Feuille de TD n°1

Exercice 15 : On considère l'équation cartésienne

$$x^2 + 4y^2 + 2xy = 4. \tag{1}$$

1. Suivant un résultat du cours, on sait que l'équation cartésienne de la forme

$$ax^2 + bxy + xy^2 + dx + ey + f = 0$$

est une conique, et plus précisément que c'est :
– une ellipse si, et seulement si, $b^2 - 4ac < 0$;
– une parabole si, et seulement si, $b^2 - 4ac = 0$;
– une hyperbole si, et seulement si, $b^2 - 4ac > 0$;
Ainsi, l'équation (1) est celle d'une ellipse.

2. On veut réduire l'équation (1) sous la forme

$$\frac{X^2}{A^2} + \frac{Y^2}{B^2} = 1 \tag{2}$$

où (X, Y) sont les coordonnées du point (x, y) par un changement de base orthonormée.

La première chose à constater est qu'il n'y a pas de termes en x ou y dans l'équation (1) : en particulier, le point $(0, 0)$ est le centre de l'ellipse qui nous intéresse. On peut aussi le voir car le changement de variable $(x, y) \mapsto (-x, -y)$ préserve l'équation (1) (donc l'ellipse).

Ainsi, le changement de base orthonormé cherché est une rotation. L'angle de la rotation est directement donné par un résultat dans le cours, qu'on redémontre ici.

Pour cela, considérons (X, Y) les coordonnées du point (x, y) après avoir effectué comme changement de base une rotation d'angle θ. On a les égalités :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} X & = & x \cdot \cos(\theta) + y \cdot \sin(\theta) \\ Y & = & y \cdot \cos(\theta) - x \cdot \sin(\theta) \end{array} \right. .$$

On réinjecte ces valeurs de X et Y dans l'équartion (2). Les équations (1) et (2) sont équivalentes si, et seulement si, les coefficients devant les termes en x^2, y^2 et xy sont les mêmes, c'est-à-dire :

$$\left\{ \begin{array}{lrcl} \text{(terme en } x^2\text{)} & \frac{\cos^2(\theta)}{A^2} + \frac{\sin^2(\theta)}{B^2} & = & \frac{1}{4} \\ \text{(terme en } y^2\text{)} & \frac{\sin^2(\theta)}{A^2} + \frac{\cos^2(\theta)}{B^2} & = & 1 \\ \text{(terme en } xy\text{)} & 2\cos(\theta)\sin(\theta)\left(\frac{1}{A^2} - \frac{1}{B^2}\right) & = & \frac{1}{2} \end{array} \right. .$$

C'est-à-dire finalement que :

$$\tan(2\theta) = -\frac{2}{3}$$

(en utilisant que $\sin(2\theta) = 2\cos(\theta)\sin(\theta)$ et $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$).

Notons au passage que le fait de fixer la valeur de $\tan(2\theta)$ nous donne une valeur de θ à un multiple de $\pi/2$ près, et que c'est tout à fait ce que l'on attendait. En effet, cela donne quatre possible valeurs de θ (à un multiple de 2π près), ce qui est cohérent avec les deux axes de symétrie de l'ellipse, qui donnent bien quatre angles possibles pour éliminer le terme en xy.

3. Reste à trouver les valeurs de A et B de l'équation (2). Pour cela, on utilise directement le système précédent d'équation, qui nous donne facilement :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2} & = & \frac{5}{4} \\ \frac{1}{A^2} - \frac{1}{B^2} & = & \frac{1}{2\sin(2\theta)} \end{array} \right. .$$

Reste donc à trouver la valeur de $\sin(2\theta)$, sachant que l'on connaît la valeur de $\tan(2\theta)$.

En général, on préfère que l'axe X porte le grand axe de l'ellipse (c'est-à-dire que $A^2 \geq B^2$). On privilégiera donc le choix d'une valeur de θ pour que $\sin(2\theta) \leq 0$). Et on choisit A et B positifs (pour qu'ils reflètent la longueur des deux axes de l'ellipse).

Posons $t = \tan(\theta)$. On a les égalités :

$$\tan(2\theta) = \frac{2t}{1-t^2} \qquad \text{et} \qquad \sin(2\theta) = \frac{2t}{1+t^2}.$$

La première égalité nous donne :

$$t = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

En réinjectant dans la seconde égalité, on déduit :

$$\sin(2\theta) = \pm\frac{2\sqrt{13}}{13} \simeq \pm 0.55.$$

On choisit donc $t = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$, et donc :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2} & = & \frac{5}{4} \\ \frac{1}{A^2} - \frac{1}{B^2} & = & -\frac{\sqrt{13}}{4} \end{array} \right. .$$

et on trouve finalement :

$$A = \sqrt{\frac{8}{5-\sqrt{13}}} \simeq 2.4 \qquad \text{et} \qquad B = \sqrt{\frac{8}{5+\sqrt{13}}} \simeq 0.96.$$

Pour alléger les notations, on continuera d'appeler A et B ces quantités dans la suite.

4. Pour donner l'équation paramétrique, on utilise ensuite que X et Y peuvent être donnés par :

$$(X(t), Y(t)) = (A\cos(t), B\sin(t)).$$

On en déduit alors x et y par rotation du repère d'angle $(-\theta)$, c'est-à-dire :

$$\left\{\begin{array}{rcccl} x(t) & = & X(t)\cos(\theta) - Y(t)\sin(\theta) & = & A\cos(t)\cos(\theta) - B\sin(t)\sin(\theta) \\ y(t) & = & Y(t)\cos(\theta) + X(t)\sin(\theta) & = & B\sin(t)\cos(\theta) + A\cos(t)\sin(\theta) \end{array}\right. .$$

Ici, on n'a pas cherché à expliciter les valeurs de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$, mais ce n'est pas trop compliqué. On connaît la valeur de $\tan(\theta) = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$, et il est alors facile d'en déduire la valeur de $\tan(\theta/2)$, puis celles de $\sin(\theta)$ et $\cos(\theta)$.

On peut remplacer x et y par les valeurs ci-dessus de $x(t)$ et $y(t)$ dans l'équation (1) pour vérifier que l'on n'a pas fait d'erreurs de calcul.

Au passage, on pouvait aussi faire le choix d'un paramétrage en coordonnées polaires. Suivant les résultats de l'exercice 14, il suffit de connaître les coordonnées d'un foyer F, l'équation de la directrice associée D, et l'excentricité e. Ils sont donnés par :

$$F = (c, 0), D : x = \frac{A^2}{c}, e = \frac{c}{A}$$

où $c = \sqrt{A^2 - B^2}$ (où on a bien pris garde à ce que $A > B$). Suivant les notations de l'exercice 14, on a ainsi $d = \frac{B^2}{c}$.

L'équation polaire dans le repère de centre F et d'angle θ est alors :

$$r(t) = \frac{ed}{1 + e\cos(t)} = \frac{B^2}{A + \sqrt{A^2 - B^2}\cos(t)}.$$

Un autre paramétrage polaire, avec origine en O, repose sur le fait que, comme O est le centre de l'ellipse, on peut faire un paramétrage avec $\rho(\theta) = \sqrt{x^2 + y^2}$. L'expression de ρ se déduit très facilement de l'équation (2), en notant t l'angle qui sert de paramétrage :

$$\rho(t) = \sqrt{X(t-\theta)^2 + Y(t-\theta)^2} = \sqrt{A^2\cos^2(t-\theta) + B^2\sin^2(t-\theta)}.$$

Enfin, disons que l'on peut faire une étude et un paramétrage beaucoup plus rapidement, mais qui donnent moins d'informations sur la conique.

On réécrit l'équation (1) des deux manières suivantes :

$$\left\{\begin{array}{rcl} (x+y)^2 + 3y^2 & = & 4 \\ \frac{3}{4}x^2 + (2y + \frac{x}{2})^2 & = & 4 \end{array}\right.$$

qui nous disent déjà que x et y sont bornés (par $\pm\frac{4}{\sqrt{3}}$ et $\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$ respectivement), et il est facile de voir que x (respectivement y) décrit tout l'intervalle $[-\frac{4}{\sqrt{3}}; \frac{4}{\sqrt{3}}]$ (respectivement

$[-\frac{2}{\sqrt{3}};\frac{2}{\sqrt{3}}]$). On en déduit donc directement que l'équation (1) est l'équation d'une ellipse (c'est la seule conique bornée), et qu'on peut choisir comme paramétrage :

$$y(t)=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin(t),\ t\in[-\pi/2;\pi/2].$$

En réinjectant dans l'équation, on voit facilement que l'on a :

$$x(t)=\frac{4}{\sqrt{3}}\sin(t\pm 2\pi/3),\ t\in[-\pi/2;\pi/2].$$

En constant que l'application $t\mapsto\pi-t$ échange $\sin(t+2\pi/3)$ en $\sin(t-2\pi/3)$, et change l'intervalle $[-\pi/2;\pi/2]$ en $[\pi/2;3\pi/2]$, on déduit finalement qu'on peut prendre comme paramétrage :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & \frac{4}{\sqrt{3}}\sin(t+2\pi/3) \\ y(t) & = & \frac{2}{\sqrt{3}}\sin(t) \end{array}\right.,\ t\in[-\pi/2;3\pi/2].$$

Notons enfin que les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ ci-dessus (vues comme des fonctions définies sur $\mathbb{R}$) sont 2π-périodiques. Ainsi, leur tracer est obtenu en les traçant sur n'importe quel intervalle de longueur 2π : c'est le cas de l'intervalle $[-\pi/2;3\pi/2]$, qu'on peut donc remplacer par $\mathbb{R}$ tout entier, ou n'importe quel autre intervalle de longueur 2π pour notre paramétrage.