

## TOUR DE MAGIE - CRITÈRES DE DIVISIBILITÉ

**Dispositif :** ce tour de magie peut être fait à plusieurs personnes en même temps, par exemple à trois groupes de deux personnes (chaque groupe est assimilé à un participant dans la suite). Chaque participant doit avoir une feuille, un stylo et une calculatrice. Attention, celui qui fait le tour (vous dans la suite) doit pouvoir garder un œil sur ce qu'écrit chaque participant.

### Déroulement du tour de magie :

- demandez à chaque participant d'écrire trois (par exemple) chiffres compris entre 1 et 9,
- demandez à chaque participant d'écrire trois nombres à deux chiffres,
- demandez à chaque participant d'écrire trois nombres à trois chiffres,
- ...

*Il faut être attentif à ce que parmi les nombres écrits par chaque participant, il y ait au moins un multiple de 9 ou deux multiples de 3. Si ces multiples tardent à apparaître chez une personne, vous pouvez soit poursuivre le processus d'écriture des nombres, soit ruser en demandant de manière tout à fait innocente ("pour compliquer encore plus la chose, on va dire que vous allez rajouter respectivement 11, 12 et 13" ce qui permet par exemple de rajouter un multiple de 3 à la deuxième personne).*

Une fois que chacun des participants a un multiple de 9 ou deux de 3 dans les nombres qu'il a écrits,

- demandez à chacun de faire la multiplication de tous ces nombres et de ne surtout pas vous montrer le résultat,
- demandez à chacun de barrer un chiffre de ce nombre, peu importe lequel et de réécrire le nouveau nombre (sans le chiffre barré) et de vous le montrer.

*Vous devez maintenant être capable de trouver le chiffre barré du nombre (ou presque...).*

**Explication :** en s'étant assuré qu'un multiple de 9 ou deux de 3 apparaissent dans les nombres écrits par les participants, pour chacun d'entre eux, le nombre obtenu après multiplication sera un multiple de 9, la somme de ses chiffres sera donc divisible par 9. Il ne reste donc plus qu'à compléter la somme des chiffres du nombre avec le chiffre barré pour arriver à un multiple de 9. Seule faille, si le nombre obtenu avec le chiffre barré est déjà un multiple de 9, dans ce cas, deux cas de figure possibles : soit le participant a barré un 0 soit il a barré un 9. Une solution est là encore de ruser un peu, si vous tombez sur ce cas, vous pouvez dire qu'il manque 0 tout en ayant préparé un papier avec un 9 écrit dessus (ou inversement). Et donc si c'est 0, c'est gagné, sinon, vous dites que vous avez fait une "blague" et que c'était un 9 comme vous l'aviez écrit (discrètement) sur votre papier...

**Formalisation du problème :** il s'agit d'utiliser les *critères de divisibilité* par 3 et 9, comment savoir si un nombre entier est divisible par 3 ou par 9? Introduire la notion de *congruences* pour les entiers i.e. de calcul modulo un entier. On montre ensuite qu'un nombre  $N = \overline{a_n \dots a_0}$  est divisible par 9 si et seulement si  $a_0 + \dots + a_n \equiv 0 \pmod{9}$ . En effet,  $N = \sum_{k=0}^n a_k 10^k$  et comme  $10 \equiv 1 \pmod{9}$ , pour tout  $k$ ,  $10^k \equiv 1 \pmod{9}$ , d'où

$N \equiv \sum_{k=0}^n a_k \pmod{9}$ . On peut étendre ce type de critère au critère de divisibilité par 11 par exemple (cf. application).

**Application aux codes correcteurs :** les codes correcteurs ont leur source dans un problème très concret lié à la transmission de données. Dans certains cas, une transmission de données se fait en utilisant une voie de communication qui n'est pas entièrement fiable. Autrement dit, les données, lorsqu'elles circulent sur cette voie, sont susceptibles d'être altérées. L'objectif des sommes ou clés de contrôle est l'apport d'une redondance de l'information de telle manière que l'erreur puisse être détectée. Voici deux exemples simples.

- Chaque billet d'euros possède un numéro de série unique constitué d'une lettre (indiquant la provenance du billet) et d'une série de chiffres. On remplace d'abord la lettre par son rang dans l'alphabet (remplacer par exemple U par 21). Un des critères pour que le billet soit vrai est que le reste de la division par 9 de ce nombre soit égal à 8.
- L'ISBN est un numéro international normalisé qui permet d'identifier un livre par son éditeur et son numéro de production. Ce numéro est composé de 10 chiffres divisés en quatre parties, la première (constituée d'un chiffre) correspond à la zone linguistique, la deuxième partie indique l'éditeur, la troisième partie correspond au numéro d'ordre dans la production de l'éditeur et enfin, la dernière partie (un chiffre ou une lettre) correspond à la clé de contrôle. Cette dernière est calculée de la manière suivante : si l'ISBN s'écrit  $a_1 - a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 - a_8 a_9 - a_{10}$ , il faut commencer par calculer la somme suivante :  $a := \sum_{k=1}^9 k a_k$ , la clé  $a_{10}$  est alors donnée par le reste  $r$  de la division de  $a$  modulo 11 si  $1 \leq r \leq 9$  et  $X$  si  $r = 10$ .