TOURS DE HANOÏ

DANG NGUYEN-BAC, HSUEH-YUNG LIN

Le principal but de l'activité consiste à expliquer le raisonnement par récurrence en mathématiques à travers le problème des tours de Hanoï.

1. Le matériel

Le jeu est constitué

- de trois piquets verticaux A, B et C,
- d'un empilement de $n = 2, 3, 4, 5$ disques de taille différente sur le piquet A, disposé du plus grand au plus petit en partant du bas.

2. Déroulement de l'activité

2.1. Expliquer le but et les règles du jeu.

Le joueur doit déplacer l'empilement de disque du piquet A au piquet C, sachant qu'il y a deux règles à respecter:

- le joueur ne peut déplacer qu'un seul disque à la fois,
- le joueur ne peut pas mettre un disque plus grand sur un disque plus petit.

2.2. Cas simples.

Poser les questions suivantes :

Question 1. *Est-il possible de déplacer la tour quand elle consiste seulement d'un ou deux disques ?*

Question 2. *Même question pour trois disques. Si la réponse est oui, comment la déplace-t-on ?*

2.3. Passage de trois à quatre disques.

Question 3. *Même question que la question 2 pour quatre disques.*

On explique la remarque suivante pendant ou après la question 3 : si on sait déplacer 3 disques du piquet A au piquet C, on sait aussi le déplacer du piquet A au piquet B. Partons donc de 4 disques $D_1, \dots, D_4$ du plus grand au plus petit. On déplace $D_2, \dots, D_4$ vers le piquet B sans bouger le disque D_1, puis on déplace le disque D_1 au piquet C, puis on déplace l'empilement $D_2, \dots, D_4$ du piquet B au piquet C.

Question 4 (Si le temps le permet)**.** *Même question pour cinq disques.*

2.4. Cas général.

Question 5. *Si le nombre de disque est quelconque (par exemple* 51*), est-il toujours possible de déplacer la tour ?*

Réponse: Oui, on remarque que si on sait déplacer $n-1$ (ici 50) disques du piquet A au piquet C, on sait aussi déplacer la tour à n disques du piquet A au piquet B. Partons donc de n disques $D_1, \dots, D_n$ du plus grand au plus petit. On déplace $D_2, \dots, D_n$ vers le piquet B sans bouger le disque D_1, puis un déplace le disque D_1 au piquet C, puis on déplace l'empilement $D_2, \dots, D_n$ du piquet B au piquet C. Conclusion : on se ramène au même problème mais avec le nombre de disque un de moins !

D'après le même raisonnement, on se ramène au même problème avec le nombre de disques deux de moins, puis trois, quatre... jusqu'à ce qu'il ne reste qu'un seul disque, ce qui est notre cas de base trivial. C'est ce qu'on appelle *le raisonnement par récurrence* (sur le nombre de disque).

Question 6 (Niveau lycéen ou plus). *Combien de déplacements doit-on faire?*

Si on note u_n le nombre de déplacements à faire pour n disques, on trouve la formule de récurrence $u_{n+1} = 2u_n + 1$ où $u_0 = 1$. Ce qui donne bien (encore par récurrence !):

$$u_n = 2^n - 1.$$

2.5. **Un peu de culture (recopié et modifié de la page wikipédia "Tours de Hanoï").**

La fin du monde est-elle proche ? Selon la légende, dans le grand temple de Bénarès en Inde, au-dessous du dôme qui marque le centre du monde, trois aiguilles de diamant, plantées dans une dalle d'airain, hautes d'une coudée et grosses comme le corps d'une abeille. Sur une de ces aiguilles, Dieu enfila au commencement des siècles, 64 disques d'or pur, le plus large reposant sur l'airain, et les autres, de plus en plus étroits, superposés jusqu'au sommet. C'est la tour sacrée du Brahmâ. Nuit et jour, les prêtres se succèdent sur les marches de l'autel, occupés à transporter la tour de la première aiguille sur la troisième, sans s'écarter des règles fixes que nous venons d'indiquer, et qui ont été imposées par Brahma. Quand tout sera fini, la tour et les brahmes tomberont, et ce sera la fin du monde !

Comme indiqué ci-dessous, un jeu à 64 disques requiert un minimum de $2^{64} - 1$ déplacements. En admettant qu'il faille 1 seconde pour déplacer un disque, ce qui fait 86400 déplacements par jour, la fin du jeu aurait lieu au bout d'environ 213000 milliards de jours, ce qui équivaut à peu près à $584,5$ milliards d'années, soit 43 fois l'âge estimé de l'univers ($13,7$ milliards d'années selon certaines sources).

2.6. **D'autres problèmes résolubles par récurrence.**

- Tout nombre entier peut se décomposer comme un produit de facteurs premiers.
- Trouver le nombre de façons de mélanger un jeu de carte, c'est-à-dire trouver le nombre de permutations d'un ensemble de cardinal fini.