DS n^{o}4

IMPORTANT : on prêtera une attention toute particulière au sens de ce qu'on écrit. Les erreurs suivantes seront particulièrement sanctionnées, en étant comptabilisées et entraînant un malus global à la copie :

1. une primitive est une fonction : on ne doit pas écrire "$x\ln(x) - x$ est une primitive de $\ln(x)$" mais bien "$x \mapsto x\ln(x) - x$ est une primitive de ln"
2. une primitive n'est pas unique : on n'écrira jamais "la primitive". Ou bien on définit sa valeur y_0 en un x_0, et on dira "l'unique primitive qui vaut y_0 en x_0", ou bien on écrira plus simple "une primitive" ;
3. une solution d'une équation différentielle est une fonction : pour donner les solutions d'une équation différentielle, on écrira soit "les solutions sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda \dots$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$" ou alors "l'ensemble solution de l'équation est : $S = \{x \mapsto \lambda \dots \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$"
4. si on considère une équation différentielle linéaire, on peut être amené à résoudre l'équation homogène associée : on n'écrira pas "les solutions homogènes sont..." mais bien "les solutions de l'équation homogène sont..."
5. un polynôme possède des racines tandis qu'une équation polynomiale possède des solutions : on ne parle pas de solution d'un polynôme, ni de racine d'une équation ;
6. quand on écrit une intégrale, la variable d'intégration ne doit pas apparaître dans les bornes ;
7. la conjugaison du verbe résoudre doit être maîtrisée.

I Intégrales et primitives

Exercice 1 Déterminer primitives des fonctions suivantes, en précisant bien à chaque fois l'intervalle sur lequel cette primitive est valable :

1. $t \mapsto \sin^3(t)$
2. $t \mapsto \sin(2t)e^{-t}$
3. $t \mapsto (t^2 + t + 1)e^t$
4. $t \mapsto t\cos(t)$
5. $t \mapsto t^2\ln(t)$
6. $t \mapsto \ln(1 + t^2)$
7. $t \mapsto \mathrm{Arctan}(t)$
8. $t \mapsto \dfrac{1}{t^2 - 3t + 2}$
9. $t \mapsto \dfrac{1}{t^2 + 2t + 5}$

Exercice 2

Appliquer le changement de variable demandé, et en déduire des primitives des fonctions suivantes :

1. $t \mapsto \dfrac{1}{t\sqrt{t^2-1}}$ avec $u = \sqrt{t^2 - 1}$
2. $t \mapsto \dfrac{1}{t + t(\ln(t))^2}$ avec $u = \ln(t)$
3. $t \mapsto \dfrac{1}{e^t + 1}$ avec $u = e^t$
4. $t \mapsto \dfrac{1}{t^2\sqrt{1+t^2}}$ avec $t = \dfrac{1}{u}$
5. $t \mapsto \dfrac{1}{t\sqrt{\ln(t)+1}}$ avec $t = e^u$
6. $t \mapsto \sin^5(t)$ avec $u = \cos(t)$

II Équations différentielles

Exercice 3

Résoudre les équations différentielles suivantes, puis résoudre le problème de Cauchy associé :

1. $y' + y = 2\sin(x)$, avec $y(0) = 36$.
2. $(x^2+1)y' - xy = (x^2+1)^{3/2}$, avec $y(1) = \sqrt{2}$
3. $(1+\cos^2(x))y' - \sin(2x)y = x\cos(x)$, avec $y(\pi) = 18$
4. $(1+e^x)y' + e^x y = 1 + xe^x$, avec $y(1) = 1$

Exercice 4

Résoudre les équations différentielles suivantes, puis résoudre le problème de Cauchy associé.

On n'exprimera que les solutions réelles, et on veillera à ne pas utiliser l'exponentielle complexe pour les exprimer (on utilisera les fonctions circulaires à la place).

1. $y'' + y' - 2y = 12\mathrm{sh}(x)$, $y(0) = -1$ et $y'(0) = 16$
2. $y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$, $y(0) = 3$ et $y'(0) = -4$
3. $y'' - 2y' - 2y = 18xe^x$, $y(0) = 2$ et $y'(0) = -3$

   Indication : on pourra chercher une solution particulière sous la forme $x \mapsto f(x)xe^x$ où f est une fonction affine
4. $y'' + 2y' + 2y = 5\sin(x)$, $y(0) = 35$ et $y'(0) = 3$