x)dx - \sum_{j=0}^n \lambda_j f(x_j).$$

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^{m+1}$ sur I .

9. A l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que $e(f) = e(R_m)$, où R_m est définie par

$$\forall x \in [a, b], \quad R_m(x) = \frac{1}{m!} \int_a^b \varphi_m(x, t) f^{(m+1)}(t) dt.$$

10. En déduire que, si $m \geq 1$,

$$e(f) = \frac{1}{m!} \int_a^b K_m(t) f^{(m+1)}(t) dt,$$

où la fonction $K_m : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$\forall t \in [a, b], \quad K_m(t) = e(x \mapsto \varphi_m(x, t)) = \int_a^b \varphi_m(x, t) w(x) dx - \sum_{j=0}^n \lambda_j \varphi_m(x_j, t).$$

On pourra utiliser le résultat admis suivant : pour toute fonction continue $g : [a, b]^2 \rightarrow \mathbb{R}$, on a

$$\int_a^b \left(\int_a^b g(x, t) dt \right) dx = \int_a^b \left(\int_a^b g(x, t) dx \right) dt.$$

La fonction K_m est appelée *noyau de Peano associé à la formule de quadrature*.

On admet que cette expression de $e(f)$ reste valable pour $m = 0$.

I.D - Exemple : méthode des trapèzes

Dans cette sous-partie, on suppose que : $\forall x \in I, w(x) = 1$.

On se place d'abord dans le cas $I = [0, 1]$ et on considère la formule de quadrature

$$I_1(g) = \frac{g(0) + g(1)}{2},$$

qui est d'ordre $m = 1$ (on ne demande pas de le montrer).

11. Calculer le noyau de Peano associé $t \mapsto K_1(t)$ et montrer que, pour tout fonction g de classe $\mathcal{C}^2$ de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, on a la majoration suivante de l'erreur de quadrature associée :

$$|e(g)| \leq \frac{1}{12} \sup_{x \in [0, 1]} |g''(x)|.$$

On se place maintenant dans le cas d'un segment quelconque $I = [a, b]$ (avec $a < b$), qu'on subdivise en $n + 1$ points $a_0, \dots, a_n$ équidistants :

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad a_i = a + ih,$$

où $h = \frac{b-a}{n}$ est le pas de la subdivision.

On considère alors la formule de quadrature

$$T_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(a_i) + f(a_{i+1})}{2},$$

appelée *méthode des trapèzes*. L'erreur de quadrature associée est notée :

$$e_n(f) = \int_a^b f(x) dx - T_n(f).$$

12. Représenter graphiquement $T_n(f)$.

13. On suppose que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que

$$e_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} e(g_i),$$

où e est l'erreur associée à la formule de quadrature I_1 étudiée à la question 11 et les $g_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions à préciser.

14. En déduire la majoration d'erreur

$$|e_n(f)| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \sup_{x \in [a, b]} |f''(x)|.$$

II. Polynômes orthogonaux et applications

Dans la suite, on note E l'espace vectoriel des fonctions f continues de I dans $\mathbb{R}$.

II.A - Etude d'un produit scalaire

Pour toutes fonctions f et g de E , on pose

$$\langle f, g \rangle = \int_I f(x)g(x)w(x)dx.$$

15. Montrer qu'on définit ainsi un produit scalaire sur E .

Dans la suite, on munit E de ce produit scalaire et on note $\|\cdot\|$ la norme associée.

II.B - Polynômes orthogonaux associés à un poids

On admet qu'il existe une unique suite de polynômes $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

- (a) pour tout $n \in \mathbb{N}$, p_n est unitaire
- (b) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg(p_n) = n$,
- (c) la famille $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthogonale pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, autrement dit $\langle p_i, p_j \rangle = 0$, pour $i \neq j \in \mathbb{N}$.

On dit que les (p_n) sont les *polynômes orthogonaux associés au poids w* .

On s'intéresse aux racines des polynômes p_n .

On rappelle que $\overset{\circ}{I}$ désigne l'intérieur de I , c'est-à-dire l'intervalle I privé de ses éventuelles extrémités.

On a donc $\overset{\circ}{I} =]a, b[$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $x_1, \dots, x_k$ les racines distinctes de p_n qui sont dans $\overset{\circ}{I}$ et $m_1, \dots, m_k$ leurs multiplicités respectives. On considère le polynôme

$$q(X) = \prod_{i=1}^k (X - x_i)^{\varepsilon_i}, \quad \text{avec } \varepsilon_i = \begin{cases} 1 & \text{si } m_i \text{ est impair,} \\ 0 & \text{si } m_i \text{ est pair.} \end{cases}$$

18. En étudiant $\langle p_n, q \rangle$, montrer que p_n possède n racines distinctes dans $\overset{\circ}{I}$.

II.C - Applications : méthodes de quadrature de Gauss

Considérons une formule de quadrature

$$I_n(f) = \sum_{j=0}^n \lambda_j f(x_j),$$

où $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ et $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ sont $n+1$ points distincts dans I .

On suppose que les coefficients $(\lambda_j)_{0 \leq j \leq n}$ sont choisis comme à la question 7 :

$$\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \lambda_j = \int_I L_j(x)w(x)dx,$$

où $(L_0, \dots, L_n)$ est la base de Lagrange associée aux points $(x_0, \dots, x_n)$ (définie dans la partie I).

Ainsi, la formule $I_n(f)$ est d'ordre $m \geq n$. Nous allons montrer que dans ces conditions, il existe un unique choix des points $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ qui permet d'obtenir l'ordre m le plus élevé possible.

19. En raisonnant avec le polynôme $\prod_{i=0}^n (X - x_i)$, montrer que $m \leq 2n+1$.

20. Montrer que $m = 2n+1$ si et seulement si les x_i sont les racines de p_{n+1} .

II.D - Un exemple

On se place ici dans le cas où $I = [-1, 1]$ et $w(x) = 1$.

On est donc bien dans les conditions d'application des résultats précédemment obtenus.

21. Déterminer les quatre premiers polynômes orthogonaux (p_0, p_1, p_2, p_3) associés au poids w .

22. En déduire explicitement une formule de quadrature d'ordre 5 (on déterminera les points x_j et les coefficients λ_j).