DS n^{o}4

Exercice 1

1. $t \mapsto \sin^3(t)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, donc on travaille sur $\mathbb{R}$. On linéarise, ce qui donne :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ \sin^3(t) = -\frac{1}{4}\sin(3t) + \frac{3}{4}\sin(t)$$
qui se primitive en $x \mapsto \frac{1}{12}\cos(3x) - \frac{3}{4}\cos(x)$.
2. $t \mapsto \sin(2t)e^{-t}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, donc on travaille sur $\mathbb{R}$. On passe par les complexes :
$$\forall t \in \mathbb{R}, \sin(2t)e^{-t} = \mathrm{Im}\left(e^{(-1+2i)t}\right)$$
qui se primitive en $x \mapsto \mathrm{Im}\left(\frac{1}{-1+2i}e^{(-1+2i)x}\right) = \frac{e^{-t}}{5}\left(-2\cos(2x) - \sin(2x)\right)$.
3. $t \mapsto (t^2+t+1)e^t$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, donc on travaille sur $\mathbb{R}$. On primitive en faisant deux intégrations par parties successives en dérivant le polynôme, ce qui donne comme primitive : $x \mapsto (x^2 - x + 2)e^x$
4. $t \mapsto t\cos(t)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, donc on travaille sur $\mathbb{R}$. On primitive en faisant une intégration par parties en dérivant le polynôme, ce qui donne comme primitive : $x \mapsto x\sin(x) + \cos(x)$
5. $t \mapsto t^2\ln(t)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$, donc on travaille sur $\mathbb{R}_+^*$. On primitive en faisant une intégration par partie en dérivant le logarithme, ce qui donne comme primitive : $x \mapsto \frac{x^3\ln(x)}{3} - \frac{x^3}{9}$
6. $t \mapsto \ln(1+t^2)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, donc on travaille sur $\mathbb{R}$. On primitive en faisant une intégration par partie en dérivant le logarithme, ce qui donne comme primitive : $x \mapsto x\ln(1+x^2) - 2x + 2\mathrm{Arctan}(x)$
7. $t \mapsto \mathrm{Arctan}(t)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, donc on travaille sur $\mathbb{R}$. On primitive en faisant une intégration par partie en dérivant Arctan, ce qui donne comme primitive : $x \mapsto x\mathrm{Arctan}(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$
8. $t \mapsto \frac{1}{t^2-3t+2}$: on écrit : $X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$ et donc $t \mapsto \frac{1}{(t-1)(t-2)} = \frac{1}{t-2} - \frac{1}{t-1}$ est définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ et se primitive sur l'un des intervalles $]-\infty; 1[$, $]1; 2[$ ou $]2; +\infty[$ en $x \mapsto \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|$.
9. $t \mapsto \frac{1}{t^2+2t+5}$: on écrit : $X^2 + 2X + 5 = (X+1)^2 + 4$ et donc $t \mapsto \frac{1}{t^2+2t+5} = \frac{1}{4}\frac{1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + 1}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, et se primitive sur $\mathbb{R}$ en : $x \mapsto \frac{1}{2}\mathrm{Arctan}\left(\frac{x+1}{2}\right)$.

Exercice 2

1. $t \mapsto \frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}$ avec $u = \sqrt{t^2-1}$: $\int^x \frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}\mathrm{d}t = \int^{\sqrt{x^2-1}} \frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u = \mathrm{Arctan}(\sqrt{x^2-1}$
Donc une primitive est : $x \mapsto \mathrm{Arctan}(\sqrt{x^2-1})$.
2. $t \mapsto \frac{1}{t+t(\ln(t))^2}$ avec $u = \ln(t)$: $\int^x \frac{1}{t+t(\ln(t))^2}\mathrm{d}t = \int^{\ln(x)} \frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}t = \mathrm{Arctan}(\ln(x))$.
Donc une primitive est : $x \mapsto \mathrm{Arctan}(\ln(x))$.

3. $t \mapsto \dfrac{1}{e^t+1}$ avec $u = e^t$: $\int^x \dfrac{1}{e^t+1}\mathrm{d}t = \int^{e^x} \dfrac{1}{u(u+1)}\mathrm{d}u = \ln\left(\dfrac{e^x}{e^x+1}\right) = -\ln(e^{-x}+1)$.
   Donc une primitive cherchée est $x \mapsto -\ln(e^{-x}+1)$
4. $t \mapsto \dfrac{1}{t^2\sqrt{1+t^2}}$ avec $t = \dfrac{1}{u}$: $\int^x \dfrac{1}{t^2\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t = -\int^{1/x} \dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{u^2}}}\mathrm{d}u = -\int^{1/x} \dfrac{u}{\sqrt{1+u^2}}\mathrm{d}u = -\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$.
   Donc une primitive cherchée est $x \mapsto -\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$.
5. $t \mapsto \dfrac{1}{t\sqrt{\ln(t)+1}}$ avec $t = e^u$: $\int^x \dfrac{1}{t\sqrt{\ln(t)+1}}\mathrm{d}t = \int^{\ln(x)} \dfrac{1}{\sqrt{u+1}}\mathrm{d}u = 2\sqrt{\ln(x)+1}$.
   Donc une primitive cherchée est $x \mapsto 2\sqrt{\ln(x)+1}$
6. $t \mapsto \sin^5(t)$ avec $u = \cos(t)$: $\int^x \sin^5(t)\mathrm{d}t = -\int^{\cos(x)}(1-u^2)^2\mathrm{d}u = \int^{\cos(x)}(-1+2u^2-u^4)\mathrm{d}u = -\cos(x) + \dfrac{2}{3}\cos^3(x) - \dfrac{1}{5}\cos^5(x)$.
   Donc une primitive cherchée est $x \mapsto -\cos(x) + \dfrac{2}{3}\cos^3(x) - \dfrac{1}{5}\cos^5(x)$.

Exercice 3

1. $y' + y = 2\sin(x)$, avec $y(0) = 36$: $S = \{x \mapsto \lambda e^{-x} + \sin(x) - \cos(x) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. Solution au problème de Cauchy : $x \mapsto 37e^{-x} + \sin(x) - \cos(x)$
2. $(x^2+1)y' - xy = (x^2+1)^{3/2}$, avec $y(1) = \sqrt{2}$: $S = \{x \mapsto \lambda\sqrt{1+x^2} + x\sqrt{1+x^2} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. Solution au problème de Cauchy : $x \mapsto x\sqrt{1+x^2}$.
3. $(1+\cos^2(x))y' - \sin(2x)y = x\cos(x)$, avec $y(\pi) = 18$: $S = \{x \mapsto \dfrac{\lambda + x\sin(x) + \cos(x)}{1+\cos^2(x)}\}$. Solution au problème de Cauchy : $x \mapsto \dfrac{37 + x\sin(x) + \cos(x)}{1+\cos^2(x)}$
4. $(1+e^x)y' + e^x y = 1 + xe^x$, avec $y(1) = 1$: $S = \{x \mapsto \dfrac{\lambda + x + (x-1)e^x}{1+e^x}\}$. Solution au problème de Cauchy : $x \mapsto x \mapsto \dfrac{e + x + (x-1)e^x}{1+e^x}$

Exercice 4

1. $y'' + y' - 2y = 12\mathrm{sh}(x)$, $y(0) = -1$ et $y'(0) = 16$
   Ensemble solution : $S = \{x \mapsto 2xe^x + 3e^{-x} + \lambda e^x + \mu e^{-2x} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$
   Solution au problème de Cauchy : $x \mapsto 2xe^x + 3e^{-x} + 3e^x - 7e^{-2x}$
2. $y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$, $y(0) = 3$ et $y'(0) = -4$
   Ensemble solution : $S = \{x \mapsto (x^2 + \lambda x + \mu)e^{-x} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$
   Solution au problème de Cauchy : $x \mapsto (x^2 + 7x + 3)e^{-x}$
3. $y'' + y' - 2y = 18xe^x$, $y(0) = 2$ et $y'(0) = -3$
   Ensemble solution : $S = \{x \mapsto (3x^2 - 2x)e^x + \lambda e^x + \mu e^{-2x} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$
   Solution au problème de Cauchy : $x \mapsto (3x^2 - 2x)e^x + e^x + e^{-2x}$
4. $y'' + 2y' + 2y = 5\sin(x)$, $y(0) = 35$ et $y'(0) = 3$
   Ensemble solution : $S = \{x \mapsto \sin(x) - 2\cos(x) + e^{-x}\left(\lambda\cos(x) + \mu\sin(x)\right) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$
   Solution au problème de Cauchy : $x \mapsto \sin(x) - 2\cos(x) + e^{-x}\left(37\cos(x) + 37\sin(x)\right)$