Sujet de fin d'année

Exercice 1 : Un produit scalaire sur les polynômes

On considère l'application φ de $\mathbb{R}_1[X] \times \mathbb{R}_1[X]$ dans $\mathbb{R}$ définie, pour $(P,Q) \in \mathbb{R}_1[X] \times \mathbb{R}_1[X]$, par

$$\varphi(P,Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$$

Par exemple, si $P = X+1$ et $Q = X$, alors $\varphi(P,Q) = \displaystyle\int_0^1 (t+1)t\mathrm{d}t = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$.

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_1[X]$.

   Réponse : L'application φ est classiquement bilinéaire, symétrique et positive.
   Soit $P \in \mathbb{R}_1[X]$ tel que $\varphi(P,P) = \displaystyle\int_0^1 P(t)^2\mathrm{d}t = 0$. Alors, par continuité de $t \mapsto P^2(t)$, on a : $\forall t \in [0;1]\,, P(t) = 0$. P, ayant une infinité de racines, est donc le polynôme nul. L'application est donc définie, et c'est donc un produit scalaire.
   Pour alléger les notations, on notera désormais $\langle P, Q\rangle$ au lieu de $\varphi(P,Q)$. La norme associée à ce produit scalaire sera notée $\|.\|$. On a donc, pour $P \in \mathbb{R}_1[X], \|P\| = \sqrt{\langle P, P\rangle}$.

2. Dans cette question, on se propose de montrer qu'il existe un unique polynôme $P_0 \in \mathbb{R}_1[X]$ tel que

   $$\forall P \in \mathbb{R}_1[X], \quad \langle P, P_0\rangle = P(0)$$

   On distinguera bien P_0, qui est un polynôme, de la valeur $P(0)$ de P en 0.

   (a) Soit P_0 fixé dans $\mathbb{R}_1[X]$. Montrer que l'égalité $\langle P, P_0\rangle$ est vérifiée pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_1[X]$ si et seulement si elle est vérifiée pour les deux polynômes $P = 1$ et $P = X$.

   Réponse : Si l'égalité est vraie pour tout polynôme P, elle l'est en particulier pour $P = 1$ et $P = X$. Réciproquement, si elle est vraie pour 1 et X, alors si $P = aX + b$, on a

   $$\langle aX + b, P_0\rangle = a\langle X, P_0\rangle + b\langle 1, P_0\rangle = b = P(0)$$

   (b) On pose $P_0 = a_0X + b_0$ avec $(a_0, b_0) \in \mathbb{R}^2$. Calculer $\langle 1, P_0\rangle$ et $\langle X, P_0\rangle$. En déduire que $\langle P, P_0\rangle = P(0)$ pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_1[X]$ si et seulement si $\begin{cases} \frac{a_0}{2} + b_0 & = 1 \\ \frac{a_0}{3} + \frac{b_0}{2} & = 0 \end{cases}$

   Réponse : On trouve $\langle 1, P_0\rangle = \dfrac{a_0}{2} + b_0$ et $\langle X, P_0\rangle = \dfrac{a_0}{3} + \dfrac{b_0}{2}$. La question précédente permet alors de conclure.

   (c) Conclure qu'il existe un unique polynôme P_0 de $\mathbb{R}_1[X]$, que l'on explicitera, tel que

   $$\forall P \in \mathbb{R}_1[X], \quad \langle P, P_0\rangle = P(0)$$

   Réponse : Il suffit de résoudre le système précédemment trouvé ; on trouve $a_0 = -6, b_0 = 4$, donc $P_0 = -6X + 4$.

3. On désigne par S l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_1[X]$ tels que $\|P\| = 1$. On se propose de déterminer la valeur maximale de $P(0)$ lorsque P décrit S par deux méthodes différentes.

   (a) <u>Première méthode</u>

   On pose $P_1 = 1$.

   i. Montrer que $\|P_1\| = 1$.

   Réponse : $||1||^2 = \displaystyle\int_0^1 1^2\mathrm{d}t = 1$, d'où la conclusion.

ii. Déterminer un polynôme P_2 de $\mathbb{R}_1[X]$ tel que (P_1, P_2) soit une base orthonormale de $\mathbb{R}_1[X]$.

Réponse : Orthonormalisons la base $(1, X)$ à l'aide du procédé de Gram-Schmidt. On pose $P_1 = 1$, puis $\tilde{P}_2 = X + \lambda P_1$. On a

$$\langle \tilde{P}_2, P_1 \rangle = 0 \iff \int_0^1 (t+\lambda)\mathrm{d}t = 0 \iff \lambda = -\frac{1}{2}$$

Puisque $\|X - \frac{1}{2}\| = \frac{1}{2\sqrt{3}}$, on pose $P_2 = 2\sqrt{3}(X - \frac{1}{2})$ et la famille (P_1, P_2) convient.

iii. Montrer que les éléments de S sont exactement les polynômes de la forme $\cos(\theta)P_1 + \sin(\theta)P_2$, où θ décrit $\mathbb{R}$.

Réponse : Tout d'abord, si $\theta \in \mathbb{R}$, on a par théorème de Pythagore :

$$\|\cos(\theta)P_1+\sin(\theta)P_2\|^2 = \|\cos(\theta)P_1\|^2+\|\sin(\theta)P_2\|^2 = \cos^2\theta\|P_1\|^2+\sin^2\theta\|P_2\|^2 = \cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)$$

Ce qui prouve que les polynômes de la forme $\cos(\theta)P_1 + \sin(\theta)P_2$ sont dans S.
Réciproquement, si $P_a P_1 + bP_2$ est un polynôme de $\mathbb{R}_1[X]$ de norme 1, alors

$$\|P\|^2 = a^2\|P_1\|^2 + b^2\|P_2\|^2 = a^2 + b^2 = 1$$

Il existe donc $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $a = \cos(\theta)$ et $b = \sin(\theta)$, ce qui conclut la preuve.

iv. Si $P = \cos(\theta)P_1 + \sin(\theta)P_2$, déterminer deux réels λ et θ_0 indépendants de θ et tels que $P(0) = \lambda\cos(\theta - \theta_0)$ pour tout réel θ.

Réponse : On a

$$P(0) = \cos(\theta) - \sqrt{3}\sin(\theta) = 2\left(\frac{1}{2}\cos(\theta) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\theta)\right) = 2\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$$

v. En déduire la valeur maximale prise par $P(0)$ lorsque P décrit S.

Réponse : La valeur maximale est donc 2, atteinte pour θ congru à $-\frac{\pi}{3}$ modulo 2π.

(b) Deuxième méthode

i. Rappeler l'énoncé de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et préciser les cas où cette inégalité est une égalité.

Réponse : Quels que soient P, Q, on a

$$|\langle P, Q\rangle| \leqslant \|P\|\|Q\|$$

Et il y a égalité lorsque les polynômes P et Q sont colinéaires, i.e. proportionnels.

ii. En utilisant le résultat obtenu dans la question 2, montrer que

$$\forall P \in S, \quad P(0) \leqslant \|P_0\|$$

Réponse : Appliquée aux deux polynômes $P \in S$ et P_0, l'inégalité devient

$$|\langle P, P_0\rangle| = |P(0)| \leqslant \|P\|\|P_0\| = \|P_0\|$$

Notamment, on a $P(0) \leqslant \|P_0\|$.

iii. Déterminer un polynôme P de S tel que $P(0) = \|P_0\|$.

Réponse : Il suffit de prendre un polynôme proportionnel à P_0 et de norme 1, par exemple $P = \frac{P_0}{\|P_0\|}$.

iv. Retrouver ainsi d'une seconde manière la valeur maximale prise par $P(0)$ lorsque P décrit S.

Réponse : On a $\|P_0\| = \|-6X+4\| = \sqrt{\int_0^1 (-6t+4)^2 \mathrm{d}t} = \sqrt{4} = 2$: on retrouve bien le résultat précédent.

Exercice 3 : calcul de la somme d'une série

On se propose dans cet exercice de montrer que la série de terme général $u_n = (-1)^n \frac{\sin n}{n}$ est convergente et de calculer sa somme.

1. Montrer que si $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$, alors :

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(t)\cos(\lambda t)\mathrm{d}t = 0.$$

Réponse : On va effectuer une intégration par parties, ce qui semble raisonnable vu les conditions imposées sur f. Fixons $\lambda > 0$ et posons $u = f$ et $v = (t \mapsto \frac{\sin(\lambda t)}{\lambda})$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a;b]$, et $u' = f', v' = (t \mapsto \cos(\lambda t))$. Par intégration par parties, on a donc

$$\int_a^b f(t)\cos(\lambda t)\mathrm{d}t = \left[f(t)\frac{\sin(\lambda t)}{\lambda}\right]_a^b - \int_a^b f'(t)\frac{\sin(\lambda t)}{\lambda}\mathrm{d}t$$

Le premier terme du membre de droite vaut

$$\frac{1}{\lambda}\left(f(b)\sin(\lambda b) - f(a)\sin(\lambda a)\right)$$

qui tend vers 0 quand $\lambda \to +\infty$ comme produit d'une expression tendant vers 0 et d'une autre restant bornée (f est continue donc bornée sur le segment $[a;b]$, et sin aussi évidemment).
Le second terme vaut

$$-\frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(t)\sin(\lambda t)\mathrm{d}t$$

qui tend vers 0 pour les mêmes raisons, l'intégrale restant bornée car

$$\left|\int_a^b f'(t)\sin(\lambda t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f'(t)\sin(\lambda t)|\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b |f'(t)|\mathrm{d}t$$

2. (a) Exprimer, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\cos\frac{t}{2}\cos(kt)$ en fonction de $\cos\left(\frac{2k+1}{2}t\right)$ et $\cos\left(\frac{2k-1}{2}t\right)$.

Réponse : On utilise l'égalité

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$$

en l'appliquant aux réels $\frac{t}{2}$ et kt :

$$\cos\frac{t}{2}\cos(kt) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{2k+1}{2}t\right) + \cos\left(\frac{2k-1}{2}t\right)\right)$$

(b) En déduire que :

$$\forall t \in [0,1],\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \cos\frac{t}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos(kt) = \frac{1}{2}\left((-1)^n\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right) - \cos\frac{t}{2}\right)$$

Réponse : On calcule :

$$\cos\frac{t}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos(kt) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos\frac{t}{2}\cos(kt) = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{2}\left(\cos\left(\frac{2k+1}{2}t\right)+\cos\left(\frac{2k-1}{2}t\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos\left(\frac{2k+1}{2}t\right)+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos\left(\frac{2k-1}{2}t\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos\left(\frac{2k+1}{2}t\right)+\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{j+1}\cos\left(\frac{2j+1}{2}t\right) = \frac{1}{2}(-1)^n\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)-\frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}$$

On a utilisé le changement d'indice $k = j+1$ et un télescopage dans l'avant-dernière égalité.

(c) Montrer alors que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n}u_k = (-1)^n\int_0^x \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\cos\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}$$

Réponse : On observe que pour $t \in [0;1]$, on a $\cos\frac{t}{2} \neq 0$. On peut donc diviser par ce nombre et on trouve que

$$\forall t \in [0;1]\,, \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos(kt) = \frac{1}{2}(-1)^n\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\cos\frac{t}{2}} - \frac{1}{2}$$

En intégrant entre 0 et 1 et par linéarité de l'intégrale, on obtient que

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\int_0^1\cos(kt)\mathrm{d}t = (-1)^n\int_0^1\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\cos\frac{t}{2}}\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{d}t = (-1)^n\int_0^1\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\cos\frac{t}{2}}\mathrm{d}t-\frac{1}{2}$$

Mais par ailleurs, pour $k \geqslant 1$:

$$(-1)^k\int_0^1\cos(kt)\mathrm{d}t = \frac{(-1)^k}{k}\left[\sin(kt)\right]_0^1 = (-1)^k\frac{\sin k}{k} = u_k$$

Si bien que finalement :

$$\sum_{k=1}^{n}u_k = (-1)^n\int_0^1\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\cos\frac{t}{2}}\mathrm{d}t - \frac{1}{2}$$

3. En déduire que la série de terme général u_n converge et que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\sin n}{n} = -\frac{1}{2}$$

Réponse : On déduit de la question précédente que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} u_k - \left(\frac{-1}{2}\right)\right| = \left|\int_0^1 \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\cos\frac{t}{2}}\mathrm{d}t\right|$$

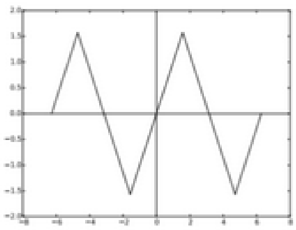
La fonction $g : t \mapsto \dfrac{1}{2\cos\frac{t}{2}}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$. La première question donne : $\displaystyle\int_0^1 g(t)\cos(\lambda t)\mathrm{d}t \underset{\lambda\to+\infty}{\rightarrow} 0$, donc $\displaystyle\int_0^1 g(t)\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\mathrm{d}t \to 0$. Or

$$\left|\sum_{k=1}^{n} u_k - \left(\frac{-1}{2}\right)\right| = \left|\int_0^1 g(t)\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\mathrm{d}t\right| \to 0$$

Ce qui veut exactement dire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k \to -\frac{1}{2}$. D'où la conclusion.

Exercice 2 : extrait d'un sujet E3A

1. On obtient :



REPRÉSENTATION DE v SUR $[-2\pi, 2\pi]$

2. La fonction nulle est continue, 2π-périodique et impaire et toutes combinaisons linéaires de telles fonctions est encore une fonction continue, 2π-périodique et impaire :
E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.

3. • Avec la continuité du produit $f\,g$ sur le segment $[0,\pi]$ pour f et g dans E, l'intégrale $\varphi(f,g)$ est bien définie.
• Avec la commutativité de la multiplication dans $\mathbb{R}$, on a $\varphi(f,g) = \varphi(g,f)$: φ est symétrique.

Avec la structure d'algèbre de $\mathbb{R}$ et la linéarité de l'intégrale, pour (f,g,h) dans E^3 et (a,b) dans $\mathbb{R}^2$, on a $\varphi(a\,f+b\,g,h) = a\,\varphi(f,h)+b\,\varphi(g,h)$: φ est linéaire à gauche, et, avec la symétrie, φ est une forme bilinéaire symétrique.
• Avec la positivité de l'intégrale, pour toute f dans E, on a $\varphi(f,f) = \int_0^\pi [f(t)]^2\,dt \geqslant 0$.
Si, pour une f dans E, on a $\varphi(f,f)=0$, alors la fonction f^2 étant continue, à valeurs positives et d'intégrale nulle sur $[0,\pi]$, par théorème, $f(t)=0$ pour tout t dans $[0,\pi]$. Comme f est impaire, on a alors $f(t)=0$ pour tout t dans $[-\pi,0]$ et donc pour tout t dans $[-\pi,\pi]$. Comme f est 2π-périodique, on en déduit que f est nulle.
Ainsi φ est définie-positive et finalement, $\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire sur } E}$.

4. Avec $\sin(a)\,\sin(b) = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b)-\cos(a+b)\right]$ et $\displaystyle\int_0^\pi \cos(k\,t)\,dt = \begin{cases} \pi \text{ pour } k=0 \\ 0 \text{ pour } k\neq 0 \end{cases}$, on a, pour (m,n) dans $\mathbb{N}^2$ tel que $m\neq n$, donc $m-n\neq 0$ et $m+n\neq 0$,
$$(s_m \mid s_n) = \int_0^\pi \sin(m\,t)\,\sin(n\,t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^\pi \big(\cos[(m-n)\,t]-\cos[(m+n)\,t]\big)\,dt = 0 :$$
$\boxed{\text{la famille } (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est orthogonale}}$.

5. Avec $s_1(t) = \sin(t)$ on a
$$(v \mid s_1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\,\sin(t)\,dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi (\pi-t)\,\sin(t)\,dt.$$
Deux intégrations par parties donnent
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\,\sin(t)\,dt = [-t\,\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(t)\,dt = [\sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$
$$\text{et } \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi (\pi-t)\,\sin(t)\,dt = [-(\pi-t)\,\cos(t)]_{\frac{\pi}{2}}^\pi - \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \cos(t)\,dt = -[\sin t]_{\frac{\pi}{2}}^\pi = 1,$$
et finalement $\boxed{(s_1 \mid v) = 2}$.
En reprenant les calculs de la question précédente pour $m=n=1$ on obtient (avec $m+n\neq 0$ et $m-n=0$) $\boxed{(s1 \mid s1) = \frac{\pi}{2}}$.

6. On a
$$(v \mid s_2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\,\sin(2\,t)\,dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi (\pi-t)\,\sin(2\,t)\,dt,$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\,\sin(2\,t)\,dt = \tfrac{1}{2}[-t\,\cos(2\,t)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \tfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2\,t)\,dt = \tfrac{\pi}{4}+\tfrac{1}{4}[\sin(2\,t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \tfrac{\pi}{4},$$
$$\text{et } \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi (\pi-t)\,\sin(2\,t)\,dt = \tfrac{1}{2}[-(\pi-t)\,\cos(2\,t)]_{\frac{\pi}{2}}^\pi - \tfrac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \cos(2\,t)\,dt = -\tfrac{\pi}{4}-\tfrac{1}{4}[\sin(2\,t)]_{\frac{\pi}{2}}^\pi = -\tfrac{\pi}{4},$$
d'où $\boxed{(v \mid s_2) = 0}$.

7. La famille (s_1,s_2) est une famille orthogonale de vecteur non nuls donc elle est libre et c'est une base du sous-espace qu'elle engendre. La formule de projection orthogonale donne alors, en notant v_2 le projeté orthogonal de v sur $F = \mathrm{Vect}(s_1,s_2)$,
$$v_2 = \tfrac{(v|s_1)}{(s_1|s_1)}\cdot s_1 + \tfrac{(v|s_2)}{(s_2|s_2)}\cdot s_2 : \boxed{v_2 = \tfrac{4}{\pi}\cdot s_1}.$$

8. a) L'équation homogène $y'+y=0$ a pour ensemble de solutions la droite vectorielle engendrée par $[t\mapsto \mathrm{e}^{-t}]$ et il est raisonnable de chercher une solution de l'équation complète de la forme $y = a\cos + b\sin$. Pour une telle fonction on a $y' = -a\sin + b\cos$ et y est solution de l'équation différentielle si et seulement si $(a+b)\cos + (b-a)\sin = \sin$.
Comme la famille $(\cos,\sin)$ est libre on obtient le système $\begin{cases} a+b=0 \\ -a+b=1 \end{cases}$ d'unique solution $(a,b) = (-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, d'où la (une) solution $y_0 = \frac{1}{2}(\sin-\cos)$.
Avec le théorème de structure, on obtient la droite affine des solutions de l'équation complète $\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}}(y'+y=\sin) = \frac{1}{2}(\sin-\cos)+\mathrm{Vect}\big([t\mapsto \mathrm{e}^{-t}]\big)}$.
(il n'est pas interdit d'utiliser la méthode de variation de la constante ou d'autres méthodes ...)

b) La partie homogène est la même que pour l'équation précédente et v_2 est continue sur $\mathbb{R}$. Il ne reste plus qu'à trouver une solution de l'équation complète.
Avec $v_2 = \frac{4}{\pi}\sin$ et la linéarité de l'équation (parfois traduit en « principe de superposition » ...), il suffit de prendre cette fois $y_0 = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{2}(\sin-\cos) = \frac{2}{\pi}\cdot(\sin-\cos)$. Ainsi,
$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}}(y'+y=v_2) = \tfrac{2}{\pi}(\sin-\cos)+\mathrm{Vect}\big([t\mapsto \mathrm{e}^{-t}]\big)}.$$