

## DM n°1 : à rendre pour le 16 septembre

**Consignes de présentation.** Ces consignes sont valables pour les DM et les DS. Les enfreindre entraînera une non-correction de tout ou partie de la copie (comme cela serait d'ailleurs le cas aux concours).

- Utilisez des copies doubles.
- Écrivez votre nom sur chaque copie (en revanche, la classe n'est pas utile...).
- Numérotez les copies.
- Numérotez les questions. Vous pouvez traiter les questions dans un ordre différent de celui de l'énoncé, notamment en DS, mais dans ce cas il faut l'écrire explicitement.
- Barrez proprement si nécessaire (pas de correcteur liquide, pas de rature).
- Soulignez ou encadrez les résultats.
- Formez une marge (s'il n'y en a pas déjà) et n'écrivez pas dedans (dans tous les cas). Aérez votre copie : sautez des lignes entre les questions. Laissez un espace (entre un quart et une demi-page) en haut de votre première copie pour que le professeur puisse y inscrire des remarques.

### Consignes pour le travail :

Le but des DM est double. Tout d'abord, les DM permettent de progresser en rédaction mathématique, en étant corrigé par son professeur. Ils fournissent donc un excellent entraînement aux DS (le calendrier est d'ailleurs prévu pour que, sauf événement imprévu, je rende systématiquement les DM avant le DS suivant). Par ailleurs, les DM sont l'occasion d'aborder des problèmes parfois plus originaux ou plus difficiles que ce que vous aurez l'occasion de voir en DS. En conséquence :

- Les DM commencent toujours par des exercices ou des questions élémentaires, que vous devez absolument chercher et rédiger seuls.
- En revanche, il n'est pas rare de croiser des questions plus difficiles ou demandant de l'initiative. Il est bien sûr positif de chercher ces questions en groupe, pendant la pause du déjeuner, ou après les cours. Il est autorisé, voire recommandé, de me poser des questions si vous avez des doutes sur votre démarche : directement après les cours, pendant le TD, par mail...
- L'attitude la pire qu'on puisse avoir face à un DM consiste à s'y mettre la veille au soir (voire le matin...), en faisant semblant de travailler et en recopiant vaguement ce qu'un camarade plus consciencieux aurait fait avant. Cela ne trompe personne, et surtout, cela ne vous fait absolument pas progresser ; pire, cela vous fait culpabiliser pour absolument rien. Il faut s'y mettre en avance, et ce n'est pas grave si vous ne les finissez pas !

Ce devoir est constitué de deux exercices : le premier est à traiter par tout le monde, et est constitué de plusieurs questions indépendantes ; le second est facultatif, se voulant plus conceptuel. Vous prêterez une attention particulière à la rédaction, et ceci pour les deux exercices. Pour le second exercice notamment, il est impératif d'adopter une rédaction claire et structurée, qui permette au correcteur de bien saisir les étapes de l'argumentation, ainsi que la justification de chaque étape.

### Exercice 1 Quelques questions indépendantes

1. Résoudre l'inéquation

$$\sqrt{x} + \sqrt{x-1} > \sqrt{x+1}$$

d'inconnue  $x \in [1, +\infty[$ .

2. Déterminer les valeurs de  $m \in \mathbb{R}$  de sorte que l'inégalité

$$(2m-1)x^2 - 2x + 4m - 3 > 0$$

soit vraie pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

3. Résoudre l'inéquation

$$|x - 3| + |x + 2| < 6$$

d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$ .

4. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $2^n > n$ .

5. Soit  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite qui vérifie :  $u_0 = 1, u_1 = 0$  et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n(1 - n)$$

6. Déterminer toutes les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que pour tout couple  $(x, y)$  de réels, on ait :

$$f(xy) = xf(x) + yf(y)$$

**Exercice 2** [Des mathématiciens rentrent dans un bar...]

Deux étudiants de mathématique (qui ne se connaissent pas) rentrent dans un bar et commandent chacun une bière. Le barman récupère leur cartes d'identité pour contrôler s'ils ont bien 18 ans (obligation pour consommer de l'alcool dans le bar), et les leur restitue en disant : "Sacré coïncidence : vous avez exactement un an d'écart !".

Ils sont alors interpellés par monsieur Megarbane, qui leur demande : "Lequel de vous deux est le plus jeune ?".

S'ensuit la discussion suivante :

1. Je ne sais pas, dit le premier étudiant.
2. Moi non plus, dit le second.
3. Je ne suis pas plus avancé, dit le premier.
4. Pareil pour moi, dit le second.
5. Donc je sais !, dit le premier.
6. Moi aussi !, dit le second.

Le barman se tourne alors vers monsieur Megarbane et lui dit : "Moi aussi je le sais". Ce à quoi monsieur Megarbane répond : "Moi aussi, mais je n'ai pas eu besoin de leur prendre leur carte d'identité".

Quels sont les âges des étudiants ?

On précisera bien, dans chaque étape de la démonstration, la ligne du dialogue sur laquelle s'appuie le raisonnement.