

## Le ruban de Moebius

1. **La construction.** Prenons une bande de papier et recollons les extrémités après avoir fait **un demi-tour** (ou demi-torsion)<sup>1</sup>. Comparons avec un ruban « habituel ».

2. **Bord, faces et orientations**

**Activité.** Tracer le bord du ruban de Moebius avec un feutre.

On peut voir que le bord du ruban de Moebius est d'un seul tenant. (En se plaçant en un point du bord et en le suivant on parcourt tout le bord).

**Activité.** Colorier le ruban de Moebius avec un feutre.

Si on commence à hachurer la surface du ruban avec un feutre, on recouvre tout le papier sans « changer de côté » : le ruban de Moebius n'a qu'une seule face.

Les mathématiciens distinguent les propriétés qui appartiennent en propre au ruban de celles qui proviennent de sa situation dans l'espace ambiant. Le fait d'avoir un bord en un seul morceau est un propriété indépendante de l'espace ambiant. Celle d'avoir une seule face dépend de l'espace ambiant mais elle est résulte de l'interaction d'une propriété interne à l'espace ambiant et d'une propriété interne au ruban : l'espace ambiant est orientable alors que le ruban ne l'est pas.

**Activité.** Essayer d'orienter le ruban.

Sur un ruban de Moebius transparent, on matérialise une courbe fermée simple (simple signifie sans auto-intersection) qui fait une fois le tour du ruban. Typiquement on peut choisir l'ensemble des points maximisant la distance au bord (cf. section découpage). Puis on dessine un repère  $(u, v)$  direct où  $u$  est tangent la courbe dessinée. Lorsqu'on a fait un tour, on arrive « sous » le point de départ avec le repère  $(u, -v)$ .

3. **Découpage.** Si on coupe le ruban de Moebius en 2 dans le sens de la longueur, qu'obtient-on ?

**ATTENTION!!! cela dépend de la manière dont on découpe.** Un découpage suit une courbe fermée simple. Or il y a exactement trois classes de déformation de telles courbes sur un ruban de Moebius : celles qui ne font pas le tour du ruban, celle qui font une fois le tour et celles qui font deux fois le tour. La première classe est constituée des courbes qui sont le bord d'un disque déformé dans le ruban, elle ne nous intéresse pas<sup>2</sup>.

(a) **découpage sur la « ligne centrale ».**

Si la bande de papier de départ est un vrai rectangle très allongé alors on peut matérialiser, avant recollement, le segment formé des points situés à égales distances des deux côtés longs. Après recollement ce segment devient un cercle. Bien sûr il n'est plus constitué de points à égales distances de quoique ce soit puisque le bord du ruban est d'un seul tenant. On peut le caractériser comme étant l'ensemble des points à distance maximale du bord. Ce cercle est dans la classe des cercles faisant une fois le tour. Plus généralement on peut considérer la partition du ruban en segments qui étaient parallèles aux petits côtés du rectangle avant recollement. Tout cercle qui intersecte exactement une fois chaque segment fait une seule fois le tour du ruban.

En découpant le long d'une telle courbe, on obtient 1 seul ruban à 4 demi-torsions (ou 2 torsions complètes). Voici pourquoi il n'y a qu'un seul morceau : chaque point du ruban

---

1. Il s'agit ici de recoller sans faire de fantaisies. On peut obtenir des plongements « noués » du ruban de Moebius. Si la question se présente on pourra faire réfléchir le public sur la signification du nombre de demi-tours dans ce cas. On peut le définir mais ça demande un peu de travail.

2. Sur le cylindre (« ruban usuel ») il n'y a que deux classes de courbes fermées simples car toute courbe qui fait deux fois le tour s'auto-intersecte : c'est une conséquence du théorème de Jordan (plonger le cylindre dans le plan).

initial peut être relié au bord sans traverser la ligne de découpage. Donc, après le découpage chaque point reste relié au bord. Comme il a qu'un seul bord, on obtient qu'un seul ruban. Ce nouveau ruban a 2 bords, 2 faces. Il n'y plus qu'une seule classe de courbes fermées simples ne bordant pas de disque. Si on coupe le long d'une telle courbe, on obtient 2 rubans entrelacés : chacun est un ruban à 4 demi-torsions (ou 2 torsions), avec 2 bords et 2 faces.

(b) **découpage « près du bord ».**

Toute courbe qui intersecte exactement deux fois chaque segment d'une partition en segments fait deux fois le tour. Une façon commode d'obtenir une telle courbe consiste à essayer de découper en restant très près du bord.

On obtient 2 rubans entrelacés : l'un (le plus fin si on a coupé très près du bord) est un ruban à 4 demi-torsions (ou 2 torsions) qui correspond au bord du ruban de Moebius initial, l'autre est un ruban de Moebius qui est simplement une version un peu contractée de l'original.

4. **Où voit-on cette forme ?** Une version schématisée du ruban de Möbius est utilisée comme logo qui signifie « recyclable » .

Il sert également de nombreux logos (Google Drive, Visual Studio : l'outil de développement informatique de Microsoft).

Le logo de la marque Renault n'est pas un ruban de Moebius mais une bande recollée après 2 demi-tours.

5. **Qui a utilisé ce ruban ?**

Ce ruban de Moebius a été utilisé dans le monde industriel du XIXe siècle lorsque les machines fonctionnaient à partir de courroies. Les courroies étaient croisées à la jonction afin d'user les « deux côtés » de la courroie de la même manière.

Minimise l'énergie de la déformation.

Les tapis roulants.

6. **La bouteille de Klein et la surface de Boy.**

Le ruban de Moebius est une surface à bord qui n'est pas orientable. Il existe aussi des surfaces sans bord qui ne sont pas orientables. Les deux exemples les plus connus sont le bouteille de Klein et le plan projectif réel. Le plan projectif est obtenu en cousant bord à bord un disque et un ruban de Moebius. La bouteille de Klein est obtenue en cousant bord à bord deux rubans de Moebius. Ces objets ne peuvent pas être plongés dans l'espace usuel de dimension 3. Il existe cependant des réalisations qui s'intersectent elles mêmes le long de courbes. L'exemple le plus connu de telle réalisation s'appelle la surface de Boy. Elle comporte un cercle d'auto-intersection qui possède lui-même un point d'auto-intersection où trois morceaux du cercle se croisent.

Montrer les dessins.

7. **Un peu de culture.** Auguste Ferdinand Moebius est un mathématicien allemand né en 1790, mort en 1868.

Le ruban de Moebius a été décrit en 1858 de manière indépendante par A. F. Moebius et Johan Benedict Listing (1808-1882), Le nom du premier fut retenu grâce à un mémoire présenté à l'Académie des sciences à Paris.