École polytechnique

Intégration et calcul de primitives

Table des matières

1 Les fonctions usuelles

1.1 Fonctions primitives et fonctions réciproques

Certaines fonctions ne sont pas toujours définies explicitement, mais seulement au travers des relations qu'elles vérifient avec d'autres fonctions. Ce sont par exemple le cas des fonctions réciproques ou des primitives, définies ci-dessous.

Proposition-Définition 1. *On considère f une fonction continue strictement monotone sur un intervalle I. On note $J = f(I)$.*

Alors f est bijective de I vers J, et admet une fonction réciproque (c'est-à-dire une fonction g définie sur J telle que $f \circ g = id_I$ et $g \circ f = id_J$) qui est monotone de même monotonie que f. On notera f^{-1} la réciproque de f.

Proposition 1. *Dans les condition de la définition précédente, si l'on suppose de plus que f est dérivable, et que f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est dérivable sur J et on a :*

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Si f est dérivable sur I avec $f'(a) = 0$ pour un certain $a \in I$, alors f^{-1} admettra une tangente verticale au point $f(a)$.

Proposition-Définition 2. *On considère f une fonction continue sur un intervalle I et à valeurs réelles. Alors si l'on se fixe $x \in I$ et $y \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive F de f (c'est-à-dire une fonction F définie sur I telle que $F' = f$) vérifiant que : $F(x) = y$.*

1.2 Les fonctions logarithme et exponentielle

Un premier exemple de fonctions définies comme primitives ou comme fonctions réciproques est l'exemple des fonctions logarithme et exponentielle :

Proposition-Définition 3 (La fonction logarithme)**.** *La fonction $x \mapsto 1/x$ est une fonction continue de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$. On peut donc définir sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction logarithme (notée* log *ou* ln*) comme son unique primitive s'annulant en 1. Plus généralement, on peut aussi définir la fonction logarithme de base a comme : $\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$*

Par définition d'une primitive, la fonction ln est donc strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ (comme sa dérivée, à savoir $1/x$, est bien positive sur $\mathbb{R}_+^*$).

Proposition-Définition 4 (La fonction exponentielle)**.** *La fonction* ln *est une fonction continue strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, donc elle admet une fonction réciproque que l'on appellera fonction exponentielle (notée* exp *ou e^x).*

Définition 1 (La fonction puissance)**.** *Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On définit la puissance de a par α comme : $a^\alpha = \exp(\alpha \cdot \ln(a))$*

Dans les calculs qui impliqueront ces fonctions, on sera amené à deux types de situations : soit à simplifier des calculs, soit à connaître les ordres de grandeurs de certaines quantités. D'où les formules suivantes.

$$\begin{cases} \ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b) \\ \exp(a+b) = \exp(a) \cdot \exp(b) \end{cases} \quad \begin{cases} \ln(1/a) = -\ln(a) \\ \exp(-a) = \dfrac{1}{\exp(a)} \end{cases} \quad \begin{cases} \ln'(x) = \dfrac{1}{x} \\ \exp'(x) = \exp(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\ln \circ u)'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)} \\ (\exp \circ u)'(x) = u'(x) \cdot (\exp \circ u)(x) \end{cases} \qquad \begin{cases} (x \mapsto a^x)'(x) = \ln(a) \cdot a^x \\ (x \mapsto x^\alpha)'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1} \\ (x \mapsto (u(x))^\alpha)'(x) = \alpha \cdot u'(x) \cdot (u(x))^{\alpha-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\ln(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \\ \dfrac{\exp(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \\ \exp(-x) \cdot x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\ln(x)}{x^\alpha} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad (\alpha > 0) \\ \dfrac{\exp(x)}{x^\alpha} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad (\alpha \text{ quelconque}) \\ \exp(-x) \cdot |x|^\alpha \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad (\alpha \text{ quelconque}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ln(x) \cdot x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 \\ \ln(x) \cdot x^\alpha \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 \quad (\alpha \text{ quelconque}) \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\ln(x+1)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1 \\ \dfrac{\exp(x)-1}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1 \end{cases}$$

1.3 Les fonctions circulaires et leurs réciproques

Proposition-Définition 5 (Les fonctions sin et Arcsin)**.** *La fonction* sin *est continue croissante dérivable de* $[-\pi/2; \pi/2]$ *vers* $[-1; 1]$ *de dérivée* $\cos(x)$*. Elle admet donc une fonction réciproque* Arcsin *continue croissante sur* $[-1; 1]$*, dérivable sur* $]-1; 1[$ *avec :* $\text{Arcsin}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Proposition-Définition 6 (Les fonctions cos et Arccos)**.** *La fonction* cos *est continue décroissante dérivable de* $[0; \pi]$ *vers* $[-1; 1]$ *de dérivée* $-\sin(x)$*. Elle admet donc une fonction réciproque* Arccos *continue décroissante sur* $[-1; 1]$*, dérivable sur* $]-1; 1[$ *avec :* $\text{Arccos}'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Proposition-Définition 7 (Les fonctions tan et Arctan)**.** *La fonction* tan *est continue croissante dérivable de* $]-\pi/2; \pi/2[$ *vers* $\mathbb{R}$ *de dérivée* $1 + \tan(x)^2$*. Elle admet donc une fonction réciproque* Arctan *continue croissante dérivable sur* $\mathbb{R}$ *avec :* $\text{Arctan}'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

On aura aussi les règles de calcul suivantes :

$$\begin{cases} \cos(a+b) = \cos(a) \cdot \cos(b) - \sin(a) \cdot \sin(b) \\ \sin(a+b) = \cos(a) \cdot \sin(b) + \sin(a) \cdot \cos(b) \\ \tan(a+b) = \dfrac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a) \cdot \tan(b)} \\ \cos^2 + \sin^2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{On pose } t = \tan(a/2) : \\ \cos(a) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ \sin(a) = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \tan(a) = \dfrac{2t}{1-t^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(a) + \cos(b) = 2 \cdot \cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right) \\ \cos(a) - \cos(b) = -2 \cdot \sin\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \cdot \sin\left(\dfrac{a-b}{2}\right) \\ \sin(a) + \sin(b) = 2 \cdot \sin\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right) \\ \sin(a) - \sin(b) = 2 \cdot \cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \cdot \sin\left(\dfrac{a-b}{2}\right) \end{cases}$$

1.4 Les fonctions hyperboliques et leurs réciproques

Définition 2. *Grâce à la fonction exponentielle on peut définir les fonctions sinus, cosinus et tangente hyperbolique, respectivement définies par :*

$$\mathrm{sh} : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \mathrm{ch} : x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \mathrm{th} : x \mapsto \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$$

Proposition-Définition 8 (Les fonctions sh et Argsh)**.** *La fonction* sh *est continue croissante dérivable de* $\mathbb{R}$ *vers* $\mathbb{R}$ *de dérivée* $\mathrm{ch}(x)$*. Elle admet donc une fonction réciproque* Argsh *continue croissante dérivable sur* $\mathbb{R}$ *avec :* $\mathrm{Argsh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Proposition-Définition 9 (Les fonctions ch et Argch)**.** *La fonction* ch *est continue croissante dérivable de* $\mathbb{R}_+$ *vers* $[1; +\infty[$ *de dérivée* $\mathrm{sh}(x)$*. Elle admet donc une fonction réciproque* Argch *continue croissante sur* $[1; +\infty[$*, dérivable sur* $]1; +\infty[$ *avec :* $\mathrm{Argch}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

Proposition-Définition 10 (Les fonctions th et Argth)**.** *La fonction* th *est continue croissante dérivable de* $\mathbb{R}$ *vers* $]-1; 1[$ *de dérivée* $\dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)^2}$*. Elle admet donc une fonction réciproque* Argth *continue croissante dérivable sur* $]-1; 1[$ *avec :* $\mathrm{Argth}'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$.

On sera aussi parfois amenés à utiliser les formules suivantes :

$$\begin{cases} \mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}(a) \cdot \mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(a) \cdot \mathrm{sh}(b) \\ \mathrm{sh}(a+b) = \mathrm{ch}(a) \cdot \mathrm{sh}(b) + \mathrm{sh}(a) \cdot \mathrm{ch}(b) \\ \mathrm{th}(a+b) = \dfrac{\mathrm{th}(a) + \mathrm{th}(b)}{1 + \mathrm{th}(a) \cdot \mathrm{th}(b)} \\ \mathrm{ch}^2 - \mathrm{sh}^2 = 1 \end{cases}$$

$$\mathrm{Argsh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \qquad \mathrm{Argch}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \qquad \mathrm{Argth}(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

2 Intégration sur un segment

2.1 Intégrale d'une fonction en escalier

Définition 3. *Soit f une fonction en escalier sur $[a;b]$ (avec $a < b$). On note $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ une subdivision adaptée à f, et c_i la valeur de f sur $]x_{i-1};x_i[$. On définit alors l'intégrale de f sur $[a;b]$ comme :*

$$\int_{[a;b]} f = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot c_i$$

2.2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Proposition 2 (Adhérence des fonctions en escalier)**.** *Toute fonction continue par morceaux peut être encadrée aussi proche que l'on veut par des fonctions en escalier.*

Proposition-Définition 11. *Si f est une fonction continue par morceaux, on pose :*

$$I_-(f) = \sup \left\{ \int_{[a;b]} \phi / \phi \text{ en escalier, } \phi \leq f \right\} \qquad I_+(f) = \inf \left\{ \int_{[a;b]} \psi / \psi \text{ en escalier, } \psi \geq f \right\}$$

On a : $I_-(f) = I_+(f)$, et c'est ce que l'on note $\int_{[a;b]} f$.

Proposition 3. *L'intégrale ainsi définie est linéaire et conforme à la relation de Chasles. De plus, si f et g sont deux fonctions en escalier telles que $f \leq g$, alors on aura $\int_{[a;b]} f \leq \int_{[a;b]} g$. De plus on aura : $\left| \int_{[a;b]} f \right| \leq \int_{[a;b]} |f|$.*

La valeur moyenne de f sur $[a;b]$ est alors donnée par : $\dfrac{1}{b-a} \cdot \int_{[a;b]} f$.

Théorème 1. *Si f est une fonction continue et* ***de signe constant*** *sur $[a;b]$, alors on a l'équivalence :*

$$\int_{[a;b]} f = 0 \Leftrightarrow f \text{ est nulle sur } [a;b]$$

Réciproquement, si f est une fonction continue positive sur $[a;b]$ et s'il existe x tel que $f(x) > 0$, alors $\int_{[a;b]} f > 0$.

Définition 4 (Intégrale entre deux points)**.** *Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle I, et $a, b \in I$. On définit alors l'intégrale entre a et b par :*

$$\int_a^b f(x) \cdot \mathrm{d}x = \begin{cases} \displaystyle\int_{[a;b]} f & (\text{si } a < b) \\ 0 & (\text{si } a = b) \\ -\displaystyle\int_{[b;a]} f & (\text{si } a > b) \end{cases}$$

L'intégrale ainsi définie est toujours linéaire et vérifie la relation de Chasles.

Théorème 2 (Inégalités de Cauchy-Schwarz et de Minkowski)**.** *Si f et g sont des fonctions continues par morceaux sur I, et $a, b \in I$, alors on a :*

$$\left| \int_a^b f(x) \cdot g(x) \cdot \mathrm{d}x \right|^2 \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2 \cdot \mathrm{d}x \right) \cdot \left(\int_a^b |g(x)|^2 \cdot \mathrm{d}x \right)$$

$$\left| \int_a^b (f(x) + g(x))^n \cdot \mathrm{d}x \right|^{1/n} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^n \cdot \mathrm{d}x \right)^{1/n} + \left(\int_a^b |g(x)|^n \cdot \mathrm{d}x \right)^{1/n}$$

où $n \in [1;+\infty[$. De plus (sauf dans le cas $n=1$) on aura égalité si et seulement si f et g sont linéairement dépendants (c'est-à-dire $f = \lambda \cdot g$ ou $g = \lambda \cdot f$). La première inégalité est appelée inégalité de Cauchy-Schwarz, et la seconde inégalité de Minkowski.

Théorème 3 (Sommes de Riemann). *Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a;b]$, $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ une subdivision de $[a;b]$ et $\xi = (\xi_1, \dots \xi_n)$ des éléments de chaque $[a_{i-1};a_i]$. Alors la somme de Riemann associée : $S(f,\sigma,\xi) = \displaystyle\sum_1^n f(\xi_i)\cdot(a_i - a_{i-1})$ tend vers $\displaystyle\int_a^b f(x)\cdot \mathrm{d}x$ lorsque $\delta(\sigma) = \sup_i (a_i - a_{i-1})$ tend vers 0.*

En particulier : $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{b-a}{n} \cdot \sum_0^n f\left(a + i \cdot \frac{b-a}{n}\right)\right) = \int_a^b f(x)\cdot \mathrm{d}x.$

2.3 Primitives, intégration par parties et changements de variable

Théorème 4 (Primitive et intégrale). *Soit f une fonction continue par morceaux définie sur un intervalle I, et $a \in I$. On définit sur I la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\cdot \mathrm{d}t$.*

En tout point x où f est continue, F est dérivable avec $F'(x) = f(x)$. En particulier, si f est continue, alors F est l'unique primitive de f s'annulant en a.

Si f est continue sur $[a;b]$ et que l'on considère G une primitive quelconque de f sur $[a;b]$, alors on aura : $\displaystyle\int_a^b f(x)\cdot \mathrm{d}x = G(b) - G(a)$.

Théorème 5 (Intégration par parties). *Soient f et g deux fonctions de classe C^1 (c'est-à-dire dérivables, de dérivée continue) sur $[a;b]$. Alors :*

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\cdot \mathrm{d}x = [f\cdot g]_a^b - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\cdot \mathrm{d}x.$$

De manière plus générale, si l'on considère f et g de classe C^n (c'est-à-dire n fois dérivable, et dérivée $n^{\text{ème}}$ continue), on a :

$$\int_a^b f(x)\cdot g^{(n)}(x)\cdot \mathrm{d}x = \left[f\cdot g^{(n-1)} - f'(x)\cdot g^{(n-2)}(x) + \cdots + (-1)^{n-1}\cdot f^{(n-1)}(x)\cdot g(x)\right]_a^b + (-1)^n \int_a^b f^{(n)}(x)\cdot g(x)\cdot \mathrm{d}x$$

Théorème 6 (Changement de variable). *Soit f une fonction continue définie sur $[a;b]$ et ϕ une fonction de classe C^1 de $[\alpha;\beta]$ dans $[a;b]$. Alors on aura :*

$$\int_\alpha^\beta (f\circ\phi)(x)\cdot \phi'(x)\cdot \mathrm{d}x = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x)\cdot \mathrm{d}x$$

.

Proposition 4 (Dérivation d'une intégrale). *Soit f une fonction continue sur I, u et v deux fonctions dérivables à valeurs dans I. Alors, si l'on considère F une primitive de f, la fonction $\phi = \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\cdot \mathrm{d}t$ est dérivable, avec : $\phi'(x) = v'(x)\cdot f(v(x)) - u'(x)\cdot f(u(x))$.*

2.4 Formules de Taylor

Les formules de Taylor permettent d'obtenir des approximations de fonctions suffisamment régulières. Le grand intérêt est que l'on peut facilement maîtriser l'incertitude de cette approximation, puisque le terme d'erreur peut être explicitement calculé.

Théorème 7 (Formule de Taylor-Young)**.** *Soit f une fonction de classe C^n sur un intervalle I, et $a \in I$. Alors il existe une fonction ε définie sur I telle que :*

$$(\forall x \in I)\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + (x-a)^n \varepsilon(x) \qquad \textit{avec} \qquad \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$$

Si on demande à f davantage de régularité, on peut expliciter cette fonction ε.

Théorème 8 (Formule de Taylor avec reste intégral)**.** *Soient $a < b$, et f une fonction de classe C^{n+1} sur $[a;b]$. Alors :*

$$\begin{aligned} f(b) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(a + (b-a)u) \mathrm{d}u \end{aligned}$$

La même formule reste valable si $b < a$ et que f est de classe C^{n+1} sur $[b;a]$

Théorème 9 (Formule et inégalité de Taylor-Lagrange)**.** *Soient $a < b$, et f une fonction de classe C^n sur $[a;b]$ et $(n+1)$ fois dérivable sur $]a;b[$. Alors on a :*

$$(\exists c \in]a;b[)\ f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

Si de plus on a : $(\forall t \in]a;b[)\ \left|f^{(n+1)}(t)\right| \leq M$, alors :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} M$$

Les mêmes formules sont aussi valables si $b < a$ et que f est de classe C^n sur $[b;a]$ et $(n+1)$ fois dérivable sur $]b;a[$.

Quand on n'explicitera pas le reste dans la formule de Taylor (comme dans la formule de Taylor Young), on parlera de développement limité au voisinage d'un point (du point a pour l'écriture précédente). Voici quelques exemples classiques de développement limités au voisinage de 0 à l'ordre n :

$$\begin{aligned} \exp(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\ \cos(x) &= \sum_{k=0}^{n/2} \frac{(-x^2)^k}{(2k)!} + o(x^n) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + o(x^n) \\ \sin(x) &= \sum_{k=0}^{n/2-1} \frac{x \cdot (-x^2)^k}{(2k+1)!} + o(x^n) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + o(x^n) \end{aligned}$$

$$\operatorname{ch}(x) = \sum_{k=0}^{n/2} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^n) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + o(x^n)$$

$$\operatorname{sh}(x) = \sum_{k=0}^{n/2-1} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^n) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} \cdot x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} \cdot x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \cdot x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1} \cdot x^n}{n} + o(x^n)$$

3 Calculs explicites d'intégrales et de primitives

Le principe d'un calcul explicite d'intégrale est de trouver une primitive de la fonction sous le signe intégral. La méthode se fait en deux étapes :

Première étape : Il faut essayer de changer l'expression sous le signe intégral. On peut soit le faire par intégration par parties (théorème 5) (et le but est alors de faire disparaître en le dérivant un facteur gênant dans un produit), soit par changement de variable (théorème 6) (et le but est alors de faire disparaître en le dérivant une expression gênante dans une composition).

Seconde étape : Il faut ensuite reconnaître une dérivée exacte de fonction connue. C'était notamment le but de la présentation des fonctions usuelle présentée en première partie. On utilise aussi les propriétés de linéarité de l'intégrale pour séparer les parties que l'on sait intégrer directement ou non.

Le but de la partie qui suit est de déterminer quelle méthode est la plus appropriée selon les différentes situations, et comment l'appliquer.

3.1 Intégrales de fonctions rationnelles

Théorème 10 (Réduction en éléments simples)**.** *Soit $F = P/Q$ une fraction rationnelle, où P et Q sont deux polynômes premiers entre eux, avec Q unitaire. Il existe deux polynômes E et F, avec $\deg(R) < \deg(Q)$ et tels que : $F = E + \dfrac{R}{Q}$.*

De plus, si l'on écrit $Q = Q_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot Q_n^{\alpha_n}$ (forme irréductible), alors il existe des polynômes $R_{i,j}$ ($1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq \alpha_i$) tels que :

$$\frac{R}{Q} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\alpha_i}\frac{R_{i,j}}{Q_i^j}$$

Exemples :
Si on est dans $\mathbb{R}[X]$, alors on écrit Q sous la forme :

$$Q = (X-a_1)^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot (X-a_n)^{\alpha_n} \cdot \left(X^2 + p_1 \cdot X + q_1\right)^{\beta_1} \cdot \dots \cdot \left(X^2 + p_m \cdot X + q_m\right)^{\beta_m}$$

Et alors la réduction en éléments simples s'écrit :

$$F = E + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\alpha_i}\frac{A_{i,j}}{(X-a_i)^j} + \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{\beta_k}\frac{X \cdot B_{k,l} + C_{k,l}}{(X^2 - p_k \cdot X + q_k)^l}$$

Les termes de la première somme sont les éléments simples de la première espèce, et ceux de la seconde sont les éléments simples de seconde espèce.

Si on est dans $\mathbb{C}[X]$, alors on écrit Q sous la forme :

$$Q = (X-a_1)^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot (X-a_n)^{\alpha_n}$$

Et alors la réduction en éléments simples s'écrit :

$$F = E + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\alpha_i}\frac{A_{i,j}}{(X-a_i)^j}$$

Si $P = \lambda \cdot (X-a_1)^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot (X-a_n)^{\alpha_n}$, alors on a :

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{(X-a_i)}$$

Lorsque l'on a une fraction rationnelle, la première étape consiste à la décomposer en somme d'éléments simples, puis de primitiver séparément chacun des termes. La partie polynomiale s'intègre directement (en utilisant que $\int x^\alpha = (1/(\alpha+1))x^{\alpha+1}$ pour $\alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$, et avec la linéarité de l'intégrale). Pour les parties avec pôle, on utilise les méthodes ci-dessous.

Pour un pôle de première espèce :

$$\int \frac{1}{x-a} = \ln(|x-a|) \qquad \int \frac{1}{(x-a)^n} = \frac{-1}{n-1} \cdot \frac{1}{(x-a)^{n-1}} \qquad (n \neq 1)$$

$$\int \frac{1}{x-(a+i\cdot b)} = \frac{1}{2} \cdot \ln\left((x-a)^2 + b^2\right) + i \cdot \operatorname{Arctan}\left(\frac{x-a}{b}\right)$$

Pour un pôle de deuxième espèce :

On peut directement utiliser la réduction en éléments simples dans $\mathbb{C}$ plutôt que dans $\mathbb{R}$, ce qui fait qu'il n'y a que des pôles de première espèce. Sinon, on peut aussi faire les calculs comme suivant. Tout d'abord, si le pôle est de degré 1 :

Première étape : On réécrit la fraction en faisant apparaître la forme canonique :

$$\frac{A\cdot x + B}{x^2 + p\cdot x + q} = \frac{\frac{A}{2}\cdot(2\cdot x + p)}{x^2 + p\cdot x + q} + \frac{\frac{-A}{2}\cdot p + B}{x^2 + p\cdot x + q}$$

Deuxième étape : On intègre le premier terme, en reconnaissant à un facteur multiplicatif près la dérivée exacte de $\ln(|x^2 + p\cdot x + q|)$.

Troisième étape : On intègre le deuxième terme en procédant au changement de variable $u = \frac{1}{\lambda}\cdot\left(t + \frac{p}{2}\right)$, où λ vérifie l'égalité $t^2 + p\cdot t + q = \left(t + \frac{p}{2}\right)^2 + \lambda^2$ (forme canonique). En intégrant, on trouve à une constante multiplicative près : $\frac{1}{\lambda}\cdot\operatorname{Arctan}\left(\frac{t+p/2}{\lambda}\right)$.

Si le pôle est de degré r, on fait le même type de calcul :

Première étape : On réécrit la fraction en faisant apparaître la forme canonique :

$$\frac{A\cdot x + B}{(x^2 + p\cdot x + q)^r} = \frac{\frac{A}{2}\cdot(2\cdot x + p)}{(x^2 + p\cdot x + q)^r} + \frac{\frac{-A}{2}\cdot p + B}{(x^2 + p\cdot x + q)^r}$$

Deuxième étape : On intègre le premier terme, en reconnaissant à un facteur multiplicatif près la dérivée exacte de $\frac{1}{-r+1}\cdot\frac{1}{(x^2 + p\cdot x + q)^{r-1}}$.

Troisième étape : On intègre le deuxième terme en procédant à des intégrations par parties. On diminue ainsi l'exposant du dénominateur. On est ensuite ramenés au cas $r = 1$.

3.2 Intégrales de polynômes et fractions rationnelles en $\sin$ et $\cos$

Dans le cas d'un polynôme, une première étape consiste à linéariser le polynôme (en utilisant les règles d'addition et de multiplications entre les fonctions sin et cos. On peut aussi parfois faire apparaître des dérivées exactes. On peut aussi avoir à faire des changements de variable, comme dans l'exemple ci-dessous :

Exemple : Soit $f(x) = \sin(x)^n \cdot \cos(x)^m$. Alors, si n est impair, on peut faire le changement de variable $u = \cos(x)$. En effet, comme $\sin(x)^2 = 1 - \cos(x)^2$ et que $\cos'(x) = -\sin(x)$, alors on obtiendra un polynôme à intégrer. De même, si m est impair, on peut faire le changement de variable $u = \sin(x)$.

Dans le cas d'une fraction rationnelle, on fait quasiment toujours un changement de variable. Le changement de variable $u = \tan(x/2)$ permet d'avoir une fraction rationnelle, mais qui peut parfois être très compliquée à intégrer. Il faudra toujours commencer par utiliser les règles de Bioche pour choisir son changement de variable.

Proposition 5 (Règles de Bioche). *On étudie l'invariance de $f(x) \cdot \mathrm{d}x$ par les changements suivants : $x \mapsto -x$, $x \mapsto \pi - x$ et $x \mapsto \pi + x$. Le changement de variable à faire est alors :*

Invariance par $-x$:	*on pose $u = \cos(x)$ (on a $\cos(-x) = \cos(x)$)*
Invariance par $\pi - x$:	*on pose $u = \sin(x)$ (on a $\sin(\pi - x) = \sin(x)$)*
Invariance par $\pi + x$:	*on pose $u = \tan(x)$ (on a $\tan(\pi + x) = \tan(x)$)*
Invariance par tous ces changements :	*on pose $u = \cos(2 \cdot x)$*

3.3 Intégrales de fractions rationnelles en $\exp$

Comme on a $\exp'(x) = \exp(x)$, alors on peut faire le changement de variable $u = \exp(x)$. On obtient alors une fraction rationnelle, que l'on sait intégrer.

On peut aussi utiliser des analogues des règles de Bioche. Pour cela, on réécrit tout d'abord : $f(x) \cdot \mathrm{d}x = g(\mathrm{ch}(x), \mathrm{sh}(x))\mathrm{d}x$. Ensuite, on regarde ce que donneraient les règles de Bioche pour $g(\cos(x), \sin(x))\mathrm{d}x$. Si on devrait faire le changement de variable $u = \cos(x)$ (respectivement $u = \sin(x)$, $u = \tan(x)$, $u = \cos(2 \cdot x)$), alors il faudra dans notre cas faire le changement de variable $u = \mathrm{ch}(x)$ (respectivement $u = \mathrm{sh}(x)$, $u = \mathrm{th}(x)$, $u = \mathrm{ch}(2 \cdot x)$).

3.4 Intégrales de $P(x) \cdot \exp(\alpha \cdot x)$, $P(x) \cdot \cos(\alpha \cdot x)$ ou $P(x) \cdot \sin(\alpha \cdot x)$

Ici on a deux méthodes. Soit on peut directement chercher une primitive en prenant une forme qui semble appropriée. Pour $P(x) \cdot \exp(\alpha \cdot x)$, on cherchera une primitive de la forme $Q(x) \cdot \exp(\alpha \cdot x)$, où Q est un polynôme. Pour $P(x) \cdot \cos(\alpha \cdot x)$ ou $P(x) \cdot \sin(\alpha \cdot x)$, on cherchera une primitive de la forme $Q_1(x) \cdot \cos(\alpha \cdot x) + Q_2(x) \cdot \sin(\alpha \cdot x)$, où Q_1 et Q_2 sont aussi des polynômes.

La seconde méthode consiste à faire disparaître le polynôme dans l'intégrale. Pour cela, on le dérive par des intégrations par parties.

3.5 Intégrales de $\exp(\alpha \cdot x) \cdot \cos(\beta \cdot x)$ ou $\exp(\alpha \cdot x) \cdot \sin(\beta \cdot x)$

Ici encore on peut raisonner par identification.

Sinon, on pose $I = \int \exp(\alpha \cdot x) \cdot \cos(\beta \cdot x)$ et $J = \exp(\alpha \cdot x) \cdot \sin(\beta \cdot x)$. On a alors deux possibilités :

- soit on fait des intégrations par parties pour exprimer deux relations entre I et J, et alors trouver I et J revient à résoudre un système linéaire d'ordre 2.

- soit on étudie directement $I + i \cdot J$, et on reconnaît une dérivée exacte que l'on sait calculer ; on prend ensuite les parties réelle et imaginaire pour déduire les valeurs de I et J.

3.6 Intégrales de fractions rationnelles en x et $\sqrt{\dfrac{a \cdot x+b}{c \cdot x+d}}$

Il suffit alors de faire le changement de variable $u=\sqrt{\dfrac{a \cdot x+b}{c \cdot x+d}}$ et on obtient une nouvelle fonction plus facile à intégrer.

3.7 Intégrales de fractions rationnelles en x et $\sqrt{a \cdot x^2+b \cdot x+c}$

Il faut commencer par écrire : $a \cdot x^2+b \cdot x+c=a\left(\left(x+\dfrac{b}{2 \cdot a}\right)^2-A\right)$ (forme canonique). On fait ensuite le changement de variable : $t=\dfrac{1}{\sqrt{|A|}} \cdot\left(x+\dfrac{b}{2 \cdot a}\right)$ et on regarde la fonction obtenue.

Fonction rationnelle en t et $\sqrt{t^2-1}$: on pose $u=\operatorname{Argch}(t)$
Fonction rationnelle en t et $\sqrt{1-t^2}$: on pose $u=\operatorname{Arccos}(t)$
Fonction rationnelle en t et $\sqrt{t^2+1}$: on pose $u=\operatorname{Argsh}(t)$ ou $u=\operatorname{Argth}(t)$

4 Autres utilisations d'intégrales

4.1 Intégration sur un intervalle quelconque

De la même manière qu'on avait utilisé les fonctions en escaliers pour définir l'intégrale d'une fonction continue par morceaux, on va ici utiliser l'intégration sur un segment pour l'étendre à l'intégration sur un intervalle quelconque.

Proposition-Définition 12 (Fonction intégrable)**.** *Soit I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$, et f une fonction définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou dans $\mathbb{C}$). On dit que f est intégrable sur I s'il existe un $M > 0$ tel que, pour tout segment $J \subset I$, on ait : $\displaystyle\int_J |f| \leq M$. Dans cette situation, on pose :*

$$\int_I |f| = \sup_{J \subset I \text{ segment}} \int_J |f|$$

Si f est à valeurs réelles, alors f est intégrable si et seulement si les fonctions $f^+ = \max(f, 0)$ et $f^- = \max(f, 0)$ le sont. On pose alors : $\displaystyle\int_I f = \int_I f^+ - \int_I f^-$.

Si f est à valeurs complexes, alors f est intégrable si et seulement si ses parties réelle $\mathrm{Re}(f)$ et imaginaire $\mathrm{Im}(f)$ le sont. On pose alors : $\displaystyle\int_I f = \int_I \mathrm{Re}(f) + i \cdot \int_I \mathrm{Im}(f)$.

Notations :

Si $I = [a; b]$, on note : $\displaystyle\int_I f = \int_a^b f(t) \cdot \mathrm{d}t$.

Si $I = [a; b[$, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup +\infty$ ($b > a$), alors la fonction f est intégrable sur I si et seulement si $\displaystyle\lim_{x \to b, x < b} \int_a^x |f(t)| \mathrm{d}t$ existe. On dira alors que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t) \cdot \mathrm{d}t$ est absolument convergente. Dans ce cas, la limite $\displaystyle\int_a^b f(t) \cdot \mathrm{d}t = \lim_{x \to b, x < b} \int_a^x f(t) \cdot \mathrm{d}t$ existe, et on a : $\displaystyle\int_a^b f(t) \cdot \mathrm{d}t = \int_I f$.

Si la limite $\displaystyle\int_a^b f(t) \cdot \mathrm{d}t = \lim_{x \to b, x < b} \int_a^x f(t) \cdot \mathrm{d}t$ existe, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t) \cdot \mathrm{d}t$ est convergente.

Dans le cas où f n'est pas intégrable sur I mais que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ est convergente, on dit aussi que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t) \cdot \mathrm{d}t$ est semi convergente. Cette intégrale est alors appelée intégrale impropre, ou intégrale généralisée de f sur I.

On étend de la même manière ces notions aux cas où $I =]a; b]$ ou $I =]a; b[$.

Proposition 6 (Comparaisons d'intégrales)**.** *Soient f et g deux fonctions continues par morceaux **positives** sur $[a; b]$ telles que $f = O_b(g)$ (respectivement $f = o_b(g)$ et $f \sim_b (g)$).*

- si g est intégrable, f aussi et : $\displaystyle\int_x^b f = O_b\left(\int_x^b g\right)$ (respectivement $\displaystyle\int_x^b f = o_b\left(\int_x^b g\right)$ et $\displaystyle\int_x^b f \sim_b \left(\int_x^b g\right)$).

- si g n'est pas intégrable, f non plus et : $\displaystyle\int_a^x f = O_b\left(\int_a^x g\right)$ (respectivement $\displaystyle\int_a^x f = o_b\left(\int_a^x g\right)$ et $\displaystyle\int_a^x f \sim_b \left(\int_a^x g\right)$).

Ainsi, quand on étudiera l'intégrabilité de f, on pourra parfois simplement comparer f à une fonction bien choisie.

Exemples classiques : On se ramènera souvent à un problème d'intégration sur $\mathbb{R}_+^*$. Les seuls problèmes pour une fonction bien définie seront soit en 0, soit en $+\infty$. Pour séparer ces deux cas, on considère $a > 0$. On a :

$1/x^\alpha$ est intégrable sur $[a; +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$ et sur $]0; a]$ si et seulement si $\alpha < 1$.

$\dfrac{1}{x^\alpha \cdot (\ln(x))^\beta}$ est intégrable sur $[a; +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$ ou si $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

$|\ln(x)|$ est intégrable sur $]0; 1]$ mais pas sur $[1; +\infty[$.

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \cdot \mathrm{d}t$ est semi-convergente.

4.2 Intégrales dépendant d'un paramètre

On considère ici I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$. On considère $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I telles que chaque f_n soit intégrable sur I. On suppose que pour tout $x \in I$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$. Le but est de voir dans quelle mesure on pourra intervertir la limite et l'intégrale. On peut en effet avoir : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(t) \cdot \mathrm{d}t \neq \int_I f(t) \cdot \mathrm{d}t$.

Théorème 11. *Soit $I = [a; b]$, et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonction avec f_n intégrable sur I. Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers f, alors on a les résultats suivants :*

(*i*) *l'intégrale $\displaystyle\int_I f(t) \cdot \mathrm{d}t$ est convergente.*

(*ii*) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(t) \cdot \mathrm{d}t = \int_I f(t) \cdot \mathrm{d}t$

Plus généralement, on a les deux théorèmes suivants :

Théorème 12 (Convergence monotone)**.** *Soit (f_n) une suite croissante de fonctions réelles sur I convergent simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I. Alors la suite $\left(\displaystyle\int_I f_n\right)_n$ est majorée si et seulement si f est intégrable sur I, et alors :*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(t) \cdot \mathrm{d}t = \sup_n \int_I f_n(t) \cdot \mathrm{d}t = \int_I f(t) \cdot \mathrm{d}t$$

Théorème 13 (Convergence dominée)**.** *Soit (f_n) une suite de fonctions (complexes ou réelles) sur I convergent simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I. On suppose qu'il existe une fonction positive ϕ intégrable sur I vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

$$(\forall x \in I)\, |f_n(x)| \leq \phi(x).$$

Alors les f_n et f sont intégrables sur I, et on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(t) \cdot \mathrm{d}t = \int_I f(t) \cdot \mathrm{d}t$$

Plus généralement, on étudier des intégrales dépendant d'un paramètre continu. On considère I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, et $f : (x, t) \mapsto f(x, t)$ une fonction définie sur $I \times J$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On utilisera dans la suite t comme une variable d'intégration. Après avoir intégré, on pourra faire varier x, ce qui nous donnera une nouvelle fonction ne dépendant plus que de x. En gardant ces notations, on a les théorèmes suivants :

Théorème 14 (Continuité d'une intégrale à paramètre)**.** *On suppose que l'on a les conditions suivantes :*

(*i*) *pour tout* $t \in J$*, la fonction* $x \mapsto f(x,t)$ *est continue sur* I*.*

(*ii*) *pour tout* $x \in I$*, la fonction* $t \mapsto f(x,t)$ *est continue par morceaux sur* J*.*

(*iii*) *il existe une fonction* ϕ *intégrable sur* J *telle que :* $(\forall (x,t) \in I \times J)\, |f(x,t)| \leq \phi(t)$

Alors pour tout x *de* I *la fonction* $t \mapsto f(x,t)$ *est intégrable sur* J *et de plus la fonction* $g : x \mapsto \int_J f(x,t) \cdot \mathrm{d}t$ *est continue sur* I*.*

Théorème 15 (Dérivabilité d'une intégrale à paramètre)**.** *On suppose que l'on a les conditions suivantes :*

(*i*) *il existe des fonctions* $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \ldots, \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}$ *continues par rapport à* x *et continues par morceau par rapport à* t*.*

(*ii*) *pour tout* $x \in I$*, la fonction* $t \mapsto f(x,t)$ *est continue par morceaux et intégrable* J*.*

(*iii*) *pour tout* i*, il existe une fonction* ϕ_i *intégrable sur* J *telle que :* $(\forall (x,t) \in I \times J) \left| \dfrac{\partial^i f}{\partial x^i}(x,t) \right| \leq \phi_i(t)$

Alors la fonction $g : x \mapsto \int_J f(x,t) \cdot \mathrm{d}t$ *est de classe* C^k *sur* I *et on a, pour tout* $x \in I$ *:* $g^{(i)}(x) = \displaystyle\int_J \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x,t) \cdot \mathrm{d}t$

5 Exercices

5.1 Calculs de primitives

Exercice 1 : Soient $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $n \geq m$. Calculer :

$$\int_m^n [x] \cdot \mathrm{d}x$$

où $[x]$ désigne la partie entière de x.

Exercice 2 : Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{2} x|x| \cdot \mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_{-1}^{1} x|x| \cdot \mathrm{d}x$

Exercice 3 : Trouver les primitives suivantes :

(*i*) $\int (2x^2 + 3x - 5)\mathrm{d}x$

(*ii*) $\int (x-1)\sqrt{x}\mathrm{d}x$

(*iii*) $\int \dfrac{(1-x)^2}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

(*iv*) $\int \dfrac{x+3}{x+1}\mathrm{d}x$

(*v*) $\int \dfrac{1}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$

Exercice 4 : Calculer la dérivée de la fonction suivante :

$$F : t \mapsto \int_{-\tan t}^{\operatorname{sh} t} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$$

Exercice 5 : Calculer les primitives suivantes :

(*i*) $\int x\sqrt{1+x}\mathrm{d}x$

(*ii*) $\int x^3 e^{2x}\mathrm{d}x$

(*iii*) $\int x^2 \ln(x)\mathrm{d}x$

Exercice 6 : Soit f une fonction continue de $[a; b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$(\forall x \in [a; b])\, f(a + b - x) = f(x)$$

Montrer que l'on a alors :

$$\int_a^b x f(x)\mathrm{d}x = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Exercice 7 : En utilisant le changement de variable suggéré, calculer les primitives suivantes :

(*i*) $\int \dfrac{1}{\sqrt{2x - x^2}}\mathrm{d}x$ (poser $x = 2\sin^2 u$)

(*ii*) $\int \dfrac{x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}}\mathrm{d}x$ (poser $x^2 = \cos u$)

(*iii*) $\int \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\mathrm{d}x$ (poser $x = \cos u$)

Exercice 8 : Calculer :

$$I_n = \int \ln^n(x)\mathrm{d}x$$

Exercice 9 : Déterminer sur $\mathbb{R}$ les primitives de :

$$t \mapsto \frac{1}{2+\cos t}$$

Puis calculer :

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{2+\cos t}$$

On utilisera le changement de variable $u = \tan(t/2)$.

Exercice 10 : Étudier les variations de la fonction :

$$x \mapsto \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$$

Et en déduire : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} F(x)$.

Exercice 11 : Montrer que :

$$\int_x^{x^2} \left(\frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t\ln t}\right)\mathrm{d}t$$

tend vers 0 lorsque x tend vers 1. En déduire la limite lorsque x tend vers 1 de :

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$$

Exercice 12 : Pour $x > 0$, on définit :

$$f(x) = \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2}\mathrm{d}t$$

Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Exercice 13 : Soit f une fonction continue sur $[0;1]$. On définit F sur $[0;1]$ par :

$$F(x) = \int_0^1 \min(x,t) f(t)\mathrm{d}t$$

Montrer que F est de classe C^2, et calculer F''. En déduire que :

$$(\forall x \in [0;1])\; F(x) = \int_0^x \left(\int_u^1 f(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u$$

5.2 Propriétés générales de l'intégration

Exercice 14 : Soit f une fonction continue sur $[a;b]$.

(i) Montrer qu'il existe c dans $[a;b]$ tel que : $f(c) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\cdot \mathrm{d}x$

(ii) Montrer qu'un tel c peut être choisi dans $]a;b[$

Exercice 15 : Soit f une fonction continue sur $[a;b]$. Montrer que si

$$\left|\int_a^b f(x)\cdot \mathrm{d}x\right| = \int_a^b |f(x)|\cdot \mathrm{d}x$$

alors f garde un signe constant sur $[a;b]$.

Exercice 16 : Soit f définie sur $[a;b]$, continue et positive sur ce segment. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\int_a^b f(x)^n\cdot \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{n}} = \sup_{x\in[a;b]} f(x)$$

Exercice 17 : Soit ϕ une fonction en escalier sur $[a;b]$. On définit pour tout $n\in\mathbb{N}$ la suite :

$$u_n = \int_a^b \phi(x)\sin(nx)\cdot \mathrm{d}x$$

(i) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

(ii) Montrer que le résultat est aussi valable en remplaçant ϕ par une fonction f continue par morceaux sur $[a;b]$.

Exercice 18 : Soit f continue par morceaux sur $[a;b]$. Étudier : $\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)|\sin(nt)|\cdot \mathrm{d}t$.

Exercice 19 : Soient f et g deux applications définies sur $[a;b]$, où f est continue et g est continue par morceaux positive.

(i) Montrer qu'il existe c dans $[a;b]$ tel que :

$$\int_a^b f(x)g(x)\cdot \mathrm{d}x = f(c)\cdot\int_a^b g(x)\cdot \mathrm{d}x$$

(ii) Si g est continue strictement positive, alors un tel c peut même être choisi dans $]a;b[$.

Exercice 20 : Soit f une application continue sur $[0;1]$ telle que $f(1)=0$. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} n\cdot\int_0^1 x^n f(x)\cdot \mathrm{d}x = 0$$

Exercice 21 : Soit E l'ensemble des fonctions continues strictement positives sur $[a;b]$. On considère :

$$\inf_{f\in E}\left(\int_a^b f(x)\cdot \mathrm{d}x\cdot\int_a^b \frac{1}{f(x)}\cdot \mathrm{d}x\right)$$

Cette quantité existe-t-elle ? Si oui, est-elle atteinte ?

Exercice 22 : Soient f et g continues par morceaux sur $[a;b]$. Montrer en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz que :

$$\left(\int_a^b (f(x)+g(x))^2\cdot \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_a^b f(x)^2\cdot \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b g(x)^2\cdot \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

Si l'on suppose de plus que f et g sont continues, trouver une condition nécessaire et suffisante pour avoir une égalité.

Exercice 23 : Soit f une fonction continue sur $[a;b]$. Montrer que :

$$\left(\forall(\alpha,\beta)\in[a;b]^2, \int_\alpha^\beta f(x)\cdot \mathrm{d}x=0\right)\Rightarrow(\forall x\in[a;b], f(x)=0)$$

Exercice 24 : Soient α et β deux réels. On considère l'ensemble E des fonctions de classe C^2 sur $[a;b]$ telles que :

$$f(a)=\alpha \qquad \text{et} \qquad f(b)=\beta$$

Montrer que $\inf\limits_{f\in E}\int_a^b f'^2(t)\mathrm{d}t$ existe et est atteint par une fonction affine.

Exercice 25 : Soit f une fonction dérivable strictement croissante bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0)=0$. On définit la fonction F sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\mathrm{d}t-xf(x)$$

La fonction F est-elle dérivable ? Quelle égalité peut-on en déduire ? Donner une interprétation géométrique de ce résultat.

Exercice 26 : Trouver l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$f(x)-\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t=x^2$$

Exercice 27 : Trouver l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\left(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\right) f(x)f(y)=\int_{x-y}^{x+y} f(t)\mathrm{d}t$$

Exercice 28 : Soient g une fonction continue sur $I=[a;b]$ et f une fonction C^1 sur I, positive et décroissante. Montrer qu'il existe c dans I tel que :

$$\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t=f(a)\int_a^c g(t)\mathrm{d}t$$

Exercice 29 : Soit f une fonction continue définie sur $\mathbb{R}$, T-périodique, telle que :

$$\int_0^T f(t)\mathrm{d}t=0$$

Montrer alors que :

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(\lambda x)\mathrm{d}x=0$$

Que devient ce résultat si l'on ne suppose plus que $\displaystyle\int_0^T f(t)\mathrm{d}t = 0$?

Exercice 30 : Soit f positive et continue sur $\mathbb{R}_+$. On suppose qu'il existe un réel positif k tel que :

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}_+^*\right) f(x) \leq k\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

En utilisant la fonction $F(x) = e^{-kx}\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, montrer que f est nulle.

Exercice 31 : Soit $c \in \mathbb{R}_+$, u et v deux applications positives de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$(\forall x \in R_+)\, u(x) \leq c + \int_0^x u(t)v(t)\mathrm{d}t$$

Montrer que :

$$(\forall x \in R_+)\, u(x) \leq c \cdot \exp\left(\int_0^x v(t)\mathrm{d}t\right)$$

Exercice 32 : Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\lim_{x\to+\infty} \left(f(x) + f'(x)\right) = 0$$

Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

5.3 Séries de Riemann

Exercice 33 : En utilisant une somme de Riemann, calculer : $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\cdot \mathrm{d}x$.

Exercice 34 : Étudier les suites suivantes :

(i) $\quad u_n = \dfrac{1}{n}\left[\sin\dfrac{\pi}{n} + \sin\dfrac{2\pi}{n} + \cdots + \sin\dfrac{n\pi}{n}\right]$

(ii) $\quad u_n = n\left(\dfrac{1}{(n+1)^2} + \dfrac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \dfrac{1}{(n+n)^2}\right)$

(iii) $\quad u_n = \dfrac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$

(iv) $\quad u_n = \sqrt[n]{\left(1+\left(\dfrac{1}{n}\right)^2\right)\left(1+\left(\dfrac{2}{n}\right)^2\right)\ldots\left(1+\left(\dfrac{n}{n}\right)^2\right)}$

Exercice 35 : Étudier la limite de :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}$$

Exercice 36 : Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et f continue de $[0;1]$ dans $[0;1]$, dérivable en 0, telle que $f(0) = 0$. On pose :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{1}{n+kp}\right)$$

Étudier la limite de u_n.

5.4 Intégrabilité et intégrales dépendant d'un paramètre

Exercice 37 : Étudier la convergence des intégrales suivantes et donner leur valeur lorsqu'elles convergent :

$$(i) \int_{-\infty}^{x} \frac{t}{t^4+t^2+1} \mathrm{d}t$$

$$(ii) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}t}{4\cos^4 t - 1}$$

$$(iii) \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{(1+t)^2} \mathrm{d}t$$

$$(iv) \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{2t^2-1}}$$

Exercice 38 : Étudier, selon la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergence de l'intégrale suivante :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} \mathrm{d}t$$

Exercice 39 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ de la manière suivante :
-sur tout intervalle de la forme $\left[n - \frac{1}{n^3}, n + \frac{1}{n^3}\right]$, où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, $f(x) = \frac{n}{2}$
-$f(x) = 0$ ailleurs.
On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

Enfin, on note $[x]$ la partie entière du nombre réel x.

(i) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$S_{[x]-1} \leq 1 + \int_0^x f(t)\, dt \leq S_{[x]+1}$$

(ii) En déduire que $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge. La fonction f a-t-elle une limite en $+\infty$?

Exercice 40 : On définit la suite de fonctions $(f_n)_n$ en posant :

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in [n, n+1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\mathrm{d}x$ et $\int_{\mathbb{R}} \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$.

Exercice 41 : Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x} \mathrm{d}x$ est divergente et que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{\ln(x)}{x} \mathrm{d}x = 0$$

Exercice 42 : On considère les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t\right)^2 \qquad \text{et} \qquad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

(*i*) Montrer que f et g sont dérivables et calculer f' et g'.

(*ii*) Montrer que pour tout $x \geq 0$, on a :

$$f(x) + g(x) = \frac{\pi}{4}$$

(*iii*) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$.

Exercice 43 : Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Calculer :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^{(1+\frac{1}{n})^n} x^{\frac{1}{n}} f(x)\mathrm{d}x$$

Exercice 44 :

(*i*) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ est convergente.

(*ii*) Montrer que la fonction $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}(1-\cos t)}{t^2}\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $[0, +\infty[$.

(*iii*) Montrer que g est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$ et calculer $g''(x)$.

(*iv*) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

(*v*) Déduire de (*iii*) et (*iv*) une expression explicite de $g(x)$.

(*vi*) En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.

(*vii*) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ est semi-convergente.

Exercice 45 :

(*i*) Montrer que l'intégrale $\Gamma(s) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{s-1}\mathrm{d}t$ converge pour $s > 0$.

(*ii*) Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et tend vers $+\infty$ lorsque s tend vers 0.

(*iii*) Montrer que $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ si $s > 0$ et en déduire $\Gamma(n)$.

(*iv*) On suppose $s > 0$. Soit $I_n = \displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{s-1}\mathrm{d}t$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = \Gamma(s)$ et en déduire la formule de Gauss : $\Gamma(s) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!\, n^s}{s(s+1)...(s+n)}$.

(*v*) Pour $x > 1$, on note $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x}$ la fonction zêta de Riemann. Montrer que, pour tout $x > 1$, on a : $\zeta(x)\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t-1}dt$.

5.5 Formules de Taylor

Exercice 46 : Soit x un réel strictement positif. Donner une majoration de l'erreur commise en prenant $x - \dfrac{x^2}{2}$ comme valeur approchée de $\ln(1+x)$. Donner une valeur approchée de $\ln(1,003)$ à 10^{-8} près.

Exercice 47 : Soit f une fonction de classe C^3 sur $\mathbb{R}$. Trouver la limite lorsque h tend vers 0 de :

$$\frac{f(x+3h)-3f(x+2h)+3f(x+h)-f(x)}{h^3}$$

Exercice 48 : Soit f une fonction positive ou nulle de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On suppose que f'' est bornée et on note : $M = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f''(x)|$. Montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R})\, |f'(x)| \leq \sqrt{2Mf(x)}$$

Exercice 49 : Soit f une fonction de classe C^∞ définie au voisinage d'un point x_0 tel que :

$$f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \qquad \text{et} \qquad f^n(x_0) \neq 0$$

En écrivant une formule de Taylor, donner l'allure de la courbe au voisinage du point x_0 en fonction de la parité de n.

Exercice 50 : Soient f une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et x un point de $\mathbb{R}$ tel que $f''(x) \neq 0$.

(i) Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout h dans $[-\eta;\eta] \setminus 0$, il existe un unique nombre $\theta \in]0;1[$ avec :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h)$$

La fonction définie sur $[-\eta;\eta] \setminus 0$ qui à h associe θ sera notée θ_x.

(ii) Montrer que :

$$\lim_{h\to 0} \theta_x(h) = \frac{1}{2}$$

Exercice 51 : Formule de Taylor-Lagrange :
Soit f une fonction de classe C^n sur $[a;b]$ et $(n+1)$ fois dérivable sur $]a;b[$. On veut montrer qu'il existe $c \in]a;b[$ tel que :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

Pour cela, on appliquera le théorème de Rolle à la fonction ϕ définie par :

$$\phi(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) + \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} \lambda$$

après avoir ajusté λ de telle sorte que $\phi(a) = \phi(b)$.

Exercice 52 : Formule de Taylor avec reste intégral :
Soit f une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

(*i*) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(tx)\mathrm{d}t$$

(*ii*) Montrer que la fonction $g(x) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$ se prolonge en une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

6 Corrigés

6.1 Calculs de primitives

Corrigé 1 : L'intégrale peut directement être vue comme la somme des termes d'une suite arithmétique. On obtient alors : $\dfrac{n(n-1)}{2} - \dfrac{m(m-1)}{2}$.

Corrigé 2 : On utilise que la fonction à intégrer est impaire, et on applique la relation de Chasles. On obtient :

$$\int_{-1}^{2} x|x|\mathrm{d}x = \int_{1}^{2} x|x|\mathrm{d}x = \int_{1}^{2} x^2\mathrm{d}x = \frac{7}{3}$$

$$\int_{-1}^{1} x|x|\mathrm{d}x = 0$$

Corrigé 3 : Dans cet exercice et dans la suite, on notera par C la constante d'intégration (c'est-à-dire l'entier qui décrit $\mathbb{R}$ et permet d'avoir toutes les primitives de la fonction cherchée).
(i) On intègre chacun des termes séparément (en utilisant que la primitive de x^α est $(1/\alpha+1)\cdot x^{\alpha+1}$ pour $\alpha \neq -1$. On trouve finalement :

$$\int (2x^2+3x-5)\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 5x + C$$

(ii) On développe l'expression dans l'intégrale, puis on intègre terme à terme comme précédemment. On trouve :

$$\int (x-1)\sqrt{x}\mathrm{d}x = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$$

(iii) On fait de même qu'en (ii). On trouve :

$$\int \frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2x^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$$

(iv) On réduit la fraction rationnelle sous forme d'éléments simples. On a :

$$\frac{x+3}{x+1} = 1 + \frac{2}{x+1}$$

Il suffit ensuite d'intégrer chaque terme, et on trouve finalement :

$$\int \frac{x+3}{x+1}\mathrm{d}x = x + 2\ln|x+1| + C$$

(v) La fraction est déjà sous forme d'éléments simples, la première étape consiste à faire disparaître l'exposant au dénominateur par une intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{2x}\cdot\frac{2x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x \\ &= \left[-\frac{1}{2x(1+x^2)}\right] + \int \frac{-1}{2x^2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

On écrit la nouvelle fraction rationnelle en éléments simples :

$$\frac{1}{-2x^2(1+x^2)} = \frac{-1/2}{x^2} + \frac{1/2}{1+x^2}$$

Le premier terme s'intègre comme $\dfrac{1/2}{x}$ et le second comme $(1/2)\arctan(x)$. On trouve finalement :

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2x(1+x^2)} + \frac{1/2}{x} + (1/2)\arctan(x)$$

Corrigé 4 : La fonction F est dérivable sur tout intervalle de la forme $\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi; \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[$, et on a :

$$F'(t) = \frac{\operatorname{ch} t}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t}} + \sqrt{1+\tan^2 t} = 1 + \frac{1}{|\cos t|}$$

Corrigé 5 :
(i) On procède par intégration par parties (en dérivant la fonction $x \mapsto x$). On a :

$$\int x\sqrt{1+x}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x(1+x)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\int (1+x)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x(1+x)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(1+x)^{\frac{5}{2}} + C$$

(ii) On intègre trois fois par parties (en dérivant la fonction $x \mapsto x$), ou alors directement par identification. On trouve finalement :

$$\int x^3 e^{2x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^3 e^{2x} - \frac{3}{4}x^2 e^{2x} + \frac{3}{4}x e^{2x} - \frac{3}{8}e^{2x} + C$$

(iii) On fait le changement de variable $u = x^3$, puis on intègre en sachant que la primitive de $\ln(x)$ est $x\ln(x) - x$. On a alors :

$$\int^x x^2\ln(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{9}\int^{x^3} \ln(u)\mathrm{d}u = \frac{1}{3}x^3\ln(x) - \frac{1}{9}x^3 + C$$

Corrigé 6 : On fait le changement de variable $u = a+b-x$, ce qui donne :

$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a (a+b-u)f(u)\mathrm{d}u = \int_a^b (a+b-u)f(u)\mathrm{d}u$$

D'où le résultat.

Corrigé 7 :
(i) On pose $x = 2\sin^2 u$. On a $\mathrm{d}x = 2\sin u\cos u\mathrm{d}u$. On trouve alors :

$$\int^x \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\mathrm{d}x = \int^{\arcsin\sqrt{x/2}} \frac{4\sin u\cos u}{\sqrt{2\sin^2 u(2-2\sin^2 u)}}\mathrm{d}u = 2\arcsin\sqrt{\frac{x}{2}} + C$$

(ii)

$$\int \frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{1+\cos u} = -\frac{1}{2}\tan\left(\frac{u}{2}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$$

(iii)

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\mathrm{d}x = -2\int \cos^2 \frac{u}{2}\mathrm{d}u = -\int (1+\cos u)\mathrm{d}u = -u-\sin u+C = -\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C$$

Corrigé 8 : On procède par intégration par partie. On trouve :

$$I_n = x\ln^n x - n\int \ln^{n-1} x\mathrm{d}x = x\ln^n x - nI_{n-1}$$

Et ainsi, on trouve par récurrence :

$$I_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!}(-1)^k x \ln^{n-k} x + C$$

Corrigé 9 : L'application $t \mapsto \dfrac{1}{2+\cos t}$ étant continue sur $\mathbb{R}$, elle admet une primitive sur $\mathbb{R}$. Posons $u = \tan(t/2)$. Sur un intervalle de la forme $I_n =](2n-1)\pi; (2n+1)\pi[$, on obtient après calculs :

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{2+\cos t} = \int \frac{2}{3+u^2}\mathrm{d}u = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right) + C$$

On a donc déterminé les primitives de notre fonction sur chaque intervalle I_n. Soit F une primitive sur tout $\mathbb{R}$. On connaît sa forme sur chaque I_n. On pose k_n la constante C intervenant dans l'expression précédente pour l'intervalle I_n. On a, d'après la continuité de F en $(2n+1)\pi$:

$$\frac{\pi}{\sqrt{3}} + k_n = -\frac{\pi}{\sqrt{3}} + k_{n+1}$$

Et donc k_n s'écrit de la forme :

$$(\forall n \in \mathbb{Z})\, k_n = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}n + k_0$$

On en déduit la forme des primitives de la fonction sur $\mathbb{R}$. Et finalement :

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{2+\cos t} = F(2\pi) - F(0) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

Corrigé 10 : La fonction F est définie sur tout $\mathbb{R}$. De plus, on a :

$$F(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^4+t^2+1}} = -\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^4+t^2+1}} = -F(x)$$

Donc la fonction F est donc impaire. De plus, F est dérivable de dérivée :

$$F'(x) = f(x) = \frac{2}{\sqrt{16x^4+4x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$$

Et f est du signe de $-12x^4+3$. La fonction F est donc croissante sur $\left[\frac{-1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ et décroissante sur $\left]-\infty;\frac{-1}{\sqrt{2}}\right]\cup\left[\frac{1}{\sqrt{2}};+\infty\right[$.
Pour $x>0$, on a :

$$0\leq F(x)\leq\frac{2x-x}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$$

Ainsi, par théorème d'encadrement, et comme F est impaire, on déduit :

$$\lim_{x\to\pm\infty}F(x)=0$$

Corrigé 11 : On vérifie facilement que $t\mapsto\frac{1}{\ln t}-\frac{1}{t\ln t}$ a une limite finie en 1, donc est bornée au voisinage de 1. On déduit ainsi :

$$\lim_{x\to 1}\int_x^{x^2}\left(\frac{1}{\ln t}-\frac{1}{t\ln t}\right)\mathrm{d}t=0$$

De plus, on a :

$$\int_x^{x^2}\frac{1}{t\ln t}\mathrm{d}t=\ln(\ln x^2)-\ln(\ln x)=\ln 2$$

Donc la limite cherchée est $\ln 2$.

Corrigé 12 : La fonction sin est concave sur $[0;\pi]$, donc pour tout $x\in[0;1]$, on a :

$$(\forall t\in[x;3x])\ \frac{\sin x}{x}t\leq\sin t\leq t$$

Puis, en divisant par t^2 (qui est positif) et en intégrant entre x et $3x$, on obtient :

$$\ln 3\frac{\sin x}{x}\leq f(x)\leq\ln 3$$

Et ainsi, par théorème d'encadrement : $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\ln 3$.

Corrigé 13 : Utilisons la relation de Chasles pour simplifier l'expression de F :

$$\begin{aligned}F(x)&=\int_0^x\min(x,t)f(t)\mathrm{d}t+\int_x^1\min(x,t)f(t)\mathrm{d}t\\&=\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t+x\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Comme f est continue, les applications $x\mapsto\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$ et $x\mapsto\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t$ sont de classe C^1, de dérivées respectives $x\mapsto xf(x)$ et $x\mapsto -f(x)$. La fonction F est donc de classe C^1, et sa dérivée est :

$$x\mapsto xf(x)+\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t-xf(x)=\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t$$

Comme cette fonction est aussi C^1, alors F est bien de classe C^2. De plus, on aura :

$$F(x)=\int_0^x F'(u)\mathrm{d}u+F(0)=\int_0^x\left(\int_u^1 f(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u$$

6.2 Propriétés générales de l'intégration

Corrigé 14 :
(i) La fonction f est continue sur $[a;b]$, donc l'image de $[a;b]$ par f est un segment $[m;M]$. En utilisant la compatibilité de l'intégrale avec les relations d'ordre, on a :

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b m\mathrm{d}x \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b M\mathrm{d}x = M$$

Ainsi, $\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right) \in [m;M] = f([a;b])$. Il existe donc $c \in [a;b]$ tel que : $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.
(ii) On suppose par l'absurde qu'un tel c ne peut pas être pris dans $]a;b[$. On a alors :

$$(\forall x \in]a;b[)\, f(x) \neq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

On définit alors la fonction ϕ sur $[a;b]$ par :

$$\phi(x) = f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Cette fonction ϕ est continue et ne s'annule pas. Donc par le théorème des valeurs intermédiaires, elle est soit toujours strictement positive, soit toujours strictement négative. Ceci est impossible, car on voit facilement que $\int_a^b \phi(x)\mathrm{d}x = 0$. D'où la contradiction.

Corrigé 15 : Il suffit de dissocier les cas selon le signe de la première intégrale. Par exemple, si $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$. Alors l'égalité de l'énoncé devient : $\int_a^b (|f(x)| - f(x))\,\mathrm{d}x = 0$. Or, on a : $(\forall x \in [a;b])\, |f(x)| - f(x) \geq 0$. De plus l'application $x \mapsto |f(x)| - f(x)$ est continue. Ainsi, on a une fonction continue positive d'intégrale nulle : elle est donc identiquement nulle. Ainsi, on a : $(\forall x \in [a;b])\, |f(x)| - f(x) = 0$, donc f est bien de signe constant.
On fait le même raisonnement si $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq 0$ (ou alors on applique directement le résultat précédent à la fonction $x \mapsto -f(x)$).

Corrigé 16 : On note $M = \sup\limits_{x\in[a;b]} f(x)$ et $u_n = \left[\int_a^b f(x)^n\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{n}}$.
Comme : $(\forall x \in [a;b])\, 0 \leq f(x) \leq M$, on déduit déjà que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\, u_n \leq M \cdot (b-a)^{\frac{1}{n}}$$

Ensuite, comme la fonction f est continue sur $[a;b]$, on déduit qu'il existe un point $c \in [a;b]$ tel que $f(c) = M$. On se donne $\varepsilon > 0$. La continuité de f implique qu'il existe un segment $[\alpha;\beta] \subset [a,b]$ contenant c tel que : $(\forall x \in [\alpha;\beta])\, f(x) \geq M - \frac{\varepsilon}{2}$. On aura ainsi :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\, u_n \geq (M - \frac{\varepsilon}{2}) \cdot (\beta - \alpha)^{\frac{1}{n}}$$

Ainsi, en combinant les inégalités, on obtient (en posant $\beta - \alpha = \eta > 0$) :

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \eta > 0)\,(\forall n \in \mathbb{N}^*)\, M \cdot (b-a)^{\frac{1}{n}} \geq u_n \geq (M - \frac{\varepsilon}{2}) \cdot \eta^{\frac{1}{n}}$$

Ainsi, pour n suffisamment grand, comme $\lim_{n\to+\infty} \eta^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} (b-a)^{\frac{1}{n}} = 1$, on aura :

$$(M+\varepsilon) \geq u_n \geq (M-\varepsilon)$$

Comme ceci est vrai pour tout ε, alors on déduit que la suite (u_n) converge vers M.

Corrigé 17 :
(i) On considère $(a = x_0, x_1, \ldots, x_{p-1}, x_p = b)$ une subdivision adaptée à ϕ, et on note ξ_i la valeur prise par ϕ sur $]x_i; x_{i+1}[$. On a alors :

$$u_n = \int_a^b \phi(x) \cdot \sin(nx)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{p-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \xi_i \cdot \sin(nx)\mathrm{d}x$$

Or, on a :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \xi_i \cdot \sin(nx)\mathrm{d}x = \frac{\xi_i}{n}(\cos(nx_i) - \cos(nx_{i+1})) \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

Ainsi, comme on a une somme finie de termes tendant tous vers 0, on déduit finalement que u_n tend bien vers 0.
(ii) On considère f une fonction continue par morceaux. Soit $\varepsilon > 0$. On peut approcher f par une fonction en escalier ψ de telle sorte que :

$$\int_a^b |f(x) - \psi(x)|\mathrm{d}x \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

On aura alors :

$$\left| \int_a^b f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x - \int_a^b \psi(x)\sin(nx)\mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f(x) - \psi(x)||\sin(nx)|\mathrm{d}x \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

De plus, en appliquant le (i) à la fonction ψ, on en déduit que pour n suffisamment grand :

$$n \geq N \Rightarrow \left| \int_a^b \psi(x)\sin(nx)\mathrm{d}x \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Et finalement, en regroupant ces deux inégalités :

$$n \geq N \Rightarrow \left| \int_a^b f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x \right| \leq \left| \int_a^b \psi(x)\sin(nx)\mathrm{d}x \right| + \left| \int_a^b f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x - \int_a^b \psi(x)\sin(nx)\mathrm{d}x \right| \leq \varepsilon$$

Corrigé 18 : Regardons tout d'abord ce qui se passe sur une fonction constante. Par linéarité de l'intégrale, regardons le pour la fonction constante de valeur 1. Si l'on pose k la partie entière de $\dfrac{n(b-a)}{\pi}$, on a :

$$\begin{aligned}
\int_a^b |\sin(nt)|\mathrm{d}t &= \sum_{l=0}^{k-1} \int_{a+l\frac{\pi}{n}}^{a+(l+1)\frac{\pi}{n}} |\sin(nt)|\mathrm{d}t + \int_{a+k\frac{\pi}{n}}^{b} |\sin(nt)|\mathrm{d}t \\
&= \frac{k}{n} \int_0^{\pi} |\sin(t)|\mathrm{d}t + \int_{a+k\frac{\pi}{n}}^{b} |\sin(nt)|\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

On remarque ensuite que le premier terme tend vers $\frac{2}{\pi}(b-a)$ et le second vers 0.
On fait ensuite le même constat pour toute fonction ϕ en escaliers, en faisant le même calcul sur une subdivision adaptée. On obtient alors :

$$\int_a^b \phi(t)|\sin(nt)|\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_a^b \phi(t)\mathrm{d}t$$

On déduit ensuite le résultat pour toute fonction continue par morceaux en l'encadrant suffisamment près par des fonctions en escalier.

Corrigé 19 :
(i) La fonction f étant continue sur $[a;b]$, son image est un segment $[m;M]$ dont les bornes sont atteintes. De plus, comme g est positive, on déduit que :

$$(\forall x \in [a;b])\, m \cdot g(x) \leq f(x) \cdot g(x) \leq M \cdot g(x)$$

En intégrant, on déduit que :

$$m \cdot \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x) \cdot g(x)\mathrm{d}x \leq M \cdot \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

Ainsi, il existe $k \in [m : M]$ tel que :

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)\mathrm{d}x = k \cdot \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

(on a ici supposé l'intégrale de g non nulle, car sinon g est nulle et le résultat est évident car tout c convient)
Comme k est dans le segment image $[m;M]$, alors il existe un $c \in [a;b]$ tel que $k = f(c)$, d'où le résultat.
(ii) Si la fonction f est constante, le résultat est évident. Sinon, montrons que la constante k définie ci dessus est nécessairement dans $]m;M[$.
En effet, supposons par exemple que $k = m$, c'est-à-dire que $\int_a^b f(x)\cdot g(x)\mathrm{d}x = m\cdot \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.
Alors la fonction $x \mapsto f(x)g(x) - mg(x)$ (qui est positive comme g est positive, et par définition de m) est d'intégrale nulle. Cette fonction est donc nulle. Ceci est en contradiction avec le fait que g est strictement positive et que f n'est pas constante.
On aura donc : $k \in]m;M[$. Il suffit alors d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires entre deux points où f atteint son maximum. On obtient un $c \in]a;b[$ tel que $k = f(x)$, d'où le résultat.

Corrigé 20 : Pour cet exercice, l'idée est de découper le segment $[0;1]$ judicieusement. On veut obtenir que sur chaque partie découpée, l'intégrale à calculer tendra vers 0.
Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue avec $f(1) = 0$, alors il existe $\eta > 0$ tel que :

$$x \in [1-\eta;1] \Rightarrow |f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

En intégrant sur cet intervalle, on obtient :

$$\left|n\int_{1-\eta}^1 x^n \cdot f(x)\mathrm{d}x\right| \leq n\frac{\varepsilon}{2}\int_{1-\eta}^1 x^n\mathrm{d}x \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

De plus, la continuité de f lui impose d'être majoré sur $[0;1-\eta]$ par un M. On aura alors :

$$\left|n\int_0^{1-\eta} x^n \cdot f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \frac{n}{n+1}M(1-\eta)^{n+1}$$

Cette dernière quantité tend vers 0 (comme $|1-\eta|<1$). Ainsi, pour n assez grand, on peut la majorer par $\frac{\varepsilon}{2}$.
Finalement, la relation de Chasles nous permet de dire que, pour n assez grand, on a :

$$\left|n\int_0^1 x^n \cdot f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \left|n\int_0^{1-\eta} x^n \cdot f(x)\mathrm{d}x\right| + \left|n\int_{1-\eta}^1 x^n \cdot f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \varepsilon$$

Corrigé 21 : La stricte positivité de f impose déjà que :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \geq 0$$

Ceci justifie l'existence de la borne inférieure. Pour la déterminer précisément, on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \geq \left(\int_a^b \frac{\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(x)}}\mathrm{d}x\right)^2 = (b-a)^2$$

La condition d'égalité est imposée par celle dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz : il faut et il suffit qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\sqrt{f} = \lambda\frac{1}{\sqrt{f}}$, c'est-à-dire si et seulement si f est constante.

Corrigé 22 : L'inégalité de Cauchy-Schwarz nous dit que :

$$\int_a^b fg \leq \left(\int_a^b f^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b g^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

En appliquant ce résultat dans le développement de $(f+g)^2$, on déduit :

$$\int_a^b (f+g)^2 \leq \int_a^b f^2 + \int_a^b g^2 + 2\left(\int_a^b f^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b g^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Et finalement on obtient l'inégalité cherchée. On a égalité si et seulement s'il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz. C'est le cas si et seulement si f et g sont positivement proportionnelles, c'est-à-dire :

$$\left(\exists\lambda \in \mathbb{R}^+\right) g = \lambda f \text{ ou } f = \lambda g$$

Corrigé 23 : Par l'absurde, supposons que $f \neq 0$. Soit $x_0 \in [a;b]$ tel que $f(x_0) \neq 0$. Par exemple, supposons que $f(x_0) > 0$. Comme f est continue, il existe un intervalle $[\alpha;\beta]$ non réduit à un point et contenant x_0 tel que :

$$(\forall x \in [\alpha;\beta])\, f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$$

Alors on a :

$$\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x \geq (\beta-\alpha)\frac{f(x_0)}{2} > 0$$

D'où le résultat cherché.
On pouvait aussi considérer la fonction $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, qui est constante. Donc $f(x) = F'(x) = 0$.

Corrigé 24 : On considère ϕ l'unique fonction affine de E. Soit f une fonction quelconque de E. On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz à f' et ϕ' :

$$\left(\int_a^b f'(t)\phi'(t)\mathrm{d}t\right)^2 \leq \int_a^b f'^2(t)\mathrm{d}t \int_a^b \phi'^2(t)\mathrm{d}t$$

Or, on connaît explicitement ϕ. En particulier, ϕ' est constante de valeur : $\dfrac{\beta-\alpha}{b-a}$. On peut donc simplifier certaines des intégrales précédentes :

$$\int_a^b f'(t)\phi'(t)\mathrm{d}t = \frac{\beta-\alpha}{b-a}\int_a^b f'(t)\mathrm{d}t = \frac{(\beta-\alpha)^2}{b-a}$$

$$\int_a^b \phi'^2(t)\mathrm{d}t = \frac{(\beta-\alpha)^2}{b-a}$$

Ainsi, si $\beta \neq \alpha$, on obtient :

$$\int_a^b f'^2(t)\mathrm{d}t \geq \frac{(\beta-\alpha)^2}{b-a} = \int_a^b \phi'^2(t)\mathrm{d}t$$

D'où le résultat si $\beta \neq \alpha$. Le résultat est évident si $\beta = \alpha$.

Corrigé 25 : La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$, c'est aussi le cas de f^{-1}, d'où l'existence de $\displaystyle\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\mathrm{d}t$.
On a aussi que $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ est dérivable de dérivée f, et $x \mapsto \displaystyle\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\mathrm{d}t$ est dérivable de dérivée $x \mapsto f'(x)\cdot f^{-1}(f(x)) = xf'(x)$. On en déduit que la dérivée de F est :

$$F'(x) = f(x) + xf'(x) - xf'(x) - f(x) = 0$$

La fonction F est donc constante sur $\mathbb{R}$, avec :

$$(\forall x \in \mathbb{R})\, F(x) = F(0) = 0$$

Géométriquement, la première intégrale correspond à l'aire du domaine entre la courbe de f, l'axe Ox et la droite verticale passant par $(x, 0)$. La deuxième intégrale correspond à l'aire du domaine entre la courbe de f, l'axe Oy et la droite horizontale passant par $(0, f(x))$. En sommant ces deux aires, on trouve le rectangle entre l'axe Ox, l'axe Oy, la droite verticale passant par $(x, 0)$ et la droite horizontale passant par $(0, f(x))$. Comme le point $(x, f(x))$ appartient à ces deux droites, on obtient un rectangle d'aire $xf(x)$. D'où le résultat.

Corrigé 26 : L'équation s'écrit, après avoir développé sous le signe d'intégration :

$$f(x) - x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t = x^2$$

On déduit donc par récurrence que, si f vérifie l'équation fonctionnelle, alors elle est de classe C^∞. En dérivant l'équation, on obtient :

$$f'(x) - xf(x) - \int_0^x f(t)\mathrm{d}t + xf(x) = 2x$$

Puis en dérivant à nouveau :

$$f''(x) - f(x) = 2$$

Les solutions sont du type :

$$\lambda e^x + \mu e^{-x} - 2$$

Comme $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$, on déduit que :

$$f(x) = e^x + e^{-x} - 2$$

On vérifie que c'est bien une solution de l'équation.

Corrigé 27 : La fonction nulle est solution. Supposons donc qu'une fonction f non nulle soit solution. Posons en particulier $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) \neq 0$. On a alors :

$$(\forall x \in \mathbb{R})\, f(x) = \frac{1}{f(x_0)} \int_{x-x_0}^{x+x_0} f(t)\mathrm{d}t$$

On en déduit par récurrence que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. En dérivant l'équation fonctionnelle par rapport à x puis y, on trouve :

$$\begin{aligned} f'(x)f(y) &= f(x+y) - f(x-y) \\ f''(x)f(y) &= f'(x+y) - f'(x-y) \\ f(x)f'(y) &= f(x+y) + f(x-y) \\ f(x)f''(y) &= f'(x+y) - f'(x-y) \end{aligned}$$

Ainsi, on déduit que :

$$f''(x)f(y) = f(x)f''(y)$$

La fonction f est donc solution de l'équation différentielle :

$$f''(x) - \frac{f''(x_0)}{f(x_0)} f(x) = 0$$

En remarquant que de plus $f(0) = 0$, on déduit que les solutions sont de l'une des formes suivantes :

$$x \mapsto k\mathrm{sh}\,\omega x, \qquad x \mapsto k \sin \omega x, \qquad x \mapsto kx$$

En regardant les fonctions de ce type qui vérifient l'équation, on déduit que les solutions sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \frac{2}{\omega}\mathrm{sh}\,\omega x, \qquad x \mapsto \frac{2}{\omega}\sin \omega x, \qquad x \mapsto 2x \qquad \text{et} \qquad x \mapsto 0 \qquad (\omega \in \mathbb{R}^*)$$

Corrigé 28 : Soit $G = \displaystyle\int_a^x g(t)\mathrm{d}t$. G est de classe C^1 sur I et on peut donc écrire :

$$\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t = f(b)G(b) - \int_a^b f'(t)G(t)\mathrm{d}t$$

Comme G est continue sur le segment I, elle est bornée et on note $[m; M]$ son ensemble image. On a :

$$(\forall t \in I)\, m \leq G(t) \leq M \qquad \text{et} \qquad f'(t) \leq 0$$

Donc :

$$(\forall t \in I)\, Mf'(t) \leq f'(t)G(t) \leq mf'(t)$$

Puis en intégrant sur I :

$$M\left(f(b) - f(a)\right) \leq \int_a^b f'(t)G(t)\mathrm{d}t \leq m\left(f(b) - f(a)\right)$$

Et finalement :

$$\begin{aligned} mf(a) &\leq f(b)G(b) + m\left(f(a) - f(b)\right) \\ &\leq \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t \\ &\leq M\left(f(a) - f(b)\right) + f(b)G(b) \\ &\leq Mf(a) \end{aligned}$$

Si $f(a) = 0$, comme f est positive décroissante, alors f est nulle. L'égalité cherchée est alors évidente, et tou élément $c \in I$ convient.
Sinon, alors $f(a) \neq 0$ et on a :

$$m \leq \frac{\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t}{f(a)} \leq M$$

Donc, comme $G(I) = [m; M]$, on déduit l'existence du c cherché.

Corrigé 29 : Soit F une primitive de f. On voit facilement que F est aussi T-périodique. Pour $\lambda \neq 0$, on a :

$$\int_a^b f(\lambda x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}\left(F(b\lambda) - F(a\lambda)\right)$$

Comme F est continue et T-périodique, elle est bornée sur $\mathbb{R}$, donc on a bien le résultat voulu.
Si on a $\displaystyle\int_0^T f(t) \neq 0$, alors on définit la fonction g par :

$$(\forall x \in \mathbb{R})\, g(x) = f(x) - \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$$

Le résultat précédent assure que :

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b g(\lambda x)\mathrm{d}x = 0$$

Et finalement :

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(\lambda x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$$

Corrigé 30 : La fonction F est dérivable, de dérivée négative. Elle est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme F est positive décroissante, avec $F(0) = 0$, alors elle est identiquement nulle. Ainsi, on déduit que $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ est aussi nulle, donc que f est nulle.

Corrigé 31 : On pose :

$$\phi(x) = c + \int_0^x u(t)v(t)\mathrm{d}t$$

La fonction ϕ est dérivable, et :

$$\phi'(x) = u(x)v(x) \leq \phi(x)v(x)$$

On a donc :

$$\left[\phi(x)\exp\left(-\int_0^x v(t)\mathrm{d}t\right)\right]' \leq 0$$

Donc :

$$\phi(x)\exp\left(-\int_0^x v(t)\mathrm{d}t\right) - \phi(0) \leq 0$$

Et finalement :

$$u(x) \leq \phi(x) \leq c\exp\left(\int_0^x v(t)\mathrm{d}t\right)$$

Corrigé 32 : Soit g la fonction définie par :

$$(\forall x \in \mathbb{R})\, g(x) = f'(x) + f(x)$$

La fonction f, solution de l'équation différentielle $y' + y = g(x)$, s'écrit donc :

$$f(x) = e^{-x}\left(f(0) + \int_0^x e^t g(t)\mathrm{d}t\right)$$

On a déjà : $\lim_{x\to\infty} e^{-x}f(0) = 0$. Il reste donc à étudier le second terme ci-dessus.
Soit $\varepsilon > 0$, il existe $A > 0$ tel que :

$$t \geq A \Rightarrow |g(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Et alors, pour $x \geq A$:

$$\left|\int_0^x e^{-x+t}g(t)\mathrm{d}t\right| \leq \left|\int_0^A e^{-x+t}g(t)\mathrm{d}t\right| + \left|\int_A^x e^{-x+t}g(t)\mathrm{d}t\right|$$

On voit directement que le premier terme tend vers 0, donc pour $x \geq B$ suffisamment grand on aura :

$$\left|\int_0^A e^{-x+t}g(t)\mathrm{d}t\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Pour le seconde terme, on a directement la majoration :

$$\left|\int_A^x e^{-x+t}g(t)\mathrm{d}t\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}\left|\int_A^x e^{-x+t}\mathrm{d}t\right| = \frac{\varepsilon}{2}[1 - e^{A-x}] \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Et finalement, pour $x \geq \max(A, B)$:

$$\left|e^{-x}\int_0^x e^t g(t)\mathrm{d}t\right| \leq \varepsilon$$

D'où le résultat cherché.

6.3 Séries de Riemann

Corrigé 33 : On découpe l'intervalle $[-1;1]$ en faisant apparaître des cosinus. Soit $n \geq 1$. On pose $\theta_k = \dfrac{k\pi}{n}$. On considère la somme de Riemann :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1-\cos(\theta_k)^2} \cdot (\cos(\theta_k) - \cos(\theta_{k+1}) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \sin(\theta_k) \cdot (\cos(\theta_k) - \cos(\theta_{k+1}) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{n}\right) + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \right) \end{aligned}$$

(on a utilisé les formules pour exprimer un produit de fonction circulaires en somme)

Les deux premières sommes sont nulles. C'est un résultat classique. Pour le démontrer, on peut introduire la somme avec des cosinus au lieu des sinus. En sommant la somme et cosinus et i fois celle des sinus, on retrouve une somme d'exponentielle : en y reconnaissant une somme de terme d'une suite géométrique, on déduit la nullité de chaque somme utilisée. On a donc finalement :

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on déduit que S_n tend vers $\dfrac{\pi}{2}$: c'est la valeur de l'intégrale que l'on cherchait.

Corrigé 34 : Dans cet exercice, on reconnaît des sommes de Riemann. Les suites convergeront donc vers l'intégrale d'une fonction bien choisie.

(i) La suite converge vers $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}$

(ii) La suite converge vers $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$

(iii) La suite converge vers $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$

(iv) On a $u_n = e^{S_n}$, avec $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)$. La somme S_n converge vers $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^2)\mathrm{d}x$. En procédant par intégration par partie, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln(1+x^2)\mathrm{d}x &= [x \cdot \ln(1+x^2)]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x \\ &= \ln(2) - 2 \cdot \left(\int_0^1 \frac{1+x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x \right) \\ &= \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Et finalement, la suite u_n converge vers $2e^{-2+\frac{\pi}{2}}$.

Corrigé 35 : Réécrivons tout d'abord u_n de telle sorte à faire apparaître ce qui ressemble à une somme de Riemann :

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}}$$

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est concinue croissante sur $[0;1[$. On a donc, pour tout $k \in \{1,\ldots,n-1\}$:

$$\left(\forall x \in \left[\frac{k-1}{n};\frac{k}{n}\right]\right) \qquad \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{k-1}{n}\right)^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}}$$

En intégrant sur $\left[\dfrac{k-1}{n};\dfrac{k}{n}\right]$, puis en sommant sur $k \in \{1,\ldots,n-1\}$, on déduit l'inégalité :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{k-1}{n}\right)^2}} \leq \int_0^{\frac{n-1}{n}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}}$$

Et finalement :

$$u_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}} \leq \arcsin\left(\frac{n-1}{n}\right) \leq u_n$$

On a donc :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \arcsin\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Corrigé 36 : Soit $\varepsilon > 0$ Comme f est dérivable en 0, alors il existe $\eta > 0$ tel que :

$$x \leq \eta \Rightarrow \left|\frac{f(x)-f(0)}{x} - f'(0)\right| = \left|\frac{f(x)}{x} - f'(0)\right| \leq \varepsilon$$

Or, pour n suffisamment grand, on aura :

$$(\forall k \in \{0,\ldots,n\})\ \frac{1}{n+kp} \leq \eta$$

Et on aura ainsi, pour n suffisamment grand :

$$\left|\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{1}{n+kp}\right) - \left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+kp}\right) f'(0)\right| \leq \varepsilon\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+kp}\right) \leq \varepsilon$$

Ainsi, u_n a même limite que $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+kp}\right) f'(0)$. En reconnaissant une somme de Riemann, on déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+kp} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+px} = \frac{\ln(1+p)}{p}$$

Et finalement :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{\ln(1+p)}{p}\cdot f'(0)$$

6.4 Intégrales dépendant d'un paramètre

Corrigé 37 :

(i) Soit $f(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{t}{t^4+t^2+1}\mathrm{d}t$.

L'application $t \mapsto t^2$ n'étant pas bijective de $\mathbb{R}$ dans $[0, +\infty[$, il faut distinguer deux cas :

- Pour $x \leq 0$, en effectuant le changement de variables $u = t^2$, on obtient :

$$f(x) = -\frac{1}{2}\int_{x^2}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u+u^2} = -\frac{1}{2}\int_{x^2}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{\frac{3}{4}+(u+1/2)^2}$$

On utilise $\arctan\left(\frac{x}{a}\right)' = \dfrac{1}{a}\dfrac{1}{1+(x/a)^2} = \frac{a}{a^2+x^2}$ et donc :

$$f(x) = -\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x^2+\frac{1}{2}\right)\right)\right)$$

- Pour $x \geq 0$, on a :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{-x} \frac{t}{t^4+t^2+1}\mathrm{d}t + \int_{-x}^{x} \frac{t}{t^4+t^2+1}\mathrm{d}t$$

Comme la fonction $t \mapsto \dfrac{t}{t^4+t^2+1}$ est impaire, l'intégrale $\displaystyle\int_{-x}^{x} \frac{t}{t^4+t^2+1}dt$ est nulle et donc $f(x) = f(-x)$.

(ii) Le seul problème à étudier est le comportement au voisinage de $t = \dfrac{\pi}{4}$. On pose donc $g(t) = \dfrac{1}{4cos^4 t - 1}$. On étudie le développement asymptotique au voisinage de $t = \dfrac{\pi}{4}$ de g. On a :

$$g(t) = \frac{1}{(\sqrt{2}\cos t - 1)(\sqrt{2}\cos t + 1)(2\cos^2 t + 1)}.$$

Au voisinage de $\dfrac{\pi}{4}$, on a :

$$\sqrt{2}\cos t + 1 \sim 2 \qquad 2\cos^2 t + 1 \sim 2$$

$$\sqrt{2}\cos t - 1 = \sqrt{2}\cos\left(t - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) - 1 = \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right) - 1 \sim -\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$$

Le comportement de $g(t)$ au voisinage de $t = \dfrac{\pi}{4}$ est donc le même que celui de $\dfrac{1}{-4u}$ au voisinage de 0, l'intégrale considérée est donc divergente.

(iii) On étudie les limites lorsque A tend vers $+\infty$ et ε tend vers 0 de $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{A} \frac{\ln(x)}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$. On a, après une intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\int_{\varepsilon}^{A} \frac{\ln(x)}{(1+x)^2}dx &= \left[\frac{-\ln(x)}{1+x}\right]_{\varepsilon}^{A} + \int_{\varepsilon}^{A} \frac{\mathrm{d}x}{x(1+x)} \\
&= \frac{-\ln(A)}{1+A} + \frac{\ln(\varepsilon)}{1+\varepsilon} + \ln\left(\frac{A}{A+1}\right) - \ln\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}\right) \\
&= \frac{-\ln A}{1+A} + \ln\left(\frac{A}{A+1}\right) - \frac{\varepsilon\ln\varepsilon}{1+\varepsilon} - \ln(\varepsilon+1)
\end{aligned}$$

Cette quantité tend vers 0 lorsque A tend vers $+\infty$ et ε vers 0. Donc l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\ln(x)}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$ est convergente et vaut 0.

(iv) Soit $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{2x^2-1}}$ et $I = \displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$.

Au voisinage de $+\infty$, on a : $f(x) \sim \dfrac{1}{\sqrt{2}x^2}$ et au voisinage de $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, on a : $f(x) \sim \dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{2}x-1}}$ (même comportement que $\frac{1}{\sqrt{x}}$ en 0). L'intégrale est donc convergente. En faisant le changement de variable $u = \dfrac{1}{\sqrt{2}x}$, on obtient :

$$I = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2}$$

Corrigé 38 : Au voisinage de $t = 0$ on a :

$$t^{\alpha-1}e^{-t} \sim t^{\alpha-1}$$

Donc l'intégrale converge en 0 si et seulement si $\alpha > 0$.
Pour $\alpha > 0$, on a $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 t^{\alpha-1}e^{-t} = 0$. Il existe donc $A > 0$ tel que pour tout $t > A$, on ait : $t^{\alpha-1}e^{-t} < \dfrac{1}{t^2}$. Comme l'intégrale $\displaystyle\int_A^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ est convergente, on en déduit que $\displaystyle\int_A^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ est convergente.

Corrigé 39 :
(i) On a :

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=2}^{[x]-1} \int_{k-\frac{1}{k^3}}^{k+\frac{1}{k^3}} \frac{k}{2}\,\mathrm{d}t + \int_{[x]-\frac{1}{[x]^3}}^{x} f(t)\mathrm{d}t$$

La valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{[x]-\frac{1}{[x]^3}}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ dépend de la position de x par rapport à $[x] + \dfrac{1}{[x]^3}$ et à $[x] + 1 - \dfrac{1}{([x]+1)^3}$. Cependant, on a toujours :

$$0 \leq \int_{[x]-\frac{1}{[x]^3}}^{x} f(t)\mathrm{d}t \leq \int_{[x]-\frac{1}{[x]^3}}^{[x]+1} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{[x]^2} + \frac{1}{2([x]+1)^2}$$

Comme $\displaystyle\int_{k-\frac{1}{k^3}}^{k+\frac{1}{k^3}} \frac{k}{2}\mathrm{d}t = \frac{1}{k^2}$, on obtient donc :

$$S_{[x]-1} \leq 1 + \int_0^x f(t)\,dt \leq S_{[x]+1}$$

(ii) La fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ est croissante (car f est positive) et majorée (puisque $S_{[x]+1}$ l'est). Elle admet donc une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$ et donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ est convergente. Par les inégalités précédentes, on a même :

$$\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} - 1 = \frac{\pi^2}{6} - 1$$

Montrons que $f(x)$ n'a pas de limite lorsque x tend vers $+\infty$. On pose $x_n = n$ et $y_n = n + \frac{2}{n^3}$. Par définition de f, on a $f(x_n) = \dfrac{n}{2}$ et $f(y_n) = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(y_n) = 0$. La fonction f n'admet pas de limite lorsque x tend vers $+\infty$.

Corrigé 40 : Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\mathrm{d}x = 1$ et donc a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx = 1$.
Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ et donc $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = 0$.

Corrigé 41 : La fonction $\dfrac{\ln(x)}{x}$ est la dérivée de la fonction $\frac{1}{2}(\ln(x))^2$, qui tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0 ou vers $+\infty$. Ainsi, on a :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon}^{1} \frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{A\to+\infty} \int_{1}^{A} \frac{\log(x)}{x} dx = +\infty$$

L'intégrale est donc divergente. On pouvait le voir aussi en notant que $1/x$ n'était pas intégrable en 0 et en $+\infty$, et que multiplier par $\ln x$ accentuait davantage cette divergence.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, en effectuant le changement de variable $u = \frac{1}{x}$, on obtient $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x = -\int_{1}^{n} \frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x$ et donc :

$$\int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x = 0$$

Corrigé 42 :
(i) La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue donc f est dérivable et :

$$f'(x) = 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t = 2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-u^2x^2}\mathrm{d}u$$

Soit $g(t,x) = \dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$. On a alors :

$$\frac{\partial}{\partial x} g(t,x) = -2xe^{-x^2(1+t^2)}$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$ les fonctions $t \mapsto g(t,x)$ et $t \mapsto \dfrac{\partial}{\partial x} g(t,x)$ sont continues et intégrables sur $[0,1]$.
Soit $a > 0$. Alors, pour tout $x \in [-a,a]$ et pour tout $t \in [0,1]$, on a : $\left|\dfrac{\partial}{\partial x} g(t,x)\right| \leq 2ae^{-a^2(1+t^2)}$, qui est indépendante de x et intégrable sur $[0,1]$.
Ainsi, par le théorème de dérivation, pour tout $a > 0$, la fonction g est dérivable sur $[-a,a]$, donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$g'(x) = -2x \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\mathrm{d}t$$

(ii) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la question (i) donne $f'(x) + g'(x) = 0$ et donc $f + g$ est constante et :

$$f(0) + g(0) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

(iii) Pour $t \in]0,1]$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} g(t,x) = 0$ et pour tout $x \geq 0$, $|g(t,x)| \leq \dfrac{1}{1+t^2}$ qui est indépendante de x et intégrable sur $[0,1]$. Ainsi, le théorème de convergence dominée donne :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \left(\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t\right)^2$, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Corrigé 43 : On note $\mathbf{1}_{[1,(1+\frac{1}{n})^n]}$ la fonction caractéristique de l'intervalle $\left[1,(1+\frac{1}{n})^n\right]$. On écrit :

$$\int_1^{(1+\frac{1}{n})^n} x^{\frac{1}{n}} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[1,(1+\frac{1}{n})^n]}(x) x^{\frac{1}{n}} f(x)\mathrm{d}x$$

On applique le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions $f_n(x) = \mathbf{1}_{[1,(1+\frac{1}{n})^n]}(x) x^{\frac{1}{n}} f(x)$:
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in [1,e] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $|f_n(x)| \leq e \cdot \mathbf{1}_{[1,e]}(x) \cdot \sup\limits_{t\in[1,e]} |f(t)|$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^e f(x)\mathrm{d}x$.

Corrigé 44 :
(i) La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc intégrable en 0. Pour $A > 0$, une intégration par parties donne :

$$\int_0^A \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \frac{1-\cos(A)}{A} + \int_0^A \frac{1-\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t.$$

Comme $t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est convergente.
(ii) On pose $g(t,x) = \dfrac{e^{-xt}(1-\cos t)}{t^2}$. On a :
- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et $t \in \mathbb{R}_+$: $|g(t,x)| \leq \left|\dfrac{1-\cos(t)}{t^2}\right|$
- La fonction $\left|\dfrac{1-\cos(t)}{t^2}\right|$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
Comme pour tout $t \geq 0$, la fonction $x \mapsto g(t,x)$ est continue, la fonction g est continue par le théorème de continuité.
(iii) Pour $t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto g(t,x)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\frac{\partial}{\partial x} g(t,x) = -\frac{(1-\cos t)}{t} e^{-xt} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2} g(t,x) = (1-\cos(t)) e^{-xt}$$

Par ailleurs, pour tout $a > 0$ et pour tout $x \in [a,+\infty[$, on a :

$$\left|\frac{\partial}{\partial x} g(t,x)\right| \leq \left|\frac{1-\cos(t)}{t}\right| e^{-at} \text{ et } \left|\frac{\partial^2}{\partial x^2} g(t,x)\right| \leq 2e^{-at}$$

Les fonctions $\left|\dfrac{1-\cos(t)}{t}\right| e^{-at}$ et $2e^{-at}$ sont indépendantes de x et intégrables sur $\mathbb{R}_+$.
Ainsi, par le théorème de dérivation, la fonction g est de classe C^2 sur $[a,+\infty[$ pour tout $a>0$ et par suite elle est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$ et on a :

$$g''(x)=\int_0^{+\infty}(1-\cos t)e^{-xt}\mathrm{d}t$$

(iii) Pour $t>0$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} g(t,x)=0$ et pour tout $x\in[1,+\infty[$, on a $|g(t,x)|\leq\left|\dfrac{1-\cos t}{t^2}\right|$.
Le théorème de convergence dominée donne alors :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$$

(iv) Par intégration par parties, pour $x>0$, on obtient :

$$g''(x)=\frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-xt}\sin t\mathrm{d}t=\frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty} e^{-xt}\cos t\mathrm{d}t$$

Ainsi, on a $x^2g''(x)=-g''(x)+\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\mathrm{d}t$ ce qui donne $g''(x)=\dfrac{1}{x(x^2+1)}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{x^2+1}$.
On en déduit $g'(x)=\ln(x)-\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)+a$, où a est une constante.
On calcule une primitive de $\ln(x^2+1)$ par intégration par parties :

$$\int_0^x \ln(t^2+1)\mathrm{d}t=\left[t\ln(t^2+1)\right]_0^x-2\int_0^x\frac{t^2}{t^2+1}\mathrm{d}t=x\ln(x^2+1)-2x+2\arctan(x)$$

Une primitive de $\ln x$ est $x\ln x-x$ (calcul du même type).
Finalement, pour $x>0$, on obtient :

$$g(x)=x\ln(x)-\frac{1}{2}x\ln(1+x^2)-\arctan(x)+ax+b$$

où a et b sont des constantes. Par (iii), on a $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$ ce qui donne $a=0$ et $b=\dfrac{\pi}{2}$.
(v) La fonction g est continue en 0. En utilisant le calcul fait en (i), on obtient :

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}$$

(vi) Il s'agit de montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left|\frac{\sin t}{t}\right|\mathrm{d}t$ est divergente. Soit $N\in\mathbb{N}$. On écrit :

$$\int_0^N\left|\frac{\sin t}{t}\right|\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{N-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\left|\frac{\sin t}{t}\right|\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{N-1}\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t+k\pi}dt$$

Or, on a :

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t+k\pi}dt\geq\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\sin t}{t+k\pi}dt\geq\frac{1}{2(\frac{3\pi}{4}+k\pi)}$$

et ceci est le terme général d'une série divergente. Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left|\frac{\sin t}{t}\right|\mathrm{d}t$ est divergente.

Corrigé 45 :
(i) On pose veut montrer que pour $s>0$ l'intégrale suivante est bien définie :

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} e^{-t}\cdot t^{s-1}\mathrm{d}t$$

Les seuls éventuels problèmes d'intégration sont en 0 et en $+\infty$. On pose $g(s,t)=e^{-t}\cdot t^{s-1}$, et étudions g pour t au voisinage de 0 et de $+\infty$. Comme g est positive, alors il ne sera pas nécessaire de regarder les cas où elle n'est pas intégrable (en effet, l'intégrale de g est convergente si et seulement si elle est intégrable) :
- en 0 : $g(s,t)\sim t^{s-1}$, qui est intégrable si et seulement si $s>0$.
- en $+\infty$: $g(s,t)=e^{-t}\cdot t^{s-1}=\mathrm{o}\left(t^{-2}\right)$, qui est intégrable.
Ainsi, l'intégrale $\Gamma(s)$ est bien convergente pour $s>0$.

(ii) Soit $s\in[\alpha;\beta]\subset]0;+\infty[$. La fonction g est de classe C^∞ par rapport à s, et continue par morceaux. De plus, pour tout $k\in\mathbb{N}$, on a :

$$\frac{\partial^k g}{\partial s^k}=\ln(t)^k\cdot g(s,t)$$

Enfin, on a l'hypothèse de domination suivante :

$$(\forall s\in[\alpha;\beta])(\forall t\in]0;+\infty[)\left|\frac{\partial^k g}{\partial s^k}\right|\leq|\ln(t)|^k\cdot e^{-t}\cdot\left(t^{\alpha-1}+t^{\beta-1}\right)=\phi(t)$$

On vérifie facilement que la fonction ϕ est intégrable sur $]0;+\infty[$: le théorème de dérivation des intégrales à paramètre nous dit que la fonction Γ est de classe C^∞. De plus, ses dérivées successives sont données par :

$$\Gamma^{(k)}(s)=\int_0^{+\infty}\ln(t)^k\cdot e^{-t}\cdot t^{s-1}\mathrm{d}t$$

Enfin, pour s tendant vers 0, on a :

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} e^{-t}\cdot t^{s-1}\mathrm{d}t\geq\int_0^1 e^{-t}\cdot t^{s-1}\mathrm{d}t\geq\int_0^1 e^{-1}\cdot t^{s-1}\mathrm{d}t\geq\frac{e^{-1}}{s}\overset{s\to 0}{\longrightarrow}+\infty$$

(iii) Soit $s>0$, et on considère le segment $[a,A]\subset]0;+\infty[$. Par intégration par parties, on trouve :

$$\int_a^A e^{-t}\cdot t^s\mathrm{d}t=\left[-e^{-t}\cdot t^s\right]_a^A+s\cdot\int_a^A e^{-t}\cdot t^{s-1}\mathrm{d}t$$

En faisant tendre a et A respectivement vers 0 et $+\infty$, on déduit l'égalité cherchée :

$$\Gamma(s+1)=s\cdot\Gamma(s)$$

En particulier, comme $\Gamma(1)=1$, on déduit :

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ \Gamma(n)=(n-1)!$$

(iv) Pour $s>0$ on pose :

$$I_n(s)=\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{s-1}\mathrm{d}t$$

On pose : $f_n(s,t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{s-1} \cdot 1_{]0;n]}$ (où 1_A désigne la fonction caractéristique de l'ensemble A).

Pour n tendant vers $+\infty$, la suite de fonction $f_n(s,t)$ converge simplement vers la fonction $g(s,t)$. De plus, l'inégalité classique $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}$ valable pour $t \in [0;n]$ implique qu'on a l'hypothèse de domination suivante :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \ \ |f_n(s,t)| \leq g(s,t)$$

Comme $g(s,t)$ est intégrable, on en déduit par le théorème de convergence dominée que :

$$\lim_{n \to +\infty} I_n = \Gamma(s)$$

Pour simplifier les calculs, posons :

$$B_n(s) = \frac{I_n(s)}{n^s} = \int_0^1 (1-t)^n \cdot t^{s-1} \mathrm{d}t$$

En faisant une intégration par parties, on trouve :

$$B_n(s) = \frac{n}{s} \cdot B_{n-1}(s+1)$$

En itérant ce processus, et en constatant que $B_0(s) = \frac{1}{s}$, on déduit la formule :

$$B_n(s) = \frac{n!}{s(s+1)\dots(s+n)}$$

Et finalement :

$$I_n = \frac{n! \cdot n^s}{s(s+1)\dots(s+n)}$$

Et on retrouve donc la formule de Gauss :

$$\Gamma(s) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n! \cdot n^s}{s(s+1)\dots(s+n)}$$

(v) Pour $s > 1$, on pose $\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$. On peut réécrire la fonction Γ en faisant le changement de variable $u = nt$:

$$\Gamma(s) = n^s \cdot \int_0^{+\infty} e^{-nt} t^{s-1} \mathrm{d}t$$

On déduit les égalités :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t \cdot (1 - e^{-t})} \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \sum_{n \geq 0} \frac{t^{s-1}}{e^t} \cdot e^{-nt} \mathrm{d}t$$
$$= \int_0^{+\infty} \sum_{n \geq 1} t^{s-1} \cdot e^{-nt} \mathrm{d}t = \sum_{n \geq 1} \int_0^{+\infty} t^{s-1} \cdot e^{-nt} \mathrm{d}t$$

(on a pu intervertir somme et intégrale car on a la convergence normale de la série)

$$= \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} \cdot \Gamma(s) = \zeta(s) \cdot \Gamma(s)$$

D'où le résultat cherché.

6.5 Formules de Taylor

Corrigé 46 : Notons $f(x) = \ln(x+1)$. On a :

$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$

Comme on a $x > 0$, alors :

$$(\forall t \in [0, x]) \left|f'''(t)\right| \leq 2$$

Ainsi, l'inégalité de Taylor-Lagrange nous donne que :

$$\left|\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}\right| \leq \frac{x^3}{3}$$

Ainsi, une valeur à 10^{-8} près de $\ln(1,003)$ est $0,0029955$.

Corrigé 47 : On écrit trois fois la formule à l'ordre n de Taylor-Young en x :

$$\begin{aligned}
f(x+h) &= f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + h^3\varepsilon(h)\\
f(x+2h) &= f(x) + 2hf'(x) + 4\frac{h^2}{2}f''(x) + 8\frac{h^3}{6}f'''(x) + 8h^3\varepsilon(2h)\\
f(x+3h) &= f(x) + 3hf'(x) + 9\frac{h^2}{2}f''(x) + 27\frac{h^3}{6}f'''(x) + 27h^3\varepsilon(3h)
\end{aligned}$$

D'où :

$$\frac{1}{h^3}\left(f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x)\right) \underset{h\to 0}{\to} f'''(x)$$

La limite cherchée est donc $f'''(x)$.

Corrigé 48 : On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange à f : Soit h un réel quelconque :

$$\left|f(x+h) - f(x) - hf'(x)\right| \leq \frac{h^2}{2}M$$

Ainsi, on a :

$$(\forall h \in \mathbb{R})\, 0 \leq f(x+h) \leq f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}M$$

Le trinôme du second degré en h :

$$h^2M + 2hf'(x) + 2f(x)$$

est toujours positif, donc son discriminant est négatif, soit : $f'(x)^2 - 2f(x)M \leq 0$. Donc, comme f et M sont positifs :

$$(\forall x \in \mathbb{R})\, |f'(x)| \leq \sqrt{2Mf(x)}$$

Corrigé 49 : Soit $h \in \mathbb{R}$ tel que f soit bien définir sur $[x_0; x_0+h]$. Alors :

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + h^n\varepsilon(h)$$

Pour h au voisinage de 0, $f(x_0+h)-f(x_0)-hf'(x_0)$ est donc du signe de $\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0)$.
Si n est pair, la courbe reste toujours du même côté de la tangente au voisinage de x_0.
Si n est impair, la courbe traverse sa tangente, et on a un point d'inflexion.

Corrigé 50 :
(i) La fonction f'' est continue en x, donc il existe $\eta>0$ tel que :

$$(\forall t\in[x-\eta;x+\eta])\ f''(t)\neq 0$$

Le théorème des accroissements finis assure l'existence du θ cherché.
Supposons par l'absurde que deux nombres θ_1 et θ_2 vérifient cette condition. Alors on aurait :

$$f'(x+\theta_1 h)=f'(x+\theta_2 h)$$

Et donc f'' s'annulerait nécessairement, d'où l'unicité.
(ii) On applique la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 au point x, et à f' celle à l'ordre 1.
On a :

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+h^2\varepsilon_1(h)$$
$$f'(x+k)=f'(x)+kf''(x)+k\varepsilon_2(k)$$

On a donc :

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\theta_x(h)h^2f''(x)+\theta_x(h)h^2\varepsilon_2(\theta_x(h)h)$$

Et on obtient finalement :

$$\theta_x(h)f''(x)=\frac{1}{2}f''(x)+\varepsilon_1(h)-\theta_x(h)\varepsilon\theta_x(h)h)$$

D'où :

$$\lim_{h\to 0}\theta_x(h)=\frac{1}{2}$$

Corrigé 51 : Comme $(b-a)\neq 0$, alors on peut forcément trouver λ tel que $\phi(a)=\phi(b)$, c'est-à-dire tel que :

$$f(b)=f(a)+\sum_{k=1}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\lambda$$

C'est simplement la résolution d'une équation affine de pente non nulle (qui a donc une et une seule solution).
On peut ensuite appliquer le théorème de Rolle à ϕ entre a et b. On a : $(\exists c\in]a;b[)\ \phi'(c)=0$.
Après calculs, on trouve :

$$\phi'(x)=\frac{(b-x)^n}{n!}\left[f^{(n+1)}(x)-\lambda\right]$$

D'où :

$$\lambda=f^{(n+1)}(c)$$

Ce qui était le résultat cherché.

Corrigé 52 :

(i) Pour $n=0$, on écrit $f(x)=f(0)+\displaystyle\int_0^x f'(u)\mathrm{d}u=f(0)+x\int_0^1 f'(tx)\mathrm{d}t$. Le résultat s'obtient par récurrence en effectuant une intégration par parties de $\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(tx)\mathrm{d}t$.

(ii) Soit $g(x)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$. Comme f et $x\mapsto \dfrac{1}{x}$ sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}-\{0\}$, la fonction g est C^∞ sur $\mathbb{R}-\{0\}$.

Il suffit de montrer que g est de classe C^∞ au voisinage de 0, c'est-à-dire sur un segment $[-a,a]$ avec $a>0$. On écrit $g(x)=\displaystyle\int_0^1 g(t,x)\mathrm{d}t$ avec $g(t,x)=f'(tx)$. On montre par récurrence sur k que g est de classe C^k sur $[-a,a]$ en utilisant le théorème de dérivation :

Pour tout $t\in[0,1]$, la fonction $g(t,\cdot):x\mapsto f'(tx)$ est de classe C^∞ et $\dfrac{\partial^k}{\partial x^k}g(t,x)=t^k f^{(k+1)}(tx)$.

Pour tout $x\in[-a,a]$ et tout $k\in\mathbb{N}$, la fonction $t\mapsto \dfrac{\partial^k}{\partial x^k}g(t,x)$ est continue et intégrable sur $[0,1]$.

Pour tout $x\in[-a,a]$ et $t\in[0,1]$, on a $\left|\dfrac{\partial^k}{\partial x^k}g(t,x)\right|\leq t^k \displaystyle\sup_{u\in[-a,a]}|f^{(k+1)}(u)|=h_k(t)$ et la fonction h_k est intégrable sur $[0,1]$.

Pour $k=0$, le théorème de continuité donne la continuité de g. Si l'on suppose (hypothèse de récurrence) que g est C^k avec $g^{(k)}(x)=\displaystyle\int_0^1 \frac{\partial^k}{\partial x^k}g(t,x)dt$, le théorème de dérivation pour $\dfrac{\partial^k}{\partial x^k}g(t,x)$, dont les hypothèses sont vérifiée par ce qui précède, appliqué à $k+1$ donne alors g est classe C^{k+1} sur $[-a,a]$.

Ceci est valable pour tout $a>0$ et $k\in\mathbb{N}$, on obtient donc g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.