TD 2 : Équations non linéaires

1 La méthode de dichotomie

Exercice 1. Suites adjacentes On considère deux suites $(u_n), (v_n)$ adjacentes, c'est-à-dire que ce sont des suites réelles telles que :
— (u_n) est croissante ;
— (v_n) est décroissante ;
— la suite $(u_n - v_n)$ tend vers 0.

1. Montrer que u_n est croissante majorée, donc qu'elle converge.
2. Montrer que v_n est décroissante minorée, donc qu'elle converge.
3. En déduire que (u_n) et (v_n) sont convergente et ont même limite.

Exercice 2. Définition séquentielle de la continuité On rappelle que, étant donnés une fonction réelle $f : I \to \mathbb{R}$ et un point $a \in I$, la fonction f est dite continue en a si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ |x - a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon.$$

De même, on rappelle que, étant donnés une suite réelle u_n et un réel l, la suite u_n a pour limite l si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon.$$

Montrer l'équivalence entre les propriétés suivantes :

1. la fonction f est continue en a ;
2. pour toute suite (u_n) tendant vers a, la suite $(f(u_n))$ tend vers $f(a)$.

On pourra montrer séparément les deux implications en montrant d'abord que $(1) \Rightarrow (2)$ et que $\neg(1) \Rightarrow \neg(2)$ (où l'assertion "$\neg A$" est la négation de l'assertion "A").

Exercice 3. Limite et adhérence On considère une suite (u_n) à valeur réelles qui converge vers une limite l, et on se donne a, b deux réels.

1. Montrer que l'on a l'implication : $[\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq b] \Rightarrow l \leq b$. On pourra faire un raisonnement par l'absurde en supposant que $l > b$.
2. En déduire que l'on a l'implication : $[\forall n \in \mathbb{N}, u_n < b] \Rightarrow l \leq b$. Que dire de l'implication $[\forall n \in \mathbb{N}, u_n < b] \Rightarrow l < b$.
3. En déduire que, si toutes les valeurs de (u_n) sont dans l'intervalle $[a, b]$, alors l est aussi dans $[a; b]$.

4. Justifier que le résultat précédent est vrai si l'on suppose que les valeurs de (u_n) sont dans $[a;b]$ seulement "à partir d'un certain rang", c'est-à-dire que :

$$\exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow u_n \in [a;b].$$

Exercice 4. Méthode de de dichotomie On se donne $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue (qui a une limite en tout point). On suppose qu'il existe $a, b \in I$ tels que $a < b$ et $f(a) < 0 < f(b)$. On veut montrer que f s'annule en un point, et on veut construire un encadrement de ce point. Pour cela, on construit les suites $(u_n), (v_n)$ par $u_0 = a$, $v_0 = b$:

— si $f(\frac{u_n+v_n}{2}) > 0$: $u_{n+1} = u_n$ et $v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$;
— si $f(\frac{u_n+v_n}{2}) = 0$: $u_{n+1} = v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$;
— si $f(\frac{u_n+v_n}{2}) < 0$: $u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$ et $v_{n+1} = v_n$.

1. Montrer que les suites $(u_n), (v_n)$ sont adjacentes. En particulier, que se passe-t-il lorsque la fonction f s'annule en $\frac{u_n+v_n}{2}$ pour un certain n.
2. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite qu'on notera l dans la suite.
3. En étudiant le signe des suites $(f(u_n))$ et $(f(v_n))$, en déduire que l est une racine de la fonction f. On pourra pour cela montrer que ces deux suites sont convergentes vers une même limite.

Exercice 5. Théorème des valeurs intermédiaires On considère f une fonction continue sur un intervalle I, et à valeurs réelles.

1. À l'aide de l'exercice précédent, montrer que, s'il existe $a, b \in I$ tels que $f(a) \cdot f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ possède une solution sur I (on donnera même un intervalle plus précis que I dans lequel se trouve cette solution).
2. Soient $a, b \in I$ avec $a < b$, et k entre $f(a)$ et $f(b)$ (c'est-à-dire $k \in [f(a); f(b)]$ ou $[f(b); f(a)]$ selon que $f(a) \leq f(b)$ ou $f(b) \leq f(a)$). À l'aide de la question précédente, montrer que l'équation $f(x) = k$ possède une solution sur $[a;b]$.
3. Sur le modèle de l'exercice précédent, et suivant les mêmes notations que ci-dessus, proposer une construction récursive de deux suites adjacentes convergent vers une solution de l'équation $f(x) = k$. Combien de termes faut-il calculer pour avoir une estimation à 10^{-10} de cette solution ?

2 Méthodes itératives

Exercice 6. Théorème du point fixe (1). Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ une contraction, c'est-à-dire qu'il existe $k < 1$ tel que $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ pour tous $x, y \in [a,b]$. On veut montrer que f possède un unique point fixe.

— Montrer que, si f possède un point fixe, alors celui-ci est unique.

— Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in [a;b]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que cette suite est de Cauchy, et en déduire que f admet un point fixe.

— Si l'on note l l'unique point fixe de f, alors majorer la quantité $|u_n - l|$ par k. En particulier, si l'on veut connaître l à ϵ près, combien faut-il calculer de termes pour la suite (u_n) ? On pourra pour cela donner le lien entre les quantités $|u_{n+1} - u_n|$ et $|u_n - l|$.

Exercice 7. Théorème du point fixe (2). Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ une contraction, c'est-à-dire qu'il existe $k < 1$ tel que $|f(x) - f(y)| \leq k|x-y|$ pour tous $x, y \in [a,b]$. On rappelle qu'il existe alors un unique point fixe pour f, que l'on note ℓ, et que pour tout $u_0 \in [a,b]$, la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers ℓ.

— Montrer que le nombre de décimales de u_n coïncidant avec celles du point fixe $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$ augmente (au moins) proportionnellement à n quand n croît (*convergence linéaire*).

— Si l'on suppose de plus que f est de classe $C^2([a,b])$ et que $f'(\ell) = 0$, montrer que le nombre de décimales de u_n coïncidant avec celles de ℓ augmente beaucoup plus rapidement avec n : (au moins) comme 2^n (*convergence exponentielle*).
Indication : Utiliser la formule de Taylor avec reste à l'ordre 2.

Exercice 8. Calcul de $x^{1/4}$. On veut déterminer une valeur approchée de la racine quatrième d'un nombre réel positif. On commence par chercher une valeur approchée de $y = (1+x)^{1/4}$ pour $x \geq 0$.

— On suppose que $x = 1$ (donc $y = 2^{1/4}$).
Donner un polynôme $P(X)$ de degré 4, à coefficients entiers et tel que $P(y) = 0$.
Donner la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ obtenue en appliquant la méthode de Newton à P.
Donner une valeur u_0 pour laquelle la suite u_n converge vers y (justifier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour cette valeur de u_0).
Calculer u_4, en déduire un encadrement de $2^{1/4}$.
Peut-on appliquer la même méthode pour $x \geq 0$ quelconque ?

— On suppose que l'on a calculé $2^{1/4}$ à 10^{-16} près. Proposer une méthode permettant de calculer une valeur approchée de $x^{1/4}$ pour $x \geq 0$, en utilisant l'écriture mantisse-exposant de x en base 2 :

$$x = 2^e(1+m), \quad e \in \mathbb{Z}, m \in [0,1[$$

et en utilisant la méthode ci-dessus. Discuter la précision de l'approximation obtenue.

Exercice 9. Méthode de Newton. Utiliser la méthode de Newton pour résoudre l'équation

$$e^u - 2 = u \ , \ u > 0 \tag{1}$$

Justifier la convergence et donner une majoration théorique de l'erreur.
Combien d'itérations sont-elles nécessaires pour avoir une précision de 10^{-6} en prenant $x_0 = 1$ (comparer avec le résultat de l'exercice 8) ? Peut-on choisir $x_0 = 0$?

Exercice 10. Sécante avec point fixe. On considère f une fonction continue, strictement croissante et convexe sur $[a,b]$ telle que $f(a) \leq 0$ et $f(b) > 0$.

1. Justifier que f s'annule sur $[a,b]$ en un unique point, que l'on notera c.
2. On considère la suite (x_n) définie par :

$$\left\{ \begin{array}{c} x_0 = a \\ x_{n+1} = x_n - \frac{b-x_n}{f(b)-f(x_n)} f(x_n) \end{array} \right. .$$

   Dire "graphiquement" comment sont construits les termes de la suite (x_n) (on pourra s'aider du titre de l'exercice).
3. Montrer que la suite (x_n) est croissante, et en déduire qu'elle converge vers c.

3 Polynômes

Exercice 11. Théorème de Gauss–Lucas. On veut montrer que, étant donné P un polynôme à coefficients complexes, les zéros de P' sont "encadrés" par les zéros de P. Plus précisément, on veut montrer que tout zéro de P' s'exprime comme barycentre à coefficients positifs de zéros de P.

1. Montrer que, si P possède une racine de multiplicité au moins 2, alors il s'agit aussi d'une racine pour P'. En déduire que la propriété cherchée est vérifiée pour les racines de multiplicité 2 ou plus.
2. On suppose que $P(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - a_i)^{n_i}$, où les a_i sont des réels deux à deux distincts.
   – donner, avec leurs multiplicités, les racines de P' qui sont aussi des racines de P ;
   – montrer que, entre deux a_i consécutifs, il existe toujours une racine de P'. Combien de racines de P' obtient-on de cette manière ?
   – en raisonnant sur le degré de P', montrer que la propriété cherchée est bien vérifiée.
3. On suppose maintenant que $P(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - \alpha_i)^{n_i}$, où les α_i sont des complexes deux à deux distincts.
   – montrer que les racines de P de multiplicité 2 ou plus vérifient le résultat voulu ;
   – calculer le quotient $Q(z) = P'(z)/P(z)$;
   – étant donnée z une racine de P' qui n'est pas une racine de P, montrer que :

$$\sum_{i=1}^{n} n_i \frac{z - a_i}{|z - a_i|^2} = 0;$$

   – En déduire le résultat voulu.

Exercice 12. Méthode de Cardan. On considère le polynôme $P(x) = x^3 + a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

1. Vérifier que l'équation $P(x) = 0$ peut se ramener sous la forme $Q(z) = 0$, où z est de la forme $x + \alpha$ (pour α que l'on précisera) et Q de la forme $Q(z) = z^3 + pz + q$ pour $p, q \in \mathbb{R}$.
2. On pose z_1, z_2, z_3 tels que $Q(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$. Exprimer la quantité $\Delta = (z_1 - z_2)^2 \cdot (z_1 - z_2)^2 (z_2 - z_3)^2$ en fonction de p et q.
3. Montrer que le signe de Δ détermine la nature des racines de Q. Plus précisément, montrer que :
   - $\Delta = 0 \Leftrightarrow Q$ a une racine réelle double et une racine réelle simple ;
   - $\Delta > 0 \Leftrightarrow Q$ a trois racines réelles simples ;
   - $\Delta < 0 \Leftrightarrow Q$ a une racine réelle simples et deux racines complexes conjuguées.
4. Montrer que $z = u + v$ satisfait $Q(z) = 0$ si, et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u^3 + v^3 & = & -q \\ uv & = & -\frac{p}{3} \end{array} \right.$$

5. En posant $U = u^3$ et $V = v^3$, montrer que U et V sont racines d'un polynôme de degré 2.
6. En déduire les racines de Q.