Feuille de TD n°1

Exercice 0 . 13 :

On cherche les solutions sur $\mathbb{R}$ à l'équation :

$$\cos(3x) - \cos(x) = \sqrt{2}.$$

1. Exprimons d'abord $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$. On a :

$$\begin{array}{rcl}\cos(3x) & = & \mathcal{R}(e^{3ix}) = \mathcal{R}\left((\cos(x) + i \cdot \sin(x))^3\right) \\ & = & \cos^3(x) - 3\cos(x)\sin(x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)\end{array}$$

Ainsi, le problème initial revient à résoudre l'équation :

$$4\cos^3(x) - 4\cos(x) = \sqrt{2}.$$

2. On s'intéresse aux racines du polynôme $P(X) = 4X^3 - 4X - \sqrt{2}$, puisque notre problème est équivalent à résoudre $P(\cos(x)) = 0$.

Pour raisonner avec un polynôme à coefficients entiers, on préfère utiliser le polynôme :

$$Q(Y) = \frac{P(Y/\sqrt{2})}{\sqrt{2}} = Y^3 - 2Y - 1,$$

dont les racines sont liées à celles de P par l'équivalence :

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow Q(\sqrt{2} \cdot x) = 0.$$

Le polynôme Q a une racine évidente (à savoir -1), donc on peut factoriser $Q(Y)$ par $Y + 1$. On obtient :

$$Q(Y) = (Y + 1) \cdot (Y^2 - Y - 1).$$

Les racines du polynôme $Y^2 - Y - 1$ sont données (grâce au discriminant) par : $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

3. Revenons à notre problème initial. On a les équivalences suivantes :

$$\left[\cos(3x) - \cos(x) = \sqrt{2}\right] \Leftrightarrow [P(\cos(x)) = 0] \Leftrightarrow \left[Q(\sqrt{2} \cdot \cos(x)) = 0\right].$$

Suivant les valeurs trouvées précédemment pour les racines de Q, on en déduit l'équivalence :

$$\left[\cos(3x) - \cos(x) = \sqrt{2}\right] \Leftrightarrow \left[\cos(x) \in \left\{x \in \mathbb{R}, Q(\sqrt{2} \cdot x) = 0\right\} = \left\{\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\right\}\right].$$

Étant donné $x \in \mathbb{R}$, on a : $\cos(x) \in [-1;1]$. On peut ainsi éliminer la valeur $\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \simeq 1.14$ (les autres valeurs sont bien dans $[-1;1]$). Et on a finalement :

$$\left[\cos(3x) - \cos(x) = \sqrt{2}\right] \Leftrightarrow \left[\cos(x) \in \left\{\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\right\}\right].$$

4. La fonction cos réalise une bijection de $[0;\pi]$ sur $[-1;1]$, de réciproque Arccos. Ainsi, les deux seules valeurs possibles pour x dans l'intervalle $[0;\pi]$ sont données par :

$$\text{Arccos}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3\pi}{4} \qquad \text{et} \qquad \text{Arccos}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\right) = \alpha \simeq 0.64 \cdot \pi.$$

On en déduit l'ensemble solution trouvé sur tout $\mathbb{R}$, à savoir :

$$\left\{\pm\frac{3\pi}{4} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\pm\alpha + 2m\pi, m \in \mathbb{Z}\right\},$$

en utilisant que la fonction cos est paire, et 2π-périodique.