DM n^{o}3 : à rendre pour le 9 décembre

Exercice 1 Une fonction injective

Soient E, F deux ensembles non-vides, et $f : E \to F$.

1. Montrer que :
$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E),\ f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$$
2. Montrer que, dans l'assertion précédente, l'inclusion réciproque n'est en général pas vérifiée.
3. Montrer que f est injective si, et seulement si :
$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E),\ f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B).$$

Exercice 2 Une fonction surjective

Soient E, F deux ensembles non-vides, et $f : E \to F$.

1. Montrer que :
$$\forall B \in \mathcal{P}(F),\ f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B.$$
2. Montrer que, dans l'assertion précédente, l'inclusion réciproque n'est en général pas vérifiée.
3. Montrer que f est surjective si, et seulement si :
$$\forall B \in \mathcal{P}(F),\ B \subset f\left(f^{-1}(B)\right).$$

Exercice 3 Une fonction bijective

On considère ici $f : z \mapsto \dfrac{z+1}{z-2}$ définie sur $E = \mathbb{C} \setminus \{2\}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de E dans $F = \mathbb{C} \setminus \{a\}$, pour $a \in \mathbb{C}$ que l'on donnera explicitement, et donner une écriture simple de sa réciproque.
   Pour éviter toute ambiguïté de notation entre une image réciproque par f et l'image par la bijection réciproque de f, on notera $g : F \to E$ la bijection réciproque de f.
2. Étude des images directes et réciproques de $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que pour tout $z \in E$: $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$.
   (b) En déduire que pour tout $z \in E$: $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(z) \in \mathbb{R}$.
   (c) En déduire $f(\mathbb{R} \cap E)$ et $f^{-1}(\mathbb{R})$.
3. Étude des images directes et réciproque du cercle et du disque unité : on rappelle que $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, et on pose de plus $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ le disque ouvert de centre 0 de rayon 1.
   (a) Exprimer, pour $z \in \mathbb{C}$, les quantités $|z+1|^2$ et $|z-2|^2$ en fonction de z et $\overline{z}$.
   (b) En déduire $f^{-1}(\mathbb{U})$ et $f^{-1}(\mathbb{D})$.
   (c) Adapter les questions précédentes pour déterminer $f(\mathbb{U})$ et $f(\mathbb{D})$.
   Indication : on pourra commencer par exprimer ces ensembles à l'aide de g au lieu de f.

On pourra s'aider des rédactions types suivantes, à compléter et à adapter suivant les énoncés :

Injectivité : soit $f : E \to F$. On suppose que f vérifie la propriété suivante :

$$(\star) : \forall a \in A, \ \text{Prop}(a) \text{ est vraie.}$$

Montrons que f est injective.
Soient $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$.
Appliquons $(\star)$ avec $a = \dots$
(on choisit $a \in A$ habilement : par exemple, si a doit être un ensemble, on utilisera souvent des singletons pour prouver une injectivité)
Ainsi : Prop(a) est vraie.
Donc : $x_1 = x_2$.
Donc f est injective.

Surjectivité : soit $f : E \to F$. On suppose que f vérifie la propriété suivante :

$$(\star) : \forall b \in B, \ \text{Prop}(b) \text{ est vraie.}$$

Montrons que f est surjective.
Soit $y \in F$.
Appliquons $(\star)$ avec $b = \dots$
(on choisit $b \in B$ habilement : par exemple, si b doit être un ensemble, on utilisera souvent l'ensemble le plus grand possible ou l'ensemble vide pour prouver une surjectivité)
Ainsi : Prop(b) est vraie.
Donc il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$.
Donc f est surjective.

Bijectivité et bijection réciproque : soit $f : E \to F$. Pour montrer que f est bijective, on peut montrer (en suivant les rédactions précédentes) que f est à la fois injective et surjective.

Si on veut montrer que f réalise une bijection de E dans F (ou un sous-ensemble de F) **ET QUE L'ON VEUT DÉTERMINER SA BIJECTION RÉCIPROQUE**, on fixe $y \in F$ et on l'équation d'inconnue $x \in E$ suivante : $f(x) = y$. Si on note G l'ensemble des y pour lesquels cette équation admet une unique solution, on déduit que f réalise une bijection de E dans G, et alors :

$$f^{-1} : \left\{ \begin{array}{ccl} G & \to & E \\ y & \mapsto & \text{l'unique solution de l'équation } f(x) = y \end{array} \right.$$

où on donne cette solution explicitement, et le plus simplement possible.