DM n^{o}4 : à rendre pour le 14 février

Deux algorithmes de résolution d'équation

Dans ce problème, on étudie deux méthodes de résolution d'équation, et leurs algorithmes associés pour la résolution approchée (notamment leur vitesse de convergence vers la solution). Dans tout le problème on fixe a et b deux réels tels que $a < b$ et on pose $I = [a, b]$.

Exercice 1 [Théorème du point fixe]

On se donne $k \in]0; 1[$, et $g\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction k-lipschitzienne, c'est-à-dire qui vérifie :

$$\forall x, y \in I,\ |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|$$

et on suppose de plus que $g(I) \subset I$.

1. (a) Montrer que g est continue sur I.
   (b) Montrer que l'équation $g(x) = x$ possède une solution et une seule dans le segment I. On notera α cette solution.
2. Soit $u \in I$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par :

$$x_0 = u \quad \text{ et } \quad \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = g\left(x_n\right)$$

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $|x_n - \alpha| \leqslant k^n|u - \alpha|$. En déduire que (x_n) converge vers un réel que l'on déterminera.
   (b) Établir que pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ on a :

$$|x_{n+p} - x_n| \leqslant \frac{1 - k^p}{1 - k}\,|x_{n+1} - x_n|$$

   (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$|x_n - \alpha| \leqslant \frac{k^n}{1 - k}\,|x_1 - x_0|\,.$$

3. On suppose que g est dérivable en α.
   (a) Établir que $|g'(\alpha)| \leqslant k$.
   (b) On reprend les notations de la question 2). Montrer que, si pour tout $n \in \mathbb{N}, x_n \neq \alpha$ alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1} - \alpha}{x_n - \alpha} = g'(\alpha)$$

Exercice 2 [Méthode de Newton]

On considère une application $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$ telle que $f(a) > 0, f(b) < 0$ et f' est strictement négative sur $[a, b]$.

4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ d'inconnue x admet une unique solution dans $]a, b[$. On notera cette solution α.
5. Soit $x_0 \in [a, b]$. Déterminer l'abscisse du point d'intersection de l'axe des abscisses et de la tangente à f en $(x_0, f(x_0))$. Un dessin sera apprécié pour représenter la situation !

On introduit la fonction $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in [a, b],\ g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

6. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. Calculer la dérivée de g sur $[a, b]$. Donner en particulier la valeur de $g(\alpha)$ et $g'(\alpha)$.
7. Montrer qu'il existe deux réels m et M strictement positifs tels que :

$$\forall x \in [a, b], |f'(x)| \geqslant m \quad \text{et} \quad |f''(x)| \leqslant M.$$

8. Montrer qu'il existe $L > 0$ tel que : $\forall t \in [a, b], |f(t)| \leqslant L|t - \alpha|$.
9. Soit $x \in [a, b]$. En utilisant le théorème des accroissements finis entre x et α, montrer que

$$|g(x) - \alpha| \leqslant \frac{M}{m^2} L|x - \alpha|^2$$

10. On note $K = \frac{ML}{m^2}$. Montrer qu'il existe $h > 0$ tel que, en notant $J = [\alpha - h, \alpha + h]$, on ait $Kh < 1$ et $J \subset [a, b]$.
11. Montrer que : $\forall x \in J,\ g(x) \in J$.

On introduit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 \in J$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = g(x_n)$.

12. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et à valeurs dans J.
13. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |x_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{K} \left(K(x_0 - \alpha)\right)^{2^n}$$

14. En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

On étudie maintenant un exemple d'une telle méthode de Newton pour obtenir une approximation de $\sqrt{3}$. On considère donc $f : [1, 3] \to \mathbb{R}, x \mapsto 3 - x^2$.

15. En reprenant les notations de la question 7, montrer qu'on peut prendre $K = 3$ et $h = 0,3$. On notera que $1,7 < \sqrt{3} < 2$.
16. En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = g(x_n)$ est bien définie.
17. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, |x_n - \sqrt{3}| \leqslant \frac{1}{3}\left(0,9\right)^{2^n}$.
18. Combien d'itérations doit-on faire pour obtenir 100 décimales de $\sqrt{3}$ avec cette méthode ?
19. Si l'on avait utilisé une méthode de dichotomie, combien d'itérations aurait-on dû faire pour obtenir 100 décimales de $\sqrt{3}$?