

Le jeu du portemanteau

Le dispositif est constitué

- d’une planche (posée sur une table), sur laquelle se trouvent 3 portemanteaux amovibles,
- d’une ficelle courte (environ 1m) lestée,
- une ficelle longue (environ 2m) lestée,
- 3 autocollants, avec inscriptions A , B , C et flèche dans le sens horaire, 3 autocollants, avec inscription A^{-1} , B^{-1} , C^{-1} et flèche dans le sens inverse des aiguilles d’une montre.

Énigme : Enrouler la corde (longue), autour des 3 portemanteaux, de sorte qu’elle tombe, si on enlève l’un, quelconque, des 3 portemanteaux.

L’énigme est difficile au premier abord. On suggérera donc de commencer par le cas, plus simple, où il n’y a que 2 portemanteaux.

Toy model : Enrouler la corde (courte), autour des 2 portemanteaux, de sorte qu’elle tombe, si on enlève l’un, quelconque, des 2 portemanteaux.

En principe, le public trouve expérimentalement une solution, qu’il s’agit de lui faire formaliser, grâce aux autocollants. Si tout va bien, alors cette solution s’écrit

$$[A, B] = ABA^{-1}B^{-1}$$

où

- A désigne un tour autour d’un des 2 portemanteaux, mettons le gauche, dans le sens horaire,
- B désigne un tour autour du portemanteau droit, dans le sens horaire,
- A^{-1} désigne un tour autour du portemanteaux gauche, dans le sens inverse des aiguilles d’une montre,
- B^{-1} désigne un tour autour du portemanteau droit, dans le sens inverse des aiguilles d’une montre.

A partir de cette formalisation, nous aidons le public à deviner la solution avec 3 portemanteaux : il s’agit d’itérer la procédure, et de faire un commutateur itéré

$$[[A, B], C] = (ABA^{-1}B^{-1})C(BAB^{-1}A^{-1})C^{-1}$$

Enroulez vous-même la longue corde, et vérifier que, lorsqu’on enlève l’un quelconque des 3 portemanteaux alors la corde tombe bien (faire 3 fois la manip). Cela doit être spectaculaire ! (la corde est longue, la manip n’est pas évidente)

Attention : Mieux vaut vous entraîner avant. En particulier, lorsque la corde passe du 1er portemanteau au 3e, dans le motif $A^{-1}C^{-1}$, il est important qu’elle passe en DESSOUS du 2e portemanteau (et pas au dessus), sinon, vous incorporez un tour additionnel autour du 2e portemanteau (B ou B^{-1}), qui empêche la corde de chuter magnifiquement à la fin. Pour ne pas se tromper : coller les 6 autocollants avant la manip. Attention à vos pieds quand la corde longue tombe (les boules sont un peu lourdes).

Conclusion :

- intérêt de la formalisation mathématique du problème : elle permet d’accéder plus rapidement à la solution que l’expérience empirique. Digression sur l’ingénierie mathématique possible.
- démarche de recherche : on traite d’abord un cas simple, on extrapole pour le cas général.