Sujet de fin d'année

Ce sujet d'étude est constitué de trois exercices indépendants, assez représentatifs de ce qu'on peut trouver à des concours comme CCINP ou E3A sur les thèmes des espaces préhilbertiens et des séries.

Exercice 1 : Un produit scalaire sur les polynômes

On considère l'application φ de $\mathbb{R}_1[X] \times \mathbb{R}_1[X]$ dans $\mathbb{R}$ définie, pour $(P,Q) \in \mathbb{R}_1[X] \times \mathbb{R}_1[X]$, par

$$\varphi(P,Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$$

Par exemple, si $P = X+1$ et $Q = X$, alors $\varphi(P,Q) = \displaystyle\int_0^1 (t+1)t\mathrm{d}t = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$.

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_1[X]$.
   Pour alléger les notations, on notera désormais $\langle P,Q\rangle$ au lieu de $\varphi(P,Q)$. La norme associée à ce produit scalaire sera notée $\|.\|$. On a donc, pour $P \in \mathbb{R}_1[X]$, $\|P\| = \sqrt{\langle P,P\rangle}$.
2. Dans cette question, on se propose de montrer qu'il existe un unique polynôme $P_0 \in \mathbb{R}_1[X]$ tel que
   $$\forall P \in \mathbb{R}_1[X], \quad \langle P, P_0\rangle = P(0).$$
   On distinguera bien P_0, qui est un polynôme, de la valeur $P(0)$ de P en 0.
   (a) Soit P_0 fixé dans $\mathbb{R}_1[X]$. Montrer que l'égalité $\langle P, P_0\rangle$ est vérifiée pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_1[X]$ si et seulement si elle est vérifiée pour les deux polynômes $P = 1$ et $P = X$.
   (b) On pose $P_0 = a_0X + b_0$ avec $(a_0, b_0) \in \mathbb{R}^2$. Calculer $\langle 1, P_0\rangle$ et $\langle X, P_0\rangle$. En déduire que $\langle P, P_0\rangle = P(0)$ pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_1[X]$ si et seulement si $\begin{cases} \frac{a_0}{2} + b_0 & = 1 \\ \frac{a_0}{3} + \frac{b_0}{2} & = 0 \end{cases}$
   (c) Conclure qu'il existe un unique polynôme P_0 de $\mathbb{R}_1[X]$, que l'on explicitera, tel que
   $$\forall P \in \mathbb{R}_1[X], \quad \langle P, P_0\rangle = P(0)$$
3. On désigne par S l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_1[X]$ tels que $\|P\| = 1$. On se propose de déterminer la valeur maximale de $P(0)$ lorsque P décrit S par deux méthodes différentes.
   (a) <u>Première méthode</u>
   On pose $P_1 = 1$.
      i. Montrer que $\|P_1\| = 1$.
      ii. Déterminer un polynôme P_2 de $\mathbb{R}_1[X]$ tel que (P_1, P_2) soit une base orthonormale de $\mathbb{R}_1[X]$.
      iii. Montrer que les éléments de S sont exactement les polynômes de la forme $\cos(\theta)P_1 + \sin(\theta)P_2$, où θ décrit $\mathbb{R}$.
      iv. Si $P = \cos(\theta)P_1 + \sin(\theta)P_2$, déterminer deux réels λ et θ_0 indépendants de θ et tels que $P(0) = \lambda\cos(\theta - \theta_0)$ pour tout réel θ.
      v. En déduire la valeur maximale prise par $P(0)$ lorsque P décrit S.
   (b) <u>Deuxième méthode</u>
      i. Rappeler l'énoncé de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et préciser les cas où cette inégalité est une égalité.
      ii. En utilisant le résultat obtenu dans la question 2, montrer que
      $$\forall P \in S, \quad P(0) \leqslant \|P_0\|$$
      iii. Déterminer un polynôme P de S tel que $P(0) = \|P_0\|$.
      iv. Retrouver ainsi d'une seconde manière la valeur maximale prise par $P(0)$ lorsque P décrit S.

Exercice 2 : extrait d'un sujet E3A On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad y' + y = v$$

où v est la fonction définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et impaire telle que :

$$\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], v(t) = t \text{ et } \forall t \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right], v(t) = \pi - t.$$

1. Représenter graphiquement la fonction v sur l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$.
   On note $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et E l'ensemble des fonctions de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ qui sont 2π-périodiques et impaires.
   Pour f et g des fonctions dans E, on note
   $$\langle f, g\rangle = \int_0^{\pi} f(t)g(t)\mathrm{d}t.$$
   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit
   $$s_n : t \in \mathbb{R} \mapsto \sin(nt)$$
2. Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.
3. Démontrer que $\langle ., .\rangle$ est un produit scalaire sur E.
4. Démontrer que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une famille orthogonale de E.
5. Démontrer que $\langle v, s_1\rangle = 2$ et $\langle s_1, s_1\rangle = \frac{\pi}{2}$.
6. Calculer $\langle v, s_2\rangle$.
7. Déterminer le projeté orthogonal v_2 de v sur $\mathrm{Vect}(s_1, s_2)$.
8. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' + y = \sin$.
9. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' + y = v_2$. Déterminer la solution qui s'annule en 0.

Exercice 3 : calcul de la somme d'une série

On se propose dans cet exercice de montrer que la série de terme général $u_n = (-1)^n \dfrac{\sin n}{n}$ est convergente et de calculer sa somme.

1. Montrer que si $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$, alors :
   $$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(t)\cos(\lambda t)\mathrm{d}t = 0.$$
2. (a) Exprimer, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\cos\frac{t}{2}\cos(kt)$ en fonction de $\cos\left(\frac{2k+1}{2}t\right)$ et $\cos\left(\frac{2k-1}{2}t\right)$.
   (b) En déduire que :
   $$\forall t \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}^*, \cos\frac{t}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos(kt) = \frac{1}{2}\left((-1)^n\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right) - \cos\frac{t}{2}\right)$$
   (c) Montrer alors que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} u_k = (-1)^n \int_0^x \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\cos\frac{t}{2}}\mathrm{d}t - \frac{1}{2}$$
3. En déduire que la série de terme général u_n converge et que :
   $$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\sin n}{n} = -\frac{1}{2}.$$