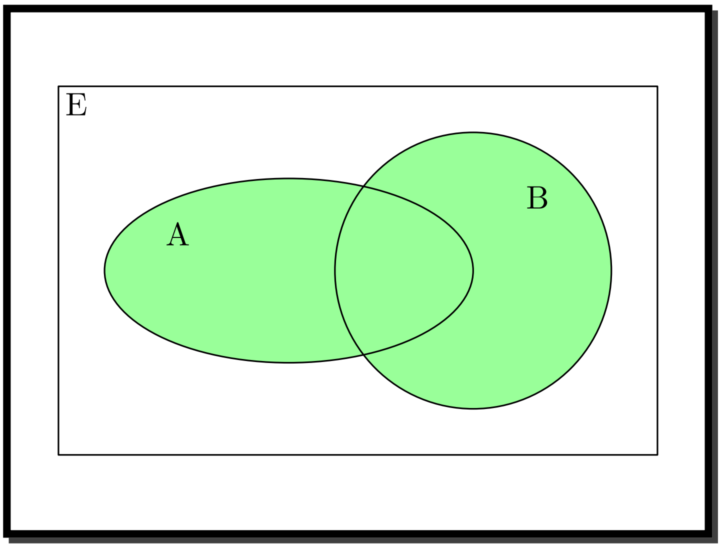
Université Grenoble Alpes

UE MAT101



Portail Mathématiques-Informatique

11 septembre 2018

TABLE DES MATIÈRES

AVERTISSEMENT AU LECTEUR

Ce polycopié est destiné aux étudiants de l'Unité d'Enseignement MAT101. Cette unité d'enseignement est obligatoire pour les étudiants entrant à l'Université Grenoble Alpes par le portail Mathématiques et Informatique.

Ce polycopié est un outil pédagogique qui vient *s'ajouter* au cours. Le point de vue du cours et celui du polycopié peuvent différer offrant deux façons d'aborder une même notion mathématique.

Ce texte reprend les notions mathématiques à la base mais s'appuie, notamment pour les exemples, sur les programmes de l'enseignement secondaire.

Les chapitres de ce polycopié se décomposent de la façon suivante :

1. Le cours contient les notions à assimiler. Il convient d'en apprendre les définitions et les énoncés des résultats principaux. Les démonstrations données doivent être *comprises*. Elles servent de modèle pour les exercices de raisonnement. C'est en comprenant les démonstrations, qu'on apprend à en rédiger.
2. La fiche de révision *n'*est *pas* la liste minimale des notions à connaître. Après avoir travaillé votre cours, lisez la fiche de révision : vous devez être capable de réciter chaque définition ou résultat de cette fiche sans la moindre hésitation (y compris l'énoncé des hypothèses éventuelles), sinon cela veut dire que vous devez relire attentivement le cours.
3. La partie entraînement comprend de nombreuses questions de style « vrai ou faux », où la bonne réponse est en général indiquée. L'étudiant consciencieux travaillera la justification de chacune de ces réponses. Rappelons que trouver la bonne réponse ne suffit pas en science, il faut aussi la justifier. Ces questions sont suivies d'une liste d'exercices dont certains sont traitées en travaux dirigés.
4. La partie complément est réservée aux lecteurs curieux qui veulent en savoir plus, notamment sur l'histoire des notions abordées.

PROGRAMME

Pré-requis pour cette UE : Programme de mathématiques du lycée, Terminale S.

Programme résumé :

A– Langage mathématique et notion de raisonnement.

— Éléments de logique : Logique de base, conjonction, disjonction, négation en termes de tables de vérité. Le sens de l'implication, de l'équivalence.

— Exemples de raisonnements : raisonnement direct, raisonnement par l'absurde, par disjonction de cas, raisonnement par récurrence, avec des exemples tirés du secondaire.

— Vocabulaire de la théorie naïve des ensembles, ensemble, appartenance, complémentaire, intersection, réunion, inclusion, égalité, égalité de couples, de n-uplets.

— Fonctions et applications : domaine de départ et d'arrivée, domaine de définition, graphe, image directe, image réciproque, restriction, composition, injections, surjections, bijections, notion de cardinal dans le cas fini (factorielle, coefficients binômiaux).

— Utilisation des quantificateurs : sens de «quel que soit», «il existe», illustration sur la définition de la limite d'une application, opérations élémentaires sur les limites (somme, produit, composition, la notion de limite sera approfondie au deuxième semestre). Notion d'effectivité dans un raisonnement d'existence (sur les exemples traités).

B– Géométrie du plan et de l'espace

— Géométrie vectorielle et affine : vecteurs, addition, multiplication par un scalaire, vecteurs colinéaires, vecteurs indépendants, représentation des vecteurs en coordonnées cartésiennes, représentations paramétriques et implicites de droites et de plans,

— Eléments de géométrie euclidienne : le produit scalaire et sa représentation en coordonnées cartésiennes, cosinus d'un angle de deux vecteurs, bases orthonormées directes ou indirectes, produit vectoriel et sa représentation en coordonnées cartésiennes, définition du produit mixte.

— Détermination des coordonnées d'un point ou d'un vecteur dans un repère orthonormé. Projection d'un point et d'un vecteur de l'espace sur un plan, d'un vecteur du plan sur une droite.

C– Les bases du calcul algébrique dans **R** *et* **C**

— Manipulation des symboles *sum* et *prod* illustrée par les formules à connaître : identités remarquables, formule du binôme de Newton, somme des premiers termes d'une suite arithmétique ou géométrique. Preuve d'identités par récurrence. Fonctions polynomiales.

— Les nombres complexes : forme algébrique, addition, multiplication, conjugaison, norme, forme trigonométrique, interprétation géométrique des nombres complexes, les formules d'Euler et de Moivre (formules d'addition pour cos et sin), racines carrées d'un nombre complexe, équation du second degré à coefficients complexes, représentation complexe des homothéties, translations, rotations, symétries dans le plan complexe.

Compétences visées :

Ce cours est destiné à tous les étudiants qui s'engagent vers l'informatique ou les mathématiques. Il couvre les pré-requis fondamentaux pour ces deux champs disciplinaires. En ce qui concerne la partie logique et langage mathématique, l'objectif est le renforcement des connaissances relative aux règles de la logique. Les exemples sont fournis par les nombres entiers, réels ou complexes introduits au collège et lycée. Pour les parties B et C, le but est l'apprentissage des notions de base de la géométrie indispensables pour les cours de physique, de mathématiques et d'informatique.

Les compétences à acquérir sont la capacité à rédiger un raisonnement élémentaire, la maîtrise de la notion d'ensemble et d'application et la capacité à utiliser les quantificateurs dans des situations simples, l'utilisation des vecteurs, droites et plans en petite dimension et la maîtrise des nombres complexes.

Langage mathématique

Agnès Coquio, Eric Dumas, Emmanuel Peyre et Bernard Ycart

Ce chapitre est une prise de contact avec le langage mathématique. Rien n'est totalement nouveau. Pour donner des exemples d'énoncés, nous ferons appel à quelques notions de base sur les nombres entiers, que vous connaissez vraisemblablement depuis longtemps.

Cours

1.1. Un peu de logique. — On peut voir le langage mathématique comme un jeu de construction, dont le but est de fournir la preuve de la validité d'énoncés. Une des contraintes de ce jeu est d'éviter toute ambiguïté dans les énoncés considérés. Chaque mot en mathématique a donc une signification précise.

Terminologie 1.1

Selon le cas, un énoncé mathématique pourra porter des noms différents.

— *Assertion :* c'est le terme que nous utiliserons le plus souvent pour désigner un énoncé dont on souhaite dire s'il est vrai ou faux ;
— *Théorème :* c'est un résultat important, dont on démontre ou on admet qu'il est vrai, et qui doit être connu par cœur ;
— *Proposition :* nous utiliserons ce terme pour désigner un résultat démontré, moins important qu'un théorème ;
— *Lemme :* c'est un résultat démontré, qui constitue une étape dans la démonstration d'un théorème ;
— *corollaire :* c'est une conséquence facile d'un théorème.

Dans ce cours les démonstrations se terminent par un carré blanc, plutôt que par le célèbre CQFD (« ce qu'il fallait démontrer »). Pour écrire formellement des énoncés mathématiques, on utilise des lettres représentant des concepts (nombres, ensembles, fonctions, vecteurs, matrices, polynômes. . .) avec des symboles logiques et des relations.

Le but de ce chapitre étant d'illustrer la manipulation du langage, il ne comportera aucune difficulté mathématique. Nous en resterons à des énoncés très simples, que l'on prendra soin de toujours traduire en langage courant pour bien les comprendre. Dans ce paragraphe, la lettre n désigne un entier naturel $(0, 1, 2, \ldots)$. Nous n'utiliserons que les symboles de comparaison $(<, >, \leqslant, \geqslant)$ et de divisibilité $(\mid)$. Rappelons que $m \mid n$ (« m divise n ») si n est égal au produit km pour un certain entier k.

$n < 5$	l'entier n est strictement inférieur à 5
$n \geqslant 3$	l'entier n est supérieur ou égal à 3
$n \mid 12$	l'entier n divise 12
$2 \mid n$	l'entier n est divisible par 2 (il est pair)

Notations 1.2

Pour combiner entre elles des assertions, on utilise les connecteurs de base suivants :
- la *négation* (« non »), notée $\neg$
- la *conjonction* (« et »), notée $\wedge$
- la *disjonction* (« ou »), notée $\vee$.

Exemples 1.3. — Voici quelques énoncés composés et leur traduction.

$\neg(n < 5)$	l'entier n n'est pas strictement inférieur à 5
$(n < 5) \wedge (2 \mid n)$	l'entier n est strictement inférieur à 5 et divisible par 2
$(2 \mid n) \vee (3 \mid n)$	l'entier n est divisible par 2 ou par 3

Observez l'usage des parenthèses qui permettent d'identifier les énoncés dont l'assertion est composée.

Le sens exact de ces connecteurs est donné à l'aide de *tables de vérité*. Il décrit l'effet des connecteurs sur deux assertions P et Q, selon qu'elles sont vraies (V) ou fausses (F), en disant dans chacun des 4 cas si l'assertion composée est elle-même vraie ou fausse.

		négation non	conjonction et	disjonction ou
P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	F

Dans la vie courante le mot « ou » a deux significations possibles : dans un menu de restaurant il est « exclusif » : parmi les entrées proposés, vous n'en choisissez qu'une seule. En mathématiques, par contre, le « ou » est toujours inclusif : P ou Q signifie que l'une *au moins* des deux assertions est vraie (peut-être les deux). Cela est clairement indiqué par la table de vérité ci-dessus. Par opposition, le « ou exclusif » est vrai quand exactement une des deux assertions est vraie.

A partir des connecteurs de base, on en fabrique d'autres, dont les plus importants sont l'*implication* et l'*équivalence*.

Définition 1.4

Pour des assertions P et Q, L'*implication* $P \Longrightarrow Q$ est définie comme $(\neg P) \vee Q$ (« non P ou Q »). L'*équivalence* $P \Longleftrightarrow Q$ est une double implication : $\big((P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow P)\big)$ (« P implique Q et Q implique P »).

Remarque 1.5. — Par définition, l'implication $P \Longrightarrow Q$ est vraie soit si P est fausse soit si P et Q sont vraies toutes les deux. Voici les tables de vérité des implications et de l'équivalence entre deux assertions P et Q. Constatez que l'équivalence $P \Longleftrightarrow Q$ est vraie quand P et Q sont toutes les deux vraies, ou bien toutes les deux fausses.

P	Q	$P \Longrightarrow Q$	$Q \Longrightarrow P$	$P \Longleftrightarrow Q$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Notons que si $P \Rightarrow Q$ et P sont vraies alors Q est vraie. Cela fait de l'implication la base du raisonnement mathématique : L'assertion Q est démontrée dès lors qu'on a démontré P et $P \Rightarrow Q$. L'équivalence intervient également fréquemment dans les raisonnements mathématique. Il est essentiel de bien les assimiler et de reconnaître toutes leurs formulations.

$P \Longrightarrow Q$
P implique Q
P entraîne Q
si P est vrai alors Q est vrai
pour que Q soit vrai il suffit que P le soit
P est une condition suffisante pour Q
pour que P soit vrai il faut que Q le soit
Q est une condition nécessaire pour P

Pour bien comprendre l'implication, reprenez chacune des formulations en remplaçant P par « $n > 3$ » et Q par « $n > 2$ ».

$P \Longleftrightarrow Q$
P est équivalent à Q
P équivaut à Q
P entraîne Q et réciproquement
si P est vrai alors Q est vrai et réciproquement
P est vrai si et seulement si Q est vrai
pour que P soit vrai il faut et il suffit que Q le soit
P est une condition nécessaire et suffisante pour Q

Pour bien comprendre l'équivalence, reprenez chacune des formulations en remplaçant P par « $n \geqslant 3$ » et Q par « $n > 2$ ».

Remarques 1.6. — i) Pour démontrer une implication $P \Rightarrow Q$, la technique la plus simple consiste à supposer l'assertion P et à faire un raisonnnement qui démontre Q. On parle de raisonnement *direct*. C'est le plus utilisé. Nous verrons plus tard d'autres méthodes (raisonnement par contraposée ou par l'absurde).

ii) Pour démontrer une équivalence $P \Leftrightarrow Q$, On peut, dans les cas faciles, démontrer une chaine d'équivalences

$$P \Leftrightarrow P_1 \Leftrightarrow P_2 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow P_n \Leftrightarrow Q$$

C'est souvent ainsi qu'on résoud un système d'équations par exemple.

Quand on ne peut pas faire ainsi, une méthode générale consiste à démontrer successivement une implication $P \Rightarrow Q$ puis sa *réciproque* $Q \Rightarrow P$. On introduit souvent la démonstration de la réciproque par le mot « réciproquement ».

Dans le cas des équations, on parle aussi d'*analyse* et *synthèse* : on démontre d'abord que les équations impliquent que les valeurs cherchées appartiennent à un certain ensemble ; c'est la phase d'*analyse* de l'équation. On vérifie ensuite que les solutions trouvées conviennent, c'est la phase de *synthèse*.

Définition 1.7

Une assertion composée est appelée une *tautologie* si elle est toujours vraie.

Exemple 1.8. — L'assertion $P \vee (\neg P)$ est une tautologie.

Les principales propriétés des connecteurs sont résumées dans le théorème suivant.

Théorème 1.9

Soient P, Q et R trois assertions. Les équivalences suivantes sont des tautologies.

- Commutativité :

(1) $$\big(P \wedge Q\big) \Longleftrightarrow \big(Q \wedge P\big)$$

« P et Q » équivaut à « Q et P »

(2) $$\big(P \vee Q\big) \Longleftrightarrow \big(Q \vee P\big)$$

« P ou Q » équivaut à « Q ou P »

- Associativité :

(3) $$\big(P \wedge (Q \wedge R)\big) \Longleftrightarrow \big((P \wedge Q) \wedge R\big)$$

« P et (Q et R) » équivaut à « (P et Q) et R »

(4) $$\big(P \vee (Q \vee R)\big) \Longleftrightarrow \big((P \vee Q) \vee R\big)$$

« P ou (Q ou R) » équivaut à « (P ou Q) ou R »

- Distributivité :

(5) $$\big(P \wedge (Q \vee R)\big) \Longleftrightarrow \big((P \wedge Q) \vee (P \wedge R)\big)$$

« P et (Q ou R) » équivaut à « (P et Q) ou (P et R) »

(6) $$\big(P \vee (Q \wedge R)\big) \Longleftrightarrow \big((P \vee Q) \wedge (P \vee R)\big)$$

« P ou (Q et R) » équivaut à « (P ou Q) et (P ou R) »

- Négations :

(7) $$\big(\neg(\neg P)\big) \Longleftrightarrow P$$

« non (non P) » équivaut à P

(8) $$\Big(\neg(P \vee Q)\Big) \Longleftrightarrow \Big((\neg P) \wedge (\neg Q)\Big)$$

« non (P ou Q) » équivaut à « (non P) et (non Q) »

(9) $$\Big(\neg(P \wedge Q)\Big) \Longleftrightarrow \Big((\neg P) \vee (\neg Q)\Big)$$

« non (P et Q) » équivaut à « (non P) ou (non Q) ».

Démonstration. — Pour démontrer l'équivalence de deux assertions, nous n'avons pas d'autre moyen pour l'instant que de vérifier que leurs tables de vérité coïncident : les deux assertions sont équivalentes si elles sont toujours soit toutes les deux vraies soit toutes les deux fausses. Voici la vérification pour (5).

$$P \wedge (Q \vee R) \Longleftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

L'équivalence est vraie car dans la table ci-dessous, les colonnes correspondant aux deux assertions sont identiques.

P	Q	R	$(Q \vee R)$	$P \wedge (Q \vee R)$	$(P \wedge Q)$	$(P \wedge R)$	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F	V
V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F	F	F
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier de même chacune des autres équivalences. □

On peut aussi remplacer P, Q et R par des énoncés sur les nombres entiers pour bien les comprendre (par exemple P par $(n \leqslant 6)$, Q par $(2 \mid n)$, R par $(3 \mid n)$).

La plupart des démonstrations mathématiques utilisent implicitement les tables de vérités. On remplace ainsi couramment dans une démonstration une assertion par une assertion qui lui est équivalente.

Proposition 1.10

Soient P, Q et R trois assertions. L'implication suivante est toujours vraie.

$$\Big((P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow R)\Big) \implies (P \Longrightarrow R). \tag{10}$$

Si P implique Q et Q implique R, alors P implique R.

On en déduit facilement la transitivité de l'équivalence :

Corollaire 1.11

Soient P, Q et R des assertions, l'énoncé suivant est toujours vrai

$$\Big((P \Longleftrightarrow Q) \wedge (Q \Longleftrightarrow R)\Big) \implies (P \Longleftrightarrow R).$$

Si P équivaut à Q et Q équivaut à R, alors P équivaut à R.

Démonstration. — Nous utilisons (une dernière fois) les tables de vérité, pour vérifier que quelles que soient les valeurs de vérité de P, Q et R, l'implication (10) est vraie.
Notons

- I_1 l'assertion $P \Longrightarrow Q$,
- I_2 l'assertion $Q \Longrightarrow R$,
- I_3 l'assertion $P \Longrightarrow R$.

P	Q	R	I_1	I_2	$I_1 \wedge I_2$	I_3	$(I_1 \wedge I_2) \Longrightarrow I_3$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

□

Nous utiliserons des enchaînements d'équivalences pour démontrer le résultat suivant, qui décrit le comportement de l'implication par rapport à la négation.

Proposition 1.12

Soient P et Q deux assertions. Les équivalences suivantes sont toujours vraies.

$$\big(\neg(P \Longrightarrow Q)\big) \iff \big(P \wedge (\neg Q)\big) \tag{11}$$

(l'implication $P \Longrightarrow Q$ est fausse si et seulement si P est vrai et Q est faux)

$$\big(P \Longrightarrow Q\big) \iff \big(\neg Q \Longrightarrow \neg P\big) \tag{12}$$

(« P implique Q » est équivalent à « non Q implique non P »).

Démonstration. — Nous pourrions démontrer ces équivalences directement à l'aide des tables de vérité (nous conseillons au lecteur de le faire). Nous allons plutôt les déduire du théorème 1.9. Voici la démonstration de la première équivalence.

$$\begin{array}{rcll} \neg(P \Longrightarrow Q) & \iff & \neg((\neg P) \vee Q) & \text{par définition de l'implication} \\ & \iff & \neg(\neg P) \wedge \neg Q & \text{par (8)} \\ & \iff & P \wedge \neg Q & \text{par (7)} \end{array}$$

Voici la démonstration de la seconde équivalence.

$$\begin{array}{rcll} \big(P \Longrightarrow Q\big) & \iff & \big((\neg P) \vee Q\big) & \text{par définition de l'implication} \\ & \iff & \big(\neg(\neg(\neg P \vee Q))\big) & \text{par (7)} \\ & \iff & \big(\neg((\neg(\neg P)) \wedge \neg Q\big) & \text{par (8)} \\ & \iff & \big(\neg(P \wedge \neg Q)\big) & \text{par (7)} \\ & \iff & \big(\neg P \vee (\neg(\neg Q))\big) & \text{par (9)} \\ & \iff & \big((\neg(\neg Q)) \vee (\neg P)\big) & \text{par (2)} \\ & \iff & \big((\neg Q) \Longrightarrow (\neg P)\big) & \text{par définition de l'implication} \end{array}$$

□

Remarques 1.13. — i) L'équivalence (11) est la méthode habituelle que l'on utilise pour démontrer qu'une implication est fausse : il suffit d'exhiber une situation où P est vraie et Q fausse pour infirmer l'implication $P \Longrightarrow Q$. Par exemple, l'implication « $(n \leqslant 3) \Longrightarrow (n \,|\, 3)$ » n'est pas vraie pour tout entier n, car on peut trouver un entier n tel que $(n \leqslant 3)$ soit vrai et $(n|3)$ soit faux : 2 est inférieur ou égal à 3 mais ne divise pas 3. On appelle cela « trouver un contre-exemple ».

ii) L'équivalence (12) est aussi une technique de démonstration classique. L'implication « $(\neg Q) \Longrightarrow (\neg P)$ » (« non Q implique non P ») s'appelle la *contraposée* de l'implication $P \Longrightarrow Q$.

Par exemple, la contraposée de « $(n>3) \Longrightarrow (n>2)$ » est « $(n \leqslant 2) \Longrightarrow (n \leqslant 3)$ ». Il est parfois plus facile pour démontrer une implication de démontrer sa contraposée, nous y reviendrons.

1.2. Ensembles. — Un *ensemble* peut être vu comme une collection d'objets mathématiques, appelés *éléments*, comme l'ensemble $\mathbf{N}$ des entiers naturels (au tableau, on note avec des barres doubles les caractères gras donc $\mathbf{R}$ se note $\mathbb{R}$ au tableau). Contentez-vous pour l'instant de l'idée intuitive d'une collection d'éléments. Deux ensembles sont égaux si et seulement s'ils contiennent les mêmes éléments. Nous verrons par la suite diverses façons pour construire un ensemble, le plus souvent à l'aide d'une propriété qui caractérise les éléments de cet ensemble.

Notation 1.14

Le fait qu'un élément x appartienne à un ensemble A se note $x \in A$, et son contraire $x \notin A$ (« x n'appartient pas à A »).

Par exemple $2 \in \mathbf{N}$ (2 appartient à $\mathbf{N}$) et $\sqrt{2} \notin \mathbf{N}$ (racine de 2 n'appartient pas à $\mathbf{N}$). Certains ensembles souvent utilisés ont une notation propre, comme l'ensemble $\mathbf{N}$ des entiers naturels, l'ensemble $\mathbf{R}$ des nombres réels, l'ensemble $\mathbf{C}$ des nombres complexes. Pour les autres, on utilise une définition, que l'on écrit entre accolades :

Notations 1.15

a) On peut écrire un ensemble *en extension*, en donnant la liste de ses éléments : ainsi $\{x_1, x_2, x_3\}$ désigne l'ensemble dont les éléments sont x_1, x_2 et x_3.

b) Étant donné un ensemble A et une assertion $P(x)$ dépendant d'un paramètre x, l'ensemble
$$\{x \in A \mid P(x)\}$$
se lit « l'ensemble des x appartenant à A tels que $P(x)$ ». Il est définit par l'équivalence entre l'assertion $y \in \{x \in A \mid P(x)\}$ et l'assertion ($y \in A$ et $P(y)$).

c) On peut aussi définir des ensembles obtenus en appliquant une expression bien écrite aux éléments d'un autre ensemble. Dans ce cas, on note avec une virgule. Ainsi
$$\{m^2, m \in \mathbf{N}\}$$
se lit l'ensemble des m^2, pour m appartenant à $\mathbf{N}$. Autrement dit, c'est l'ensemble de tous les entiers qui peuvent s'écrire comme le carré d'un autre entier.

Exemples 1.16. — Voici deux définitions de l'ensemble des entiers naturels strictement inférieurs à 5.

$$\{\, n \in \mathbf{N} \mid n < 5 \,\} = \{\, 0, 1, 2, 3, 4 \,\}.$$

Le terme de gauche se lit « ensemble des n appartenant à $\mathbf{N}$ tels que $n < 5$ » ou « ensemble des entiers strictement inférieurs à 5 ». Voici deux définitions de l'ensemble des diviseurs de 12.

$$\{\, n \in \mathbf{N} \mid n \,|\, 12 \,\} = \{\, 1, 2, 3, 4, 6, 12 \,\}.$$

On prendra garde de ne pas confondre, dans cette notation, la première barre verticale qui correspond à la notation ensembliste et la deuxième barre qui correspond à la notation pour la divisibilité.

L'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à 5 peut sécrire :

$$\{\, n \in \mathbf{N} \mid n \geqslant 5 \,\} = \{\, n + 5,\ n \in \mathbf{N} \,\},$$

et l'ensemble des entiers pairs :

$$\{\, n \in \mathbf{N} \mid 2 \,|\, n \,\} = \{\, 2n,\ n \in \mathbf{N} \,\},$$

Les ensembles que nous définirons seront souvent des *sous-ensembles* ou *parties* d'un ensemble plus grand (comme l'ensemble des entiers $\mathbf{N}$ dans les exemples précédents).

Définition 1.17

On dit qu'un ensemble A est un *sous-ensemble* ou une *partie* d'un ensemble E si tout élément de A est aussi élément de E. On dit aussi que A est inclus dans E.

On note $A \subset E$.

Les parties d'un ensemble E sont les éléments d'un ensemble que l'on note $\mathscr{P}(E)$. Autrement dit, on a une équivalence

$$F \in \mathscr{P}(E) \iff F \subset E.$$

Exemple 1.18. — L'ensemble E est toujours une partie de E, ainsi que l'ensemble vide, noté $\emptyset$. Voici l'écriture en extension de $\mathscr{P}(\{0, 1, 2\})$, qui est l'ensemble des parties de l'ensemble à trois éléments $\{0, 1, 2\}$.

$$\mathscr{P}(\{0,1,2\}) = \Big\{\, \emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\} \,\Big\}.$$

L'ensemble $\mathscr{P}(\{0, 1, 2\})$ contient 8 éléments, dont chacun est lui-même un ensemble.

Définition 1.19

Si A et E sont deux ensembles, on note $E - A$ (ou $E \backslash A$) l'ensemble formé des éléments de E qui ne sont pas dans A.

$$E - A = \{x \in E \mid x \notin A\}.$$

Lorsque A est un sous-ensemble de E, on dit que $E - A$ est le *complémentaire* de A dans E. On le note aussi ${}^cA$ lorqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'ensemble E.

Un ensemble qui ne contient qu'un seul élément, comme $\{0\}$, est un *singleton*.

Il est fréquent (et souvent utile) de passer d'un ensemble A à l'assertion $x \in A$ (vraie ou fausse). Les connecteurs logiques entre assertions (« non », « et », « ou ») se traduisent par des opérations ensemblistes : complémentaire, intersection, réunion. Nous utiliserons cette correspondance comme définition des opérations ensemblistes.

ensembles A, B	assertions $(x \in A), (x \in B)$
complémentaire ${}^cA$	négation (« non ») $x \in {}^cA \Longleftrightarrow x \notin A$
intersection (« inter ») $A \cap B$	conjonction (« et ») $(x \in A \cap B) \Longleftrightarrow \big((x \in A)\text{et}(x \in B)\big)$
réunion (« union ») $A \cup B$	disjonction (« ou ») $(x \in A \cup B) \Longleftrightarrow \big((x \in A)\text{ou}(x \in B)\big)$

Pour démontrer que deux ensembles sont égaux, on doit montrer que chacun est inclus dans l'autre (tout comme pour démontrer une équivalence, on doit montrer les deux implications).

Les opérations ensemblistes précédentes ont les propriétés suivantes.

Nous vous conseillons aussi de remplacer A par $\{n \in \mathbf{N} \mid n \leqslant 6\}$, B par $\{n \in \mathbf{N} \mid 2 \mid n\}$ et C par $\{n \in \mathbf{N} \mid 3 \mid n\}$ et d'écrire en extension tous les ensembles du théorème.

Théorème 1.20

Soient A, B et C trois ensembles. Les égalités ensemblistes suivantes sont toujours vraies.

- Commutativité :

(13) $$\big(A \cap B\big) = \big(B \cap A\big).$$

(14) $$\big(A \cup B\big) = \big(B \cup A\big).$$

• Associativité :

$$(A \cap (B \cap C)) = ((A \cap B) \cap C). \tag{15}$$

$$(A \cup (B \cup C)) = ((A \cup B) \cup C). \tag{16}$$

• Distributivité :

$$(A \cap (B \cup C)) = ((A \cap B) \cup (A \cap C)). \tag{17}$$

$$(A \cup (B \cap C)) = ((A \cup B) \cap (A \cup C)). \tag{18}$$

• Complémentaires : soient A et B des parties d'un ensemble E. Alors :

$$E - (E - A) = A, \tag{19}$$

$$E - (A \cup B) = (E - A) \cap (E - B), \tag{20}$$

$$E - (A \cap B) = (E - A) \cup (E - B). \tag{21}$$

Pour mieux comprendre ces opérations ensemblistes, il est commode de visualiser E par un rectangle et les sous-ensembles de E par des « patates » hachurées dessinées dans ce rectangle. Le résultat s'appelle un *diagramme de Venn*, plutôt qu'un sac de patates (figure 1). Nous conseillons

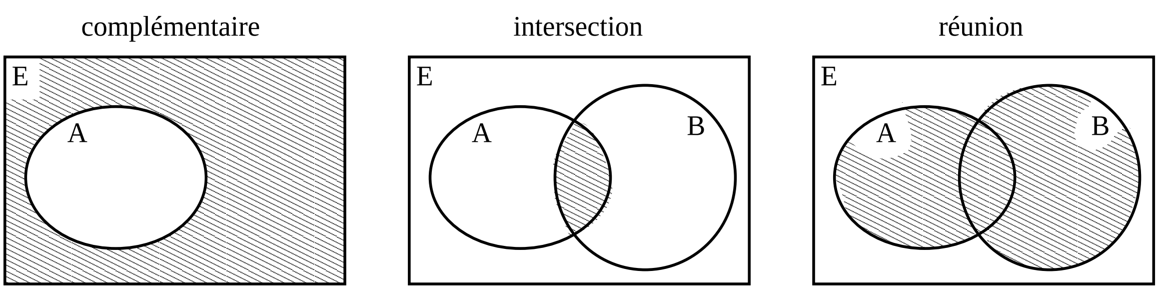


FIGURE 1. Diagrammes de Venn pour le complémentaire, l'intersection et la réunion.

au lecteur de visualiser les égalités ensemblistes du théorème 1.20 sur des diagrammes de Venn. À titre d'exemple, nous avons représenté sur la figure 2 le diagramme de Venn qui illustre la formule

$$(E - A) \cup (E - B) = E - (A \cap B).$$

En effet, sur cette figure seule l'intersection $A \cap B$ n'est point hachurée. On prendra néanmoins garde au fait que ce diagramme, s'il illustre parfaitement la formule, n'en constitue pas une *preuve*.

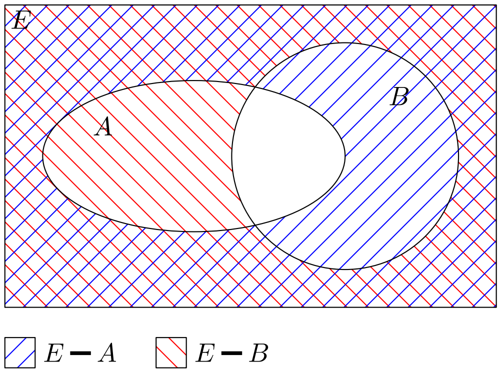


FIGURE 2. $(E - A) \cup (E - B) = E - (A \cap B)$

Remarque 1.21. — Un diagramme de Venn correspondant à un certain nombre de parties doit montrer toutes les intersections possibles, ce qui complique l'utilisation des diagrammes de Venn au-delà d'un petit nombre de parties. Ainsi un diagramme de Venn pour trois parties peut ressembler au premier dessin de la figure 3. Le deuxième dessin de cette figure représente la construction de A. W. F. Edwards donnant un diagramme de Venn correspondant à cinq parties de l'ensemble E.

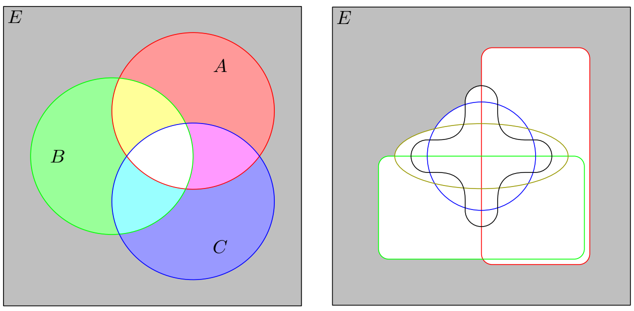


FIGURE 3. Diagrammes de Venn pour trois ou cinq parties.

1.3. Quantificateurs

Notations 1.22

Les quantificateurs sont les deux symboles $\forall$ « quel que soit » et $\exists$ « il existe ».

On dit aussi que $\forall$ est le quantificateur *universel* et $\exists$ le quantificateur *existentiel*. On les utilise pour des énoncés du type :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \exists m \in \mathbf{N}, \quad n < m. \tag{22}$$

Cette formule se lit : quel que soit n appartenant à $\mathbf{N}$, il existe m appartenant à $\mathbf{N}$ tel que $n < m$. Soit encore : pour tout entier n, il existe un entier m strictement plus grand que n. Il est crucial de retenir que dans ce cas l'entier m peut dépendre de l'entier n. Cette assertion est vraie : pour tout n, le nombre $m = n + 1$ vérifie bien $n < m$.

L'ordre dans lequel on écrit les quantificateurs est très important. Échangeons dans (22) les deux quantificateurs.

$$\exists m \in \mathbf{N}, \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad n < m\,.$$

Cette assertion se lit : il existe un entier m tel que tout entier n vérifie $n < m$ (ce qui est faux).

Nous commettrons souvent l'abus de notation consistant à regrouper des quantificateurs de *même nature* et portant sur les *mêmes ensembles*. Par exemple :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \forall m \in \mathbf{N}, \quad m + n \in \mathbf{N},$$

sera plutôt écrit :

$$\forall n, m \in \mathbf{N}, \quad m + n \in \mathbf{N}.$$

(La somme de deux entiers naturels est un entier naturel.)

Ou encore,

$$\exists n \in \mathbf{N},\ \exists m \in \mathbf{N}, \quad n + m < 10,$$

deviendra :

$$\exists n, m \in \mathbf{N}, \quad n + m < 10.$$

(Il existe deux entiers dont la somme est inférieure à 10.)

Constatez en la lisant à haute voix que la formule suivante définit bien la divisibilité.

$$\forall m, n \in \mathbf{N},\ (m \mid n) \iff \Big(\exists k \in \mathbf{N}, \quad n = km\Big).$$

Le lien entre les quantificateurs est donné par la négation :

Proposition 1.23

Soit $P(x)$ une assertion dépendant d'un paramètre x et soit A un ensemble. alors les équivalences suivantes sont vraies :

$$\neg(\forall x \in A,\ P(x)) \iff \exists x \in A,\ \neg P(x),$$
$$\neg(\exists x \in A,\ P(x)) \iff \forall x \in A,\ \neg P(x).$$

Remarques 1.24. — i) Pour écrire la négation d'une assertion comportant des quantificateurs on change donc les $\forall$ en $\exists$ et les $\exists$ en $\forall$, puis on écrit la négation de l'assertion qui suit la liste des quantificateurs. Ceci est tout à fait conforme à l'intuition. La négation de « tout les x vérifient $P(x)$ » est bien « il existe un x qui ne vérifie pas $P(x)$ ». La négation de « il existe un x qui vérifie $P(x)$ » est bien « aucun x ne vérifie $P(x)$ » soit encore « tous les x vérifient $\neg P(x)$ ». Ecrivons par exemple la négation de l'assertion (22).

$$\exists n \in \mathbf{N}, \quad \forall m \in \mathbf{N}, \ (n \geqslant m).$$

Il existe un entier n supérieur ou égal à tout entier m (ce qui est faux).

ii) Dire que l'assertion $P(x)$ dépend de x signifie en particulier que dans l'expression considérée la lettre x ne se trouve pas juste après un quantificateur : ainsi l'assertion

$$\exists x \in \mathbf{R}, \ x < 10$$

ne dépend pas d'un paramètre. Dans cette assertion, la variable x est dite *liée* à un quantificateur. On dit également qu'elle est *muette*, ce qui signifie qu'on pourrait la remplacer par une autre lettre sans que cela change la signification de l'assertion. Nous verrons plus loin d'autres situations où une variable est muette. Comme autre exemple, dans l'assertion

$$\exists x \in \mathbf{R}, \ x < y$$

la lettre y est un paramètre mais la lettre x est muette.

iii) La première assertion permet en fait de définir le quantificateur universel à partir du quantificateur existentiel : $\forall x \in A, \ P(x)$ peut être défini comme $\neg(\exists x \in A, \ \neg P(x))$. la seconde assertion découle aussi de cette définition.

Proposition 1.25

Soit $P(x)$ et $Q(x)$ des assertions dépendant d'un paramètre et soit A un ensemble les assertions

$$\exists x \in A, \quad P(x) \vee Q(x)$$

et

$$(\exists x \in A, \ P(x)) \vee (\exists y \in A, \ Q(y))$$

sont équivalentes. De même, les assertions

$$\forall x \in A, \quad P(x) \wedge Q(x)$$

et

$$(\forall x \in A, \ P(x)) \wedge (\forall y \in A, \ Q(y))$$

sont équivalentes.

Il convient d'être extrèmement prudent dans l'utilisation de cette propriété. En effet, le quantificateur existentiel n'est pas distributif par rapport à « et » et le quantificateur universel ne l'est pas par rapport à « ou » ! Par exemple, « il existe un entier supérieur à 7 et inférieur à 6 » (faux) n'est pas équivalent à « il existe un entier supérieur à 7 et il existe un entier inférieur à 6 » (vrai). De même « tout entier est inférieur ou égal à 7, ou supérieur ou égal à 6 » (vrai) n'est pas équivalent à « tout entier est inférieur ou égal à 7 ou tout entier est supérieur ou égal à 6 » (faux).

Idée de la preuve de la proposition. — Démontrons la première équivalence. Supposons

$$\exists x \in A, \quad P(x) \vee Q(x)$$

On se donne donc un élément $a \in A$ tel que $P(a)$ ou $Q(a)$. Dans le premier cas, $\exists x \in A,\ P(x)$, dans le second $\exists y \in A,\ Q(y)$ ce qui implique l'assertion

$$(\exists x \in A, \quad P(x)) \vee (\exists y \in A, \quad Q(y))$$

Réciproquement, on raisonne de façon similaire en distinguant deux cas. La deuxième équivalence peut se déduire de la première en utilisant la proposition 1.23. □

Parmi les propriétés fondamentales des quantificateurs, on peut donner les énoncés suivants, qu'on peut considérer comme des *axiomes* c'est-à-dire comme des assertions élémentaires supposées vraies dans la théorie des ensembles, et qu'on peut utiliser dans toute démonstration.

Axiomes 1.26

Soit $P(x)$ une assertion dépendant d'un paramètre x, soit A un ensemble et a un élément de A.

$$(\forall x \in A,\ P(x)) \Longrightarrow P(a)$$

et

$$P(a) \Longrightarrow (\exists x \in A,\ P(x)).$$

Exemple 1.27. — L'assertion

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad x^2 - 2x + 1 \geqslant 0$$

implique l'assertion

$$\pi^2 - 2\pi + 1 \geqslant 0,$$

car π est un nombre réel.

Les deux énoncés des axiomes 1.26 sont conformes à l'intuition. Notons que le deuxième correspond à la façon « standard » de démontrer une assertion d'existence : pour démontrer que $\exists x \in A,\ P(x)$, il suffit d'exhiber un élément $a \in A$ tel qu'on puisse démontrer $P(a)$. Une telle démonstration est dite *constructive* ou *effective* si on explique comment construire l'élément a. En particulier, pour démontrer qu'une assertion

$$\forall x \in A,\ P(x)$$

est *fausse*, il suffit d'exhiber un *contre-exemple* c'est-à-dire un élément $a \in A$ tel que $\neg P(a)$.

Remarque 1.28. — Pour démontrer une assertion avec un quantificateur universel

$$\forall x \in A,\ P(x), \tag{23}$$

on commence le plus souvent par écrire « Soit $x \in A$ ». Cela signifie que dans la démonstration qui suit x désigne un élément *arbitraire* et *fixé* de l'ensemble A. Si on démontre $P(x)$, alors, comme cela vaut pour un x arbitraire, on a démontré (23).

Exemple 1.29. — Démontrons l'assertion

$$\forall t \in \mathbf{R},\ t^2 + 2t + 2 > 0. \tag{24}$$

Soit $t \in \mathbf{R}$. On a l'égalité $t^2 + 2t + 2 = (t+1)^2 + 1$. Comme le carré d'un nombre réel est positif, $(t+1)^2 \geqslant 0$. Donc $(t+1)^2 + 1 \geqslant 1 > 0$. Cela conclut la preuve de (24).

1.4. Couples, produit. — Nous allons définir les fonctions de manière ensembliste en nous basant sur la notion de couples :

Définition 1.30

La propriété fondamentale d'un *couple* (x,y) est donnée par la validité de l'équivalence

$$(x,y) = (x',y') \Leftrightarrow (x = x' \text{ et } y = y')$$

pour tous x, x', y, y'. Soient E et F des ensembles, alors il existe un ensemble $E \times F$ appelé *ensemble produit* dont les éléments sont tous les couples de la forme (x,y) avec $x \in E$ et $y \in F$.

On peut écrire

$$E \times F = \{(x,y),\ x \in E \text{ et } y \in F\}.$$

Notons que le produit $E \times F$ est vide si et seulement si E est vide ou F est vide. D'autre part, si A est une partie de E, alors $A \times F$ est une partie de $E \times F$.

On peut de même considérer un triplet (x,y,z) et l'ensemble $E\times F\times G$ donné par

$$E\times F\times G=\{\,(x,y,z), x\in E,\ y\in F \text{ et } z\in G\,\},$$

voire des quadruplets ou des quintuplets. Plus généralement, étant donné un entier $n\in\mathbf{N}$ et n ensembles $E_1,\dots,E_n$, on dispose de l'ensemble

$$E_1\times\cdots\times E_n=\{\,(x_1,\dots,x_n),\ x_i\in E_i \text{ pour } i\in\{1,\dots,n\}\,\}.$$

On appelle *n-uplet* un élément d'un tel produit.

1.5. Applications, suites

Définition 1.31

Soient E et F des ensembles. Une *fonction f de E dans F* est définie par son *graphe* : c'est un sous-ensemble Γ_f de $E\times F$, tel que pour tout $x\in E$, au plus un réel y vérifie $(x,y)\in\Gamma_f$. S'il existe, ce réel y est l'*Image* de x et est noté $f(x)$. L'ensemble des x qui ont une image par f est le *domaine de définition* de f. Nous le noterons $\mathscr{D}_f$.La notation standard est la suivante :

$$\begin{array}{rcl} f:\mathscr{D}_f & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

L'ensemble E est appelé *l'ensemble de départ de la fonction f* et F *est l'ensemble d'arrivée*.

Une *application* est une fonction dont le domaine de définition coïncide avec l'ensemble de départ.

Exemple 1.32. — L'ensemble $\Gamma_f=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid xy=1\}$ définit la fonction f de domaine de définition $\mathbf{R}^*$, $x\longmapsto\frac{1}{x}$.

Par contre l'ensemble $\Gamma=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$ n'est pas un graphe, en effet $(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ et $(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$ appartiennent tous deux à Γ, ce qui contredit la définition précédente.

Remarque 1.33. — Les définition redonnent que le graphe Γ_f est l'ensemble des couples $(x,f(x))$ où x parcourt le domaine de définition $\mathscr{D}_f$. On retrouve donc la description du graphe que vous avez déjà rencontré dans le secondaire :

$$\Gamma_f=\{\,(x,f(x)),\ x\in\mathscr{D}_f\,\}.$$

Mais il faut saisir que, du point de vue de la théorie des ensembles, c'est le graphe qui définit la fonction.

Remarque 1.34. — Deux fonctions f et g de E dans F sont égales si et seulement si elles ont le même domaine de définition D et si quelque soit $x \in D, f(x) = g(x)$.

On prendra garde à distinguer *fonction* et *application*.

Représentation 1.35. — Pour des ensembles finis, il est parfois commode de représenter le graphe d'une fonction d'un ensemble E dans un ensemble F par des flèches entre deux patatoïdes : pour chaque élément a de E, on trace un point dans le patatoïde correspondant à E et pour chaque élément b de F, on trace un point dans le patatoïde de F, en donnant un nom à chacun de ces points ; ensuite pour chaque couple (a, b) on trace une flèche allant du point correspondant à a vers le point correspondant à b.

À titre d'exemple, soient $E = \{0, 1, 2, 3\}$ et $F = \{0, 1, 2\}$. Considérons l'application qui à un nombre associe le reste de sa division euclidienne par 2 : 0 s'il est pair, 1 s'il est impair. Le graphe de cette application est :

$$\Gamma = \{ (0, 0), (1, 1), (2, 0), (3, 1) \} .$$

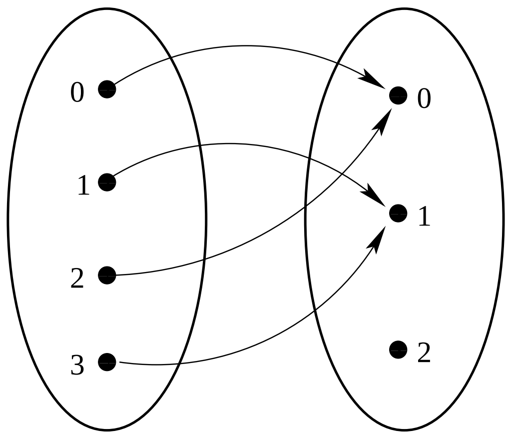


FIGURE 4. Représentation graphique d'une application de $\{0, 1, 2, 3\}$ vers $\{0, 1, 2\}$.

Pour des fonctions d'une partie de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$, on représente le graphe comme dans le secondaire en dessinant pour chaque point (x, y) du graphe le point de coordonnées (x, y). Ainsi, dans la figure 5, nous avons représenté une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. On constate que pour tout x fixé de l'ensemble de définition (représenté en vert sur l'axe des abscisses), la droite verticale correspondant aux points dont la première coordonnée est x croise le graphe, tracé en rouge, en un unique point de coordonnées $(x, f(x))$ la valeur de $f(x)$, qui est la deuxième coordonnée de ce point est donc bien déterminée par x.

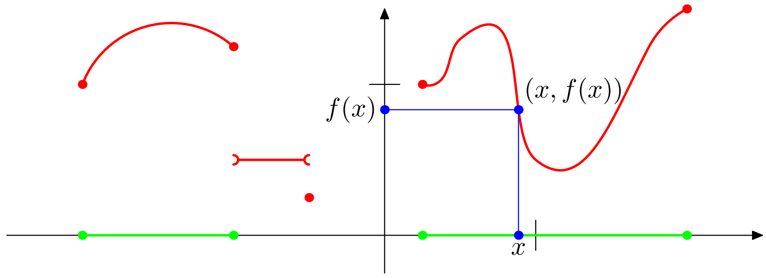


FIGURE 5. Représentation graphique d'une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$

Par contre, pour la partie Γ de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ représentée en rouge dans le dessin de la figure 6, on peut

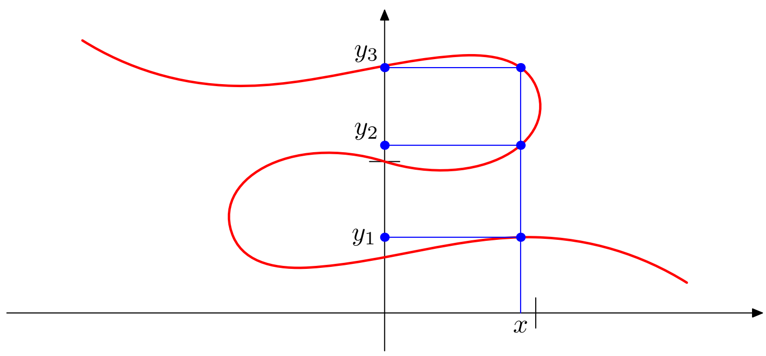


FIGURE 6. Ensemble qui n'est pas le graphe d'une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$

trouver un nombre réel x, tel que la droite verticale correspondant aux points dont la première coordonnée vaut x croise l'ensemble Γ en trois points (x, y_1), (x, y_2) et (x, y_3). Donc l'ensemble Γ n'est pas le graphe d'une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$; pour le nombre réel x, on ne peut pas définir de manière univoque le nombre réel $f(x)$.

Définition 1.36

Une *suite* d'éléments de E est une application de $\mathbf{N}$ dans E. De préférence à la notation fonctionnelle, on emploie pour les suites une notation *indicielle*, et on parlera de la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$, u_n désignant l'image de n par l'application.

Remarque 1.37. — Par abus de langage, si $n_0 \in \mathbf{N}$, on appelera également suite d'éléments de E une application de $\{n \in \mathbf{N} \mid n \geqslant n_0\}$ dans E, on note alors la suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$.

Exemple 1.38. — Soit (u_n) la suite définie pour $n \in \mathbf{N}$ par $u_n = (-1)^n$. Ainsi $u_0 = 1, u_1 = -1, \cdots$.

0n peut aussi définir une suite par récurrence. Par exemple soit (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = 3u_n + 4$. Ainsi, $u_1 = 4, u_2 = 16, \cdots$.

Définition 1.39

Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F.

1. Soit A un sous-ensemble de E. On appelle *image de A par f* et on note $f(A)$ l'ensemble des images des éléments de A.
$$f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A, f(x) = y\}.$$
2. Soit B un sous-ensemble de F. On appelle *image réciproque de B par f* et on note $f^{-1}(B)$ l'ensemble des éléments de E dont l'image appartient à B.
$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

Attention à la notation f^{-1} : elle ne signifie pas que f est inversée. C'est une convention pour désigner un sous-ensemble de l'espace de départ.

Exemple 1.40. — Dans l'application de la figure 4, L'image de $\{0, 2\}$ est le singleton $\{0\}$. L'image réciproque de $\{1\}$ est $\{1, 3\}$. L'image réciproque de $\{2\}$ est l'ensemble vide.

Terminologie 1.41

Un élément x de E tel que $f(x) = y$ s'appelle un *antécédent* de y. D'après la définition 1.39, l'ensemble des antécédents de y est $f^{-1}(\{y\})$.

Remarque 1.42. — On pourra noter que pour une partie B de l'ensemble d'arrivée F, la partie $f^{-1}(B)$ est l'ensemble des antécédents d'éléments de B.

Dessin 1.43. — Sur la figure 7, on considère l'image par une application $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ d'un segment représenté en orange sur la figure. Pour chaque x de ce segment, on peut construire comme précédemment son image $f(x)$; l'ensemble $f(A)$ est formé de tous les $f(x)$ où x parcourt le segment. Il est représenté en vert. Autrement dit, on regarde la partie du graphe dessinée en bleue, qui est obtenue en intersectant la bande verticale orange correspondant aux points du plan dont la premère coordonnée est dans A avec le graphe de la fonction. On projette alors cette partie du graphe sur l'axe des ordonnées, ce qui donne, dans cet exemple, un intervalle correspondant à $f(A)$.

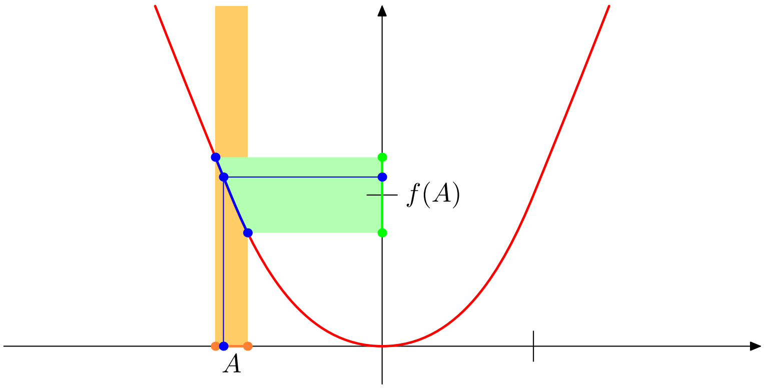


FIGURE 7. Image d'une partie A.

Pour la même application f, étant donné un intervalle B de $\mathbf{R}$, on considère sur la figure 8 l'intersection du graphe avec la bande horizontale orange correspondant aux points dont la seconde coordonnée est dans B. On projette alors cette partie du graphe sur l'axe des abscisses ce qui donne alors la partie correspondant à $f^{-1}(B)$ qui est ici la réunion de deux intervalles.

Définition 1.44

Soient E, F, et G des ensembles, f une application de E vers F et g une application de F vers G. On définit la *composée* de f par g, notée $g \circ f$, comme l'application de E vers G qui à x associe $g \circ f(x) = g(f(x))$.

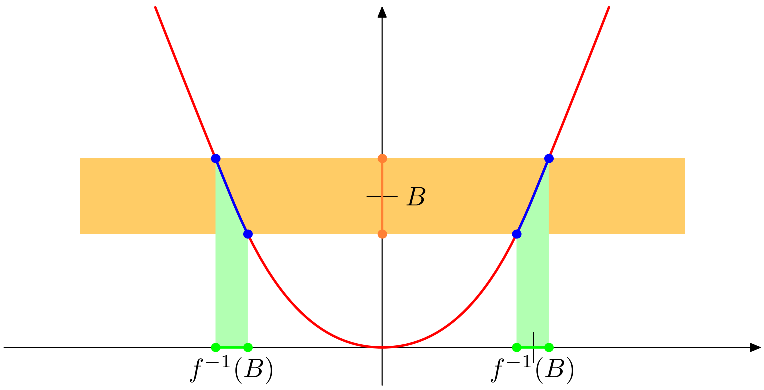


FIGURE 8. Image réciproque d'une partie B.

Attention à l'ordre des applications dans l'écriture $g \circ f$: c'est l'ordre inverse des flèches dans le schéma ci-dessous.

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{f} & F & \xrightarrow{g} & G \\ x & \longmapsto & f(x) & \longmapsto & g \circ f(x) = g(f(x)) . \end{array}$$

Définition 1.45

Soient E et F des ensembles et f une application de E vers F. On dit que f est :

1. *injective* si tout élément de l'ensemble d'arrivée possède *au plus* un antécédent dans l'ensemble de départ.
$$\forall x_1, x_2 \in E, \quad \big(f(x_1) = f(x_2)\big) \Longrightarrow x_1 = x_2 .$$
2. *surjective* si tout élément de l'ensemble d'arrivée possède *au moins* un antécédent dans l'ensemble de départ.
$$\forall y \in F, \exists x \in E \ ; \quad f(x) = y .$$
3. *bijective* si tout élément de l'ensemble d'arrivée possède *exactement* un antécédent dans l'ensemble de départ.

Une application bijective, ou *bijection*, est donc à la fois injective et surjective (voir figure 9).

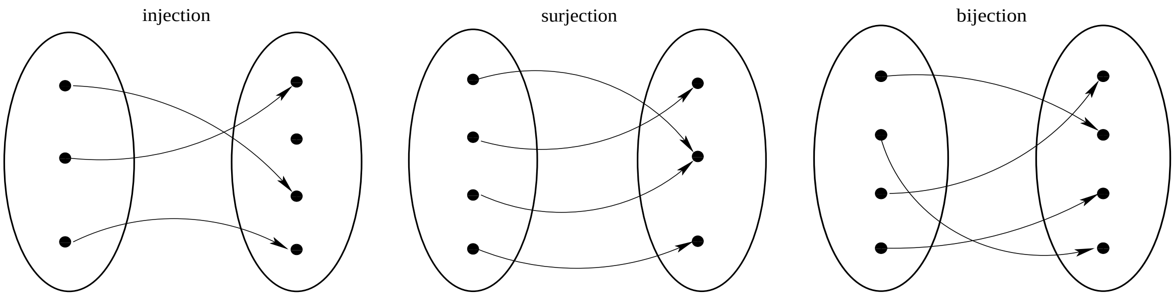


FIGURE 9. Représentations graphiques d'une injection, d'une surjection et d'une bijection.

Définition 1.46

Si une application de E vers F est bijective, tout élément de F a un antécédent et un seul. On peut alors définir *l'application réciproque* de f, notée f^{-1} :

$$f(x) = y \iff x = f^{-1}(y)\,.$$

Si f est bijective, la composée de f par son application réciproque f^{-1} est l'application qui à x associe x, de E vers E. On l'appelle *application identique*, ou *identité*.

$$\begin{array}{ccccc} & f & & f^{-1} & \\ E & \longrightarrow & F & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & f(x) & \longmapsto & f^{-1}\circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = x\,. \end{array}$$

Les notations pour l'application réciproque et pour l'image réciproque d'une partie de l'ensemble d'arrivée F sont liées par la relation :

$$f^{-1}(\{y\}) = \{f^{-1}(y)\}\,.$$

On prendra garde au fait que si l'image réciproque d'une partie est définie pour toute application, l'application réciproque, quant à elle, n'est définie que pour une application bijective.

La notion de bijection est importante pour définir la notion de cardinal.

Théorème et définition 1.47

Un ensemble E est dit *fini* s'il existe un entier naturel n et une bijection de E dans l'ensemble $\{1, \cdots, n\}$. Cet entier est alors unique et est appelé le *cardinal de E*.

Remarque 1.48. — De manière précise,

$$\{1, \cdots, n\} = \{k \in \mathbf{N} \mid k \geqslant 1 \text{ et } k \leqslant n\}.$$

Par conséquent, l'ensemble vide est fini ; c'est l'unique ensemble de cardinal 0.

Un ensemble E est de cardinal 1 si et seulement c'est un singleton, c'est-à-dire qu'il a un unique élément. Si on note a cet élément, on obtient l'égalité $E = \{a\}$.

Théorème 1.49 (admis)

On admettra les résultats suivants :

1. **Principe de bijection :** Soit E et F deux ensembles finis. E et F ont le même cardinal si et seulement si il existe une bijection de E dans F.
2. **Principe d'addition :** Le cardinal de la réunion de deux ensembles finis disjoints est la somme des cardinaux.
3. **Principe de multiplication :** Le cardinal du produit de deux ensembles finis est le produit des cardinaux.

1.6. Raisonnements. — Il ne s'agit pas de proposer ici une théorie du raisonnement mathématique. Nous avons déjà mentionné (*cf.* remarque 1.6) le raisonnement direct, ainsi que les raisonnement par analyse et synthèse. Nous allons maintenant donner quelques exemples de démonstrations, pour illustrer quatre types de raisonnements supplémentaires : par contraposée, par l'absurde, par disjonction de cas et par récurrence.

Raisonnement par contraposée

Il consiste, plutôt que de démontrer l'implication $P \Longrightarrow Q$, à démontrer sa contraposée $(\neg Q) \Longrightarrow (\neg P)$. Il est difficile de donner une règle générale d'utilisation de ce raisonnement. Un bon conseil avant de se lancer dans la démonstration d'une implication, est d'écrire d'abord sa contraposée. Avec un peu d'expérience, on arrive vite à sentir laquelle des deux est la plus facile à démontrer. Si le résultat désiré est Q, on cherche les conséquences de non Q pour arriver aux bonnes hypothèses. Notre premier exemple est un résultat facile, mais très utile.

Proposition 1.50

Soit x un nombre réel tel que pour tout $\varepsilon > 0$, $x \leqslant \varepsilon$. Alors $x \leqslant 0$.

Démonstration. — Nous devons démontrer l'implication :

$$\left(\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, \quad x \leqslant \varepsilon\right) \Longrightarrow (x \leqslant 0)\,.$$

Ecrivons sa contraposée :

$$(x > 0) \Longrightarrow \left(\exists \varepsilon \in \mathbf{R}_+^* \; ; \qquad x > \varepsilon\right).$$

« Si x est strictement positif, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $x > \varepsilon$ ». C'est vrai : il suffit de choisir $\varepsilon = x/2$. □

Raisonnement par l'absurde

Il consiste à démontrer une assertion en vérifiant que sa négation conduit à une contradiction avec les hypothèses. Dans certains cas il se distingue mal du raisonnement par contraposée : si A désigne la conjonction des hypothèses et B la conclusion, nier B et aboutir à une contradiction, revient à démontrer non$A$ à partir de non$B$, ce qui est la contraposée de $A \Longrightarrow B$.

Notre premier exemple est dû à Euclide.

Proposition 1.51

Il existe une infinité de nombres premiers.

Démonstration. — Supposons qu'il n'en existe qu'un nombre fini, et soit N le plus grand d'entre eux. Considérons le nombre $P = N!+1$. Il est strictement supérieur à N, donc il n'est pas premier, par définition de N. Si on effectue la division euclidienne de P par un nombre quelconque entre 2 et N, le reste est 1, par définition de la factorielle (produit de tous les entiers de 1 à N). Donc le nombre P n'est divisible par aucun nombre entre 2 et N donc par aucun nombre premier : il est donc premier, d'où la contradiction. □

Voici un autre résultat classique.

Proposition 1.52

Le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Démonstration. — Un nombre rationnel est le quotient de deux entiers ; un nombre irrationnel n'est pas rationnel. Nous devons donc démontrer que $\sqrt{2}$ n'est pas le quotient de deux entiers. Supposons le contraire : il existe deux entiers p et q tels que $\sqrt{2} = p/q$. Quitte à simplifier la fraction, nous pouvons supposer que p et q n'ont pas de facteur commun. Multiplions par q et élevons au carré :

$$2q^2 = p^2 .$$

Le nombre $p^2 = 2q^2$ est pair, donc p est également pair. Mais si p est pair, alors p^2 est multiple de 4. Donc q^2 est multiple de 2, donc q est pair. Mais alors 2 est un facteur commun à p et q, ce qui est une contradiction. $\square$

Raisonnement par disjonction de cas

Dans certains raisonnements, il peut être pratique de considérer successivement deux cas. Ainsi, si on veut démontrer une assertion $P(x)$ pour tout élément x d'un ensemble E qui est la réunion de deux parties A et B, on démontre d'abord l'assertion $P(x)$ pour $x \in A$ puis l'assertion $P(x)$ pour $x \in B$ et, comme $E = A \cup B$, on peut conclure que l'assertion $P(x)$ est vraie pour tout $x \in E$.

À titre d'exemple, démontrons le résultat suivant :

Proposition 1.53

Pour tout entier n, le nombre rationnel $\frac{n(n+1)}{2}$ est entier.

Démonstration. — Nous allons distinguer deux cas suivant la parité de l'entier n.

Premier cas. Si n est pair alors ce nombre est le produit de l'entier $\frac{n}{2}$ par l'entier $n+1$. C'est donc un entier.

Deuxième cas. Si n est impair, alors $n+1$ est pair et le nombre $\frac{n(n+1)}{2}$ est le produit de l'entier n par l'entier $\frac{n+1}{2}$; c'est donc également un entier.

Comme tout nombre entier est soit pair soit impair, l'assertion « $\frac{n(n+1)}{2}$ est entier » est démontrée pour tout entier n. $\square$

Raisonnement par récurrence

Pour démontrer qu'une assertion $H(n)$ dépendant d'un entier n est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$, on démontre :

1. $H(0)$ « initialisation »,
2. $\forall n \in \mathbf{N},\ H(n) \Longrightarrow H(n+1)$ « hérédité ».

L'assertion $H(n)$ est *l'hypothèse de récurrence*. Il peut se faire qu'elle ne soit vraie que pour $n \geqslant 1$ ou $n \geqslant 2$, auquel cas, on la démontre pour la plus petite valeur pour laquelle elle est vraie. Voici la démonstration d'une formule à connaître :

Proposition 1.54

Pour tout entier $n \geqslant 1$, la somme des entiers de 1 à n vaut $n(n+1)/2$.

Démonstration. — L'hypothèse de récurrence est :

$$H(n) \ : \qquad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

1. *Initialisation.* Pour $n = 1$:
$$\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1(1+1)}{2}.$$
2. *Hérédité.* Soit n un entier quelconque. Supposons que $H(n)$ est vraie. Ecrivons :
$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + (n+1).$$
En appliquant $H(n)$, on obtient
$$\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1),$$
Le membre de droite s'écrit
$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$
Nous avons donc démontré que
$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$
c'est-à-dire que $H(n+1)$ est vraie.

□

On pourra noter au passage que la proposition donne un nouvelle preuve du fait que $\frac{n(n+1)}{2}$ est un nombre entier !

On peut être amené, pour démontrer $H(n+1)$ à utiliser $H(m)$ pour $m \in \{0,\dots,n\}$, ce qui ne change rien au principe de la récurrence.

$$\forall n \in \mathbf{N}, \Big((\forall m \in \{0,\dots,n\}, \quad H(m)) \implies H(n+1) \Big).$$

Pour deviner quelle est la bonne hypothèse $H(n)$, on doit souvent essayer plusieurs valeurs successives de n : $n = 0$, puis $n = 1$, $n = 2$,... C'est parfaitement inutile pour la démonstration. Attention, ce n'est pas parce qu'une propriété est vraie pour quelques valeurs de n qu'elle est vraie pour tout n. Voici deux exemples.

1. Les nombres 31, 331, 3 331,..., 33 333 331 sont tous premiers. Mais 333 333 331 = $17 \times 19\,607\,843$ ne l'est pas.

2. Pour toutes les valeurs de n allant de 0 à 39, le nombre $n^2 + n + 41$ est premier. Mais le nombre $40^2 + 40 + 41 = 41^2$ ne l'est pas.

***Remarque 1.55.* —** Ajoutons quelques remarques concernant la rédaction des preuves : tout d'abord une bonne preuve en mathématiques doit être claire, concise et complète. Autrement dit, tous les arguments doivent être donnés, mais en allant à l'essentiel. D'autre part, si vous-même ne comprenez pas votre preuve, il peu probable que quelqu'un d'autre, par exemple l'enseignant qui corrige votre copie, la juge satisfaisante.

Utilisation du français : Une preuve mathématique reste avant tout un texte rédigé en français. Il convient donc de respecter les règles grammaticales lorqu'on écrit une preuve, en gardant à l'esprit que chaque phrase d'une preuve doit en plus avoir un sens mathématique précis.

Utilisation de symboles : Une règle générale pour la rédaction d'une preuve est que tout symbole utilisé doit avoir une signification précise. Ainsi si l'on écrit dans une preuve mathématique

$$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 1$$

il faut qu'auparavant f ait été défini, par exemple comme une application à valeur réelle dont l'ensemble de définition contient l'intervalle $[0,1]$. Par contre, le sens de la lettre t est lié à la notation de l'intégrale et ne doit pas avoir été défini auparavant ; autrement dit, cette notation assure qu'ici t désigne un nombre réel qui parcourt l'intervalle $[0,1]$. Notons que dans cette notation la lettre t est *muette* : on peut la remplacer par une autre lettre sans que cela change le sens de l'expression.

Utilisation des quantificateurs universels : Rappelons qu'un des principes des quantificateurs est que si $P(x)$ est une assertion dépendant d'un paramètre x, alors on a l'implication

$$(y \in A \text{ et } \forall x \in A, P(x)) \Rightarrow P(y)$$

Cela signifie que lorsqu'on a démontré une assertion pour tout élément x d'un ensemble A, l'assertion obtenue en substituant chaque occurence de x par un élément donné y de A en découle. Notons à ce sujet que lorsque on remplace une variable par un expression, il convient d'entourer celle-ci de parenthèses pour éviter toute erreur. Par exemple si on applique l'assertion

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad 1 - t^2 = (1-t)(1+t),$$

au nombre réel $3 - \pi$, il convient de l'écrire

$$1 - (3-\pi)^2 = (1-(1-3\pi))(1+(3-\pi)).$$

Utilisation des quantificateurs existentiels : Si on a démontré ou que l'on suppose une assertion avec un quantificateur existentiel $\exists x \in A,\ P(x)$, pour utiliser l'assertion dans la suite de la preuve on peut se donner un tel élément $a \in A$ tel que $P(a)$, ce qui est légitime puisqu'on sait qu'il en existe. Nous en verrons de nombreux exemples dans le chapitre suivant sur les limites de fonctions.

Utilisation de « soit » : Au cours d'une preuve, on utilise souvent des expressions du type « soit $x \in A$ » où A est un ensemble défini auparavant. Cela signifie que, dans la suite de la preuve, la lettre x désigne un élément fixé, mais *arbitraire* de l'ensemble A. En particulier, on ne peut pas modifier x dans le suite de la démonstration et la seule chose qu'on sait de x est qu'il appartient à l'ensemble A. Si on démontre dans la preuve l'assertion $P(x)$ qui dépend de x, alors on a en fait démontré l'assertion

$$\forall x \in A, P(x).$$

Si $Q(x)$ est une assertion dépendant d'une variable x, une variante est l'expression « soit $x \in A$ tel que $Q(x)$ », cette expression a la même signification que « soit $x \in \{\, y \in A \mid Q(y) \,\}$ ».

Il faut prendre garde au fait que l'expression « soit $a \in A$ » inclut la supposition que l'ensemble A est non vide, mais ne garantit pas qu'il le soit réellement. Par contre, si l'on a démontré auparavant l'existence d'un élément dans A, un tel élément a existe, et l'expression revient à en fixer un pour la suite de la démonstration.

Pour conclure, il est presque impossible de donner explicitement toutes les règles expliquant comment rédiger une preuve correcte. Pour apprendre à bien rédiger, il faut tout d'abord lire et comprendre les preuves données en cours qui sont, en principe, des modèles de preuves, c'est pour cela que les preuves données en cours sont une partie essentielle du cours. Ensuite, il faut essayer de rédiger, ce n'est qu'en forgeant qu'on devient forgeron. L'apprentissage du langage mathématique est comme l'apprentissage des autres langages : il faut pratiquer une langue pour la maîtriser.

Fiche de révision

1.1. Principaux symboles introduits dans le chapitre

1.1.1. *Symboles logiques*

$\neg$	non	$\vee$	ou	$\wedge$	et
$\exists$	il existe	$\forall$	quelque soit		

1.1.2. *Théorie des ensembles*

$\in$	appartient	$\subset$	inclus
$\cap$	intersection	$\cup$	réunion

1.2. Tables de vérités de base

P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$
V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	F	F	V

1.3. Règles de négation. — Les lettres P, Q et R désignent des assertions qui dans les cas e) et f) dépendent d'un paramètre. La lettre E désigne un ensemble.

a) $\neg(\neg P)$ équivaut à P ;

b) $\neg(P \vee Q)$ équivaut à $(\neg P) \wedge (\neg Q)$;

c) $\neg(P \wedge Q)$ équivaut à $(\neg P) \vee (\neg Q)$;

d) $\neg(P \Rightarrow Q)$ équivaut à $P \wedge (\neg Q)$;

e) $\neg(\exists x \in E, P(x))$ équivaut à $\forall x \in E, (\neg P(x))$;

f) $\neg(\forall x \in E, P(x))$ équivaut à $\exists x \in E, (\neg P(x))$.

1.4. Composées, images directes et réciproques

Définition 1.56

Soient E, F, et G des ensembles, f une application de E vers F et g une application de F vers G. On définit la *composée* de f par g , notée $g \circ f$, comme l'application de E vers G qui à x associe $g \circ f(x) = g(f(x))$.

Définition 1.57

Soient E et F des ensembles et f une application de E dans F.

1. Soit A un sous-ensemble de E. On appelle *image de A par f* et on note $f(A)$ l'ensemble des images des éléments de A.
$$f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A, f(x) = y\}.$$
2. Soit B un sous-ensemble de F. On appelle *image réciproque de B par f* et on note $f^{-1}(B)$ l'ensemble des éléments de E dont l'image appartient à B.
$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

1.5. Propriétés des applications

Définition 1.58

Soient E et F des ensembles et f une application de E vers F. On dit que f est :

1. *injective* si tout élément de l'ensemble d'arrivée possède *au plus* un antécédent dans l'ensemble de départ.
$$\forall x_1, x_2 \in E, \quad \big(f(x_1) = f(x_2)\big) \Longrightarrow x_1 = x_2.$$
2. *surjective* si tout élément de l'ensemble d'arrivée possède *au moins* un antécédent dans l'ensemble de départ.
$$\forall y \in F, \exists x \in E\ ; \quad f(x) = y.$$
3. *bijective* si tout élément de l'ensemble d'arrivée possède *exactement* un antécédent dans l'ensemble de départ.

Entraînement

1.1. Exercice corrigé. — Nous allons résoudre un exercice type portant sur les raisonnements élémentaires sur les ensembles. Pour cela, nous allons assortir la réponse attendue de commentaires donnant le cheminement pour arriver au raisonnement demandé.

Énoncé

Soient E et F des ensembles, soit f une application de E dans F et soient A et B des parties de F. Démontrer l'égalité

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B).$$

Réflexion préalable (au brouillon). Pour attaquer l'exercice, une fois l'énoncé lu attentivement, il faut d'abord relever les objets qui apparaissent et leur définition : l'exercice porte sur les images réciproques d'une partie par une application. Écrivons donc cette définition pour $f^{-1}(A \cup B)$.

$$f^{-1}(A \cup B) = \{x \in E \,|\, f(x) \in A \cup B\}$$

Notons que nous avons appliqué la définition à la partie $A \cup B$ de l'ensemble d'arrivée : nous avons remplacé B qui est la lettre utilisée dans la définition par $A \cup B$.

Maintenant l'objectif de l'exercice est de démontrer l'égalité entre deux parties de l'ensemble E. Mais, étant donné deux parties X et Y de E, démontrer l'égalité $X = Y$ revient exactement à démontrer l'assertion

$$\forall x \in E, \quad (x \in X) \iff (x \in Y)$$

Cela nous suggère de commencer la démonstration par « Soit $x \in E$ », comme pour toute démonstration d'une assertion débutant par un quantificateur universel.

Solution	*Commentaires*
Soit $x \in E$.	La lettre x désigne un élément *quelconque* de E.
$x \in f^{-1}(A \cup B)$	Nous allons démontrer une suite d'équivalences.
si et seulement si $f(x) \in A \cup B$	Nous utilisons la définition de l'image inverse.

si et seulement si

$$f(x) \in A \text{ ou } f(x) \in B$$

C'est la définition de la réunion

si et seulement si

$$x \in f^{-1}(A) \text{ ou } x \in f^{-1}(B)$$

À nouveau la définition de l'image inverse.

si et seulement si

$$x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$

À nouveau celle de la réunion.

Par conséquent,

$$\forall x \in E, (x \in f^{-1}(A \cup B)) \Leftrightarrow (x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B))$$

On résume l'équivalence démontrée.

Donc

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$

Enfin, on écrit la conclusion.

Vérification finale Il reste à relire la solution envisagée en vérifiant que chacune des expressions mathématiques a bien un sens : ainsi dans $f(x) \in A \cup B$, l'expression $f(x)$ est un élément bien défini de F, *parce qu'on a supposé que x est un élément de E*. Sans cette hypothèse préalable, $f(x)$ n'aurait pas de sens.

En définitive, une réponse à l'exercice est donnée par la colonne de gauche ci-dessus. Comme d'habitude pour les exercices de raisonnement, cela n'est pas l'unique réponse possible.

1.2. Vrai ou faux. — On prendra soin de justifier soigneusement chacune des réponses données : il ne suffit pas d'avoir juste, il faut savoir pourquoi !

Vrai-Faux 1.1. Soit P, Q, R des assertions.

Indiquer quelle assertions sont toujours vraies :

1. ☒ $P \vee \neg P$.
2. ☐ $P \vee \neg Q$.
3. ☒ $P \wedge (P \vee Q) \Longleftrightarrow P$.
4. ☒ $(P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \Longleftrightarrow P$.
5. ☒ $\neg(\neg(P \vee Q) \wedge \neg(Q \vee R)) \Longleftrightarrow P \vee Q \vee R$.
6. ☐ $(P \vee Q) \wedge (Q \vee R) \Longrightarrow (P \vee R)$.

Vrai-Faux 1.2. Soient A, B, C trois sous-ensembles d'un ensemble E.

Indiquer parmi les conditions suivantes celles qui sont suffisantes pour impliquer l'inclusion $A \subset B$:

1. ☐ ${}^{c}A \subset {}^{c}B$.
2. ☒ ${}^{c}A \cup B = E$.
3. ☐ $B - A = \emptyset$.

4. $\boxtimes$ $A \cap {}^cB = \emptyset$.
5. $\square$ $A \cup C \subset B \cup C$.
6. $\boxtimes$ $A \cup C \subset B \cap C$.
7. $\square$ ${}^cA \cup B = B$.

Vrai-Faux 1.3. Soient A, B, C trois sous-ensembles d'un ensemble E. L'ensemble $((A \cup B) \cap C) \cup ((A \cap B) \cap {}^cC)$ est-il toujours ?

1. $\square$ égal à E.
2. $\square$ inclus dans $A \cap B$.
3. $\boxtimes$ inclus dans $A \cup B$.
4. $\boxtimes$ inclus dans $A \cup C$.
5. $\square$ inclus dans $A \cap C$.
6. $\boxtimes$ inclus dans $(A \cap C) \cup B$.
7. $\square$ inclus dans $(A \cap {}^cC) \cup B$.
8. $\boxtimes$ égal à $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C)$.

Vrai-Faux 1.4. Parmi les ensembles d'entiers suivants, lesquels sont égaux au singleton $\{0\}$, lesquels sont différents et pourquoi ?

1. $\square$ $\{n \in \mathbf{N} \mid n \leqslant 1\}$.
2. $\boxtimes$ $\{n \in \mathbf{N} \mid n < 1\}$.
3. $\boxtimes$ $\{n \in \mathbf{N} \mid (n \leqslant 1) \wedge (2 \mid n)\}$.
4. $\square$ $\{n \in \mathbf{N} \mid 1 + n > 0\}$.
5. $\boxtimes$ $\{n \in \mathbf{N} \mid 1 + n = 1\}$.
6. $\boxtimes$ $\{n \in \mathbf{N} \mid \forall m \in \mathbf{N},\ n \leqslant m\}$.
7. $\square$ $\{n \in \mathbf{N} \mid \forall m \in \mathbf{N},\ n < m\}$.
8. $\square$ $\{n \in \mathbf{N} \mid \forall m \in \mathbf{N},\ n \mid m\}$.
9. $\boxtimes$ $\{n \in \mathbf{N} \mid \forall m \in \mathbf{N},\ m \mid n\}$.

Vrai-Faux 1.5. Soient E et F deux ensembles, f une application de E vers F. Soient A et A' deux sous-ensembles de E. Soient B et B' deux sous-ensembles de F. Quelles sont les assertions parmi les assertions suivantes qui sont toujours vraies ?

1. $\boxtimes$ $(A \subset A') \implies (f(A) \subset f(A'))$.
2. $\boxtimes$ $(B \subset B') \implies (f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B'))$.

3. $\boxtimes f(A \cup A') = (f(A) \cup f(A'))$.
4. $\boxtimes f^{-1}(B \cup B') = (f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B'))$.
5. $\square f(A \cap A') = (f(A) \cap f(A'))$.
6. $\boxtimes f^{-1}(B \cap B') = (f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B'))$.
7. $\square f^{-1}(f(A)) = A$.
8. $\square f(f^{-1}(B)) = B$.
9. $\boxtimes f(A \cap f^{-1}(B)) = (f(A) \cap B)$.
10. $\square f(A \cup f^{-1}(B)) = (f(A) \cup B)$.

1.3. Exercices

Exercice 1.1. Soit A et B deux assertions, l'assertion $A \oplus B$ (dire "A ou exclusif B") est vraie si exactement l'une des deux assertions A et B est vraie.

1. Donner la table de vérité de $A \oplus B$ selon les vérités de A et B.
2. Démontrer l'équivalence $A \oplus B \Longleftrightarrow (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$.
3. Démontrer de deux façons différentes l'équivalence $A \oplus B \Longleftrightarrow (A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$.

Exercice 1.2. Pour chacune des assertions ci-dessous, dire quelles variables sont liées. Dire ensuite si l'assertion dépend d'un paramètre. Écrire chaque assertion en français. On dit qu'une assertion est *close* si elle ne dépend pas d'un paramètre. Dire pour chaque assertion close si elle est vraie ou fausse.

1. $x \geqslant y$.
2. $\forall x \in \mathbf{R}, x \geqslant y$.
3. $\forall x \in \mathbf{R}, x \geqslant 0$.
4. $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, x \geqslant y$.
5. $\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, x \geqslant y$.
6. $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{N}, x \geqslant y$.
7. $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{Z}, x \geqslant y$.
8. $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{Z}, (x \geqslant y \text{ et } (\forall z \in \mathbf{Z}, x \geqslant z \Rightarrow y \geqslant z))$.

Exercice 1.3. Dire si les assertions suivantes sont vraies

1. $\exists x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, x + y > 0$.
2. $\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, x + y > 0$.
3. $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, x + y > 0$.

4. $\forall x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, x + y > 0$.

Exercice 1.4. Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E. Ecrire en fonction de A, B, C les ensembles correspondant aux assertions suivantes.

1. x appartient aux trois.
2. x appartient au moins à l'un d'entre eux.
3. x appartient à deux d'entre eux au plus.
4. x appartient à l'un d'entre eux exactement.
5. x appartient à deux d'entre eux au moins.
6. x appartient à l'un d'entre eux au plus.

Exercice 1.5. Soit E un ensemble. Soient A et B deux sous-ensembles de E. On appelle :

- différence de B dans A et on note $A - B$ l'ensemble $A \cap {}^cB$,
- différence symétrique de A et B et on note $A\Delta B$ l'ensemble $(A - B) \cup (B - A)$.

1. Ecrire sous forme logique les propriétés « $x \in A - B$ » et « $x \in A\Delta B$ » à l'aide des propriétés « $x \in A$ » et « $x \in B$ ». Démontrer les égalités ensemblistes suivantes.
2. $A - \emptyset = A\Delta\emptyset = A$.
3. $A - A = A\Delta A = \emptyset$.
4. $A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C)$.
5. $(A\Delta B) \cup (A\Delta C) = (A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$.
6. Donner une représentation sous forme de diagramme de Venn de tous les ensembles définis dans cet exercice.

Exercice 1.6. Représenter les ensembles suivants :

1. $F = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 2x + 3y = 1\}$;
2. $G = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 2x + 3y > 1\}$;
3. $H = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$;
4. $H - G$;
5. $F \cap H$.

Exercice 1.7. Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E.

1. Simplifier l'expression $(A \cap B \cap C) \cup ({}^cA \cap B \cap C) \cup {}^cB \cup {}^cC$.
2. Démontrer que $(A \cap {}^cB) \cap {}^cC = A \cap {}^c(B \cup C) = (A \cap {}^cC) \cap {}^cB$.
3. Démontrer que $(A \cup B \subset {}^cC) \wedge (A \cup C \subset B) \Longleftrightarrow (A \subset B) \wedge (C = \emptyset)$.

Exercice 1.8. Soit $E = \{0, 1\}^2$, $F = \{(0, 0), (1, 1)\}$ et $G = E - F$. Si $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, $(a, b) \neq (0, 0)$ et $c \in \mathbf{R}$, on définit $H_{a,b,c} = \{(x, y) \in \mathbf{R} \mid ax + by + c \geqq 0\}$.

Peut-on avoir $F \subset H_{a,b,c}$ et $G \subset \mathbf{R}^2 - H_{a,b,c}$?

Exercice 1.9. Parmi les parties suivantes de $\mathbf{R}^2$, dire lesquelles sont le graphe d'une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Lorsque l'ensemble est un graphe de fonction, donner son domaine de définition.

1. $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y + x + 1 = 0\}$;
2. $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y^3 = x\}$;
3. $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y^2 + (x+1)^2 = 1\}$;
4. $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y^2 + (x+1)^2 = 1 \text{ et } y \geqslant 0\}$.

Exercice 1.10. Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \sqrt{x+1}$
2. $f(x) = \sqrt{x - x^3}$
3. $f(x) = \frac{1}{4 - x^2}$
4. $f(x) = \sqrt{2 + x - x^2}$
5. $f(x) = \sqrt{\sin(2x)}$

Exercice 1.11. Soient I un intervalle non vide de $\mathbf{R}$ et $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction définie sur I à valeurs réelles. Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

1. La fonction f s'annule.
2. La fonction f est la fonction nulle.
3. f n'est pas une fonction constante.
4. f ne prend jamais deux fois la même valeur.
5. La fonction f présente un minimum.
6. f prend des valeurs arbitrairement grandes.
7. f ne peut s'annuler qu'une seule fois.

Exercice 1.12. Pour chacune des affirmations suivantes, décrire en termes simples les applications $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ qui vérifient ces affirmations ?

1. $\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, f(y) = f(x)$.
2. $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, f(y) = f(x)$.
3. $\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, f(x) < f(y)$.

4. $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, f(x) < f(y)$.
5. $\forall x \in \mathbf{R}, (x \leqslant 0 \Rightarrow f(x) \leqslant 0)$.
6. $\forall x \in \mathbf{R}, (f(x) \leqslant 0 \Rightarrow x \leqslant 0)$.
7. $\forall x \in \mathbf{R}, (x > 0 \Rightarrow f(x) > 0)$.
8. $\forall x \in \mathbf{R}, (x = 0 \Rightarrow f(x) = 0)$.
9. $\forall x \in \mathbf{R}, (f(x) = 0 \Rightarrow x = 0)$.
10. $\forall x \in \mathbf{R}, (f(x) \leqslant 0 \text{ ou } f(x) \geqslant 0)$.

Exercice 1.13. (D'après Lewis Caroll). Parmi les combattants d'une grande bataille, au moins 70% ont perdu un œil, au moins 75% une oreille, au moins 80% un bras, et au moins 85% une jambe. Quelle est la proportion minimale des combattants qui ont perdu les 4 ?

Exercice 1.14. Un centre de langue propose des cours d'Albanais, de Bantou et de Chinois. Sur 93 élèves, 54 étudient l'Albanais, 51 le Bantou ou le Chinois, 27 le Chinois mais pas le Bantou, 3 ni l'Albanais ni le Chinois, et 12 étudient les 3 langues.

1. Combien d'élèves étudient à la fois le Bantou et le Chinois ?
2. Combien d'élèves étudient l'Albanais ou le Bantou mais pas le Chinois ?
3. Combien d'élèves n'étudient ni le Bantou ni le Chinois ?
4. Combien d'élèves étudient une seule langue ?
5. Combien d'élèves étudient exactement deux langues ?

Exercice 1.15. On note $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers naturels, A l'ensemble des nombres pairs, et B l'ensemble des nombres premiers. Exprimer sous forme symbolique les phrases suivantes.

1. Tout nombre pair est divisible par 2.
2. Aucun nombre impair n'est divisible par 2.
3. Il n'existe pas de nombre premier pair distinct de 2.
4. Tout nombre premier distinct de 2 est impair.
5. Il existe un nombre pair qui divise tout nombre pair.
6. Tout nombre premier divise au moins un nombre pair

Exercice 1.16. Représenter sur un diagramme de Venn les ensembles suivants.

- Ensemble Q des quadrilatères.
- Ensemble T des trapèzes.
- Ensemble P des parallélogrammes.
- Ensemble R des rectangles.

- Ensemble L des losanges.
- Ensemble C des carrés.

Exprimer sous forme logique, puis ensembliste, les phrases suivantes.

1. Tout carré est un rectangle.
2. Tout rectangle qui est aussi un losange est un carré.
3. Il existe des parallélogrammes qui ne sont pas des rectangles.
4. Si un losange est un rectangle alors c'est un carré.
5. Une condition nécessaire pour qu'un trapèze soit un carré est que ce soit un rectangle.
6. Pour qu'un trapèze soit un rectangle il suffit que ce soit un carré.
7. Il existe des quadrilatères qui ne sont ni des rectangles, ni des losanges.
8. Il existe des parallélogrammes qui ne sont ni des rectangles, ni des losanges.

Exercice 1.17. Soit E un ensemble et A un sous-ensemble de E. On appelle « fonction indicatrice de A » et on note $\mathbf{I}_A$ l'application de E vers $\{0,1\}$ qui à $x \in E$ associe 1 si $x \in A$, 0 si $x \notin A$. Soient A et B deux sous-ensembles de E. Démontrer les assertions suivantes.

1. $\forall x \in E,\ \mathbf{I}_{^cA}(x) = 1 - \mathbf{I}_A(x)$.
2. $\forall x \in E,\ \mathbf{I}_{A\cap B}(x) = \min\{\mathbf{I}_A(x), \mathbf{I}_B(x)\} = \mathbf{I}_A(x)\,\mathbf{I}_B(x)$.
3. $\forall x \in E,\ \mathbf{I}_{A\cup B}(x) = \max\{\mathbf{I}_A(x), \mathbf{I}_B(x)\} = \mathbf{I}_A(x) + \mathbf{I}_B(x) - \mathbf{I}_A(x)\,\mathbf{I}_B(x)$.

Exercice 1.18. Soient f et g les applications de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ f(n) = 2n \quad g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Déterminer $g\circ f$, $f\circ g$, $g\circ g$, $g\circ g\circ g$.

Exercice 1.19. Ecrire chacune des assertions suivantes comme une implication.
Ecrire et démontrer sa contraposée.

1. Aucun nombre impair n'est la somme de deux nombres impairs.
2. Tout nombre premier strictement supérieur à 2 est impair.
3. Soient m et n deux entiers impairs tels que m divise $2n$. Alors m divise n.
4. Soient m et n deux entiers tels que m divise n. Alors m et $n+1$ sont premiers entre eux (ils n'ont aucun diviseur commun autre que 1).
5. Si le produit de deux entiers strictement supérieurs à 1 est le carré d'un entier alors chacun des deux est le carré d'un entier ou bien ils ont un diviseur commun autre que 1.

Exercice 1.20. On considère le jeu des tours de Hanoï. On dispose de 3 tiges verticales . Sur la première tige sont rangés par ordre de taille croissant n anneaux. Le plus grand est en bas et le plus petit est en haut. Il s'agit d'amener cette tour sur la troisième tige en ne déplaçant qu'un anneau à la fois et en ne posant jamais un anneau sur un anneau de taille plus petite. L'objet de cet exercice est de calculer le nombre minimal de déplacements. On introduit donc la suite (u_n) où u_n donne le nombre minimal pour n anneaux.

On a donc $u_1 = 1$.

Expliquez pourquoi $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

Prouver alors par récurrence que $u_n = 2^n - 1$.

Exercice 1.21. (D'après *250 problèmes de théorie des nombres élémentaire*, de Waclaw Sierpinski) Le but de cet exercice est de démontrer par récurrence que pour tout entier n positif, le nombre $3^{3n+3} - 26n - 27$ est divisible par 169.

1. Vérifier que la propriété voulue est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$.
2. Démontrer (par récurrence ou en utilisant des congruences) que 13 divise $3^{3k} - 1$ pour tout k entier, et en déduire que 169 divise $26(3^{3k} - 1)$ pour tout k entier.
3. Démontrer l'hérédité de la propriété voulue, et conclure.

Exercice 1.22. En utilisant un raisonnement par *disjonction des cas* (ou *cas par cas*), montrer que

1. Soient a et b deux réels,
$$\max(a,b) = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|)$$
$$\min(a,b) = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|)$$
2. Montrer que quelque soit l'entier naturel $n \in \mathbf{N}$, 3 divise $n(n+1)(2n+1)$.
3. Trouver tous les réels x tels que $|x+1| = 3 - |3x - 2|$.

Exercice 1.23. En utilisant un raisonnement direct, montrer que

1. Si f est une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ dérivable et paire, alors sa dérivée f' est impaire.
2. Pour tout élément $x > 0$ de $\mathbf{Q}$, il existe un entier $n > 0$ tel que $n > x$.

Exercice 1.24. En utilisant un raisonnement par l'absurde, montrer que

1. $\frac{\ln(2)}{\ln(3)}$ n'est pas un rationnel.
2. Soit n un entier naturel non nul et $a_1, \dots, a_n$, n réels de somme égale à 1. Alors un de ces réels est plus petit que $\frac{1}{n}$.

Exercice 1.25. En utilisant un raisonnement par analyse et synthèse, montrer que

1. Toute fonction de **R** dans **R** est somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
2. Soient A et B deux points distincts du plan.

   Déterminer l'ensemble des points M tels que l'angle $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ soit égal à $\frac{\pi}{2}$ modulo 2π.

   On montrera que si M est un tel point et si I est le milieu de A, B, $MI^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2$.
3. Soient D_1 et D_2 deux droites parallèles et distinctes du plan orienté. Soit A un point du plan n'appartenant ni à D_1, ni à D_2. Construire un triangle équilatéral ABC tel que B appartient à D_1 et C appartient à D_2. Combien y a t-il de triangles possibles. (*On supposera qu'un tel triangle existe et on cherchera comment construire B ou C en utilisant la rotation de centre A et d'angle* $\frac{\pi}{3}$)

Exercice 1.26. (D'après *Le livre qui rend fou*, de Raymond Smullyan) Un roi joueur désire laisser une chance à des condamnés. Il les amène devant un ensemble de portes derrière chacune desquelles se trouve un tigre ou une princesse. Sur les portes sont placardées des indications. Le prisonnier doit choisir une porte (on suppose que les prisonniers préfèrent les princesses aux tigres).

1. Pour le premier prisonnier il y deux portes. L'une des affiches dit la vérité, l'autre ment.

   Sur la première est écrit : “Il y a une princesse dans cette cellule et un tigre dans l'autre.”

   Sur la seconde : “Il y a une princesse dans une cellule et il y a un tigre dans une cellule.”

   Le prisonnier a-t-il intérêt à ouvrir une porte plutôt que l'autre, et si oui laquelle ?
2. Pour le second prisonnier, toujours deux portes. Cette fois par contre, soit les deux affiches disent la vérité, soit elles mentent toutes les deux.

   Sur la première : “Une au moins des deux cellules contient une princesse.”

   Sur la seconde : “Il y a un tigre dans l'autre cellule.”
3. Pour le troisième prisonnier, les règles sont les mêmes que pour le second.

   Première porte : “Il y a un tigre dans cette cellule ou il y a une princesse dans l'autre.”

   Deuxième porte : “Il y a une princesse dans l'autre cellule.”
4. Maintenant il y a trois portes, et le roi a placé une princesse et deux tigres exactement. De plus, seule une des trois affiches dit la vérité.

   Sur la première porte on lit : “Il y a un tigre ici.”

   Sur la seconde : “Cette cellule contient une princesse.”

   Sur la troisième : “Il y a un tigre dans la seconde ceullule.”

5. Il y a toujours une princesse et deux tigres, mais maintenant l'affiche collée sur la porte de la princesse dit la vérité tandis qu'un au moins des deux autres est fausses.
   Première porte : "Il y a un tigre dans la deuxième cellule."
   Deuxième porte : "Il y a un tigre ici."
   Troisième porte : "La première cellule contient un tigre."

Les exercices marqués d'une astérisque peuvent demander un peu plus de réflexion.

Exercice 1.27.* Soit x, x', y et y' des éléments d'un ensemble.

1. Démontrer l'équivalence
$$\{\{x\},\{x,y\}\} = \{\{x'\},\{x',y'\}\} \Leftrightarrow (x = x') \wedge (y = y').$$
2. Est-il légitime de définir le couple (x, y) par la relation $(x, y) = \{\{x\},\{x,y\}\}$?

Exercice 1.28.* Soient E et F des ensembles. Soit f une application de E dans F. Démontrer que f est bijective si et seulement s'il existe une application g de F vers E telle $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.

Compléments

Ce paragraphe de compléments est réservé à une seconde lecture, son contenu ne fait pas partie du programme de l'unité d'enseignement.

1.1. Ces longues chaînes de raisons. — Voici cinq textes célèbres à propos de l'universalité et de la perfection du langage mathématique.

Platon (428-348 av. J.-C.), *La République*
Tu n'ignores pas, je pense, que ceux qui s'occupent de géométrie, d'arithmétique et autres sciences du même genre, supposent le pair et l'impair, les figures, trois espèces d'angles et autres choses analogues suivant l'objet de leur recherche : qu'ils les traitent comme choses connues, et que quand ils en ont fait des hypothèses, ils estiment qu'ils n'ont plus à en rendre aucun compte ni à eux-mêmes ni aux autres, attendu qu'elles sont évidentes à tous les esprits ; qu'enfin, partant de ces hypothèses et passant par tous les échelons, ils aboutissent par voie de conséquences à la démonstration qu'ils s'étaient mis en tête de chercher.

Galilée (1564-1642), *L'Essayeur*
La philosophie est écrite dans ce très vaste livre qui est éternellement ouvert devant nos yeux – je veux dire l'Univers – mais on ne peut le lire avant d'avoir appris la langue et s'être familiarisé avec les caractères dans lesquels elle est écrite. Elle est écrite en langue mathématique et ses lettres sont des triangles, des cercles et d'autres figures géométriques, moyens sans lesquels il est humainement impossible de comprendre un seul mot, sans lesquels on erre en vain dans un obscur labyrinthe.

Descartes (1596-1650), *Discours de la méthode*
Ces longues chaînes de raisons, toutes simples et faciles, dont les géomètres ont coutume de se servir pour parvenir à leurs plus difficiles démonstrations, m'avaient donné occasion de m'imaginer que toutes les choses, qui peuvent tomber sous la connaissance des hommes, s'entre-suivent en même façon, et que, pourvu seulement qu'on s'abstienne d'en recevoir aucune pour vraie qui ne le soit, et qu'on garde toujours l'ordre qu'il faut pour les déduire les unes des autres, il n'y en peut avoir de si éloignées auxquelles enfin on ne parvienne, ni de si cachées qu'on ne découvre. Et je ne fus pas beaucoup en peine de chercher par lesquelles il était besoin de commencer : car je savais déjà que c'était par les plus simples et les plus aisées à connaître ; et considérant qu'entre tous ceux qui ont ci-devant recherché la vérité dans les sciences, il n'y a eu que les seuls mathématiciens qui ont pu trouver quelques démonstrations, c'est-à-dire quelques raisons certaines et évidentes, je ne doutais point que ce ne fût par les mêmes qu'ils ont examinées ; bien que je n'en espérasse aucune autre utilité, sinon qu'elles accoutumeraient mon esprit à se repaître de vérités et ne se point contenter de fausses raisons.

Pascal (1623-1662), *De l'esprit géométrique*
Je ne puis faire entendre la conduite qu'on doit garder pour rendre les démonstrations convaincantes, qu'en expliquant celle que la géométrie observe, et je n'ai choisi cette science pour y arriver que parce qu'elle seule sait les véritables règles du raisonnement, et, sans s'arrêter aux règles des syllogismes qui sont tellement naturelles qu'on ne peut les ignorer, s'arrête et se fonde sur la véritable méthode de conduire le raisonnement en toutes choses, que presque tout le monde ignore, et qu'il est si avantageux de savoir, que nous voyons par expérience qu'entre esprits égaux et toutes choses pareilles, celui qui a de la géométrie l'emporte et acquiert une vigueur toute nouvelle.

Je veux donc faire entendre ce que c'est que démonstrations par l'exemple de celles de géométrie, qui est presque la seule des sciences humaines qui en produise d'infaillibles, parce qu'elle seule observe la véritable méthode, au lieu que toutes les autres sont par une nécessité naturelle dans quelque sorte de confusion que seuls les géomètres savent extrêmement connaître.

Condillac (1715-1780), *La langue des calculs*
L'algèbre est une langue bien faite, et c'est la seule : rien n'y paraît arbitraire. L'analogie qui n'échappe jamais, conduit sensiblement d'expression en expression. L'usage n'a ici aucune autorité. Il ne s'agit pas de parler comme les autres, il faut parler d'après la plus grande analogie pour arriver à la plus grande précision ; et ceux qui ont fait cette langue, ont senti que la simplicité du style en fait toute l'élégance : vérité peu connue dans nos langues vulgaires.

1.2. Démonstrations non constructives. — L'assertion $\exists x \in \emptyset$ est fausse (par définition l'ensemble vide ne contient aucun élément). Toute implication qui commence par $\exists x \in \emptyset$ est forcément vraie, par définition de l'implication. Il est donc indispensable, avant de se lancer dans la démonstration d'une implication, de vérifier que les hypothèses ne sont pas vides, c'est-à-dire qu'elles sont satisfaites par au moins un objet. Sans cela, on pourrait en déduire tout et n'importe quoi. Par exemple l'assertion suivante est mathématiquement correcte, même si nous ne vous conseillons pas de l'apprendre par cœur :

$$\text{Soit } n \text{ un entier tel que } \forall m \in \mathbf{N},\ n \geqslant m. \text{ Alors } 1 = 0.$$

L'hypothèse est vide : aucun entier n'est supérieur à tous les autres.

Une grande partie de l'activité mathématique consiste à démontrer que des hypothèses ne sont pas vides, c'est-à-dire qu'il existe au moins un objet qui les vérifie. On appelle cela un » théorème d'existence« . Il est très possible de démontrer l'existence d'un objet sans être capable de l'exhiber, ni même de donner un algorithme permettant de le calculer. Voici un exemple célèbre.

Proposition 1.59

Il existe deux nombres irrationnels x et y tels que x^y soit rationnel.

Démonstration. — Nous avons vu que le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel. Essayons $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$: il est soit rationnel, soit irrationnel.

- Si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est rationnel, la proposition est démontrée, puisque $x = y = \sqrt{2}$ convient.
- Si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est irrationnel, posons $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, et $y = \sqrt{2}$. Alors

$$x^y = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2 \in \mathbf{Q},$$

  et la proposition est également démontrée.

$\square$

Rien dans cette démonstration ne permet de savoir si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est ou non rationnel, et donc l'existence de x et y est démontrée sans qu'on puisse exhiber un seul exemple. On dit que la démonstration est « non constructive ».

Certains mathématiciens, à la suite de Luitzen Brouwer (1881–1966), affirment qu'il n'est pas acceptable de démontrer un théorème d'existence sans être capable de construire au moins un objet vérifiant la propriété. Ils considèrent que cela revient à peu près à affirmer que les licornes existent parce qu'on trouve la définition du mot « licorne » dans les dictionnaires. A vous de juger. . .

1.3. L'ensemble de tous les ensembles

Proposition 1.60

L'ensemble de tous les ensembles n'existe pas.

Démonstration. — C'est un exemple de démonstration par l'absurde. Supposons que l'ensemble de tous les ensembles existe, et notons-le E. Notons A l'ensemble

$$A = \{x \in E \mid x \notin x\}$$

Comme E contient tous les ensembles, A appartient à E. Est-ce que A appartient à A ?

- si $A \in A$ alors par définition de A, $A \notin A$,
- si $A \notin A$ alors par définition de A, $A \in A$.

L'assertion $A \in A$ ne peut pas être vraie et fausse en même temps, c'est donc que l'hypothèse de départ (E existe) était fausse. $\square$

Des versions plus prosaïques de ce paradoxe sont connues depuis l'antiquité. Par exemple :

Epiménide le Crétois a dit : tous les Crétois sont des menteurs

ou bien

Le barbier rase tous ceux qui ne se rasent pas eux-mêmes.

D'autres notions, apparemment claires, ne sont pas définies parce qu'elles conduisent à une contradiction. Par exemple :

Le plus petit nombre qu'on ne puisse pas définir en moins de vingt mots

(la phrase ci-dessus comporte quinze mots).

1.4. Le rêve de Hilbert. — Durant l'été 1900 un congrès international de mathématiques se tenait à Paris. Le 8 août, David Hilbert (1862–1943) y donne une conférence mémorable ; selon Charles Hermite, « on n'entendra plus jamais dans les congrès de conférences pareilles ». Qu'a-t-il donc raconté ? Un théorème exceptionnel que lui seul pouvait démontrer, une nouvelle théorie ? Pas du tout. Il s'était contenté d'énoncer 23 problèmes, ceux qui selon lui feraient progresser la recherche en mathématiques durant le siècle qui allait commencer. Le plus impressionnant est que le siècle en question, qui vient de s'achever, lui a très largement donné raison !

Dans plusieurs de ces problèmes, et en particulier dans le dixième, Hilbert pose la question du fondement même du raisonnement mathématique. Il souhaitait rendre explicite un système axiomatique formel « universel ». En ces temps de scientisme triomphant, personne ne doutait que ce soit possible, et que les mathématiques finiraient bien, après tant de victoires sur la nature, par réussir à s'expliquer elles-mêmes.

Hilbert recherchait un système comportant des axiomes et des règles de déduction. Un axiome est une assertion que l'on déclare vraie a priori : par exemple $0 < 1$. Nous avons vu les règles de déduction de la logique, et le moyen de déclarer vraie ou fausse une assertion composée, en utilisant les tables de vérité. Hilbert souhaitait un système

- *consistant :* aucune assertion ne peut être à la fois vraie et fausse
- *complet :* toute assertion est soit vraie soit fausse
- *décidable :* il existe une procédure finie qui permet de vérifier si une assertion donnée est vraie ou fausse.

On peut démontrer qu'un système consistant et complet est forcément décidable. Une procédure de décision consiste à ranger toutes les formules possibles d'abord par ordre de longueur, puis par ordre lexicographique pour les formules de même longueur. Si on doit vérifier l'assertion A, on parcourt les formules une par une en vérifiant pour chacune si elle est valide et si elle entraîne A ou bien $\neg A$. Ce n'est pas très efficace, mais cela conduira forcément au résultat !

En 1931 Kurt Gödel (1906–1978) ruine le rêve de Hilbert : il démontre que dans tout système formel contenant l'arithmétique des entiers, il existe des propriétés telles que l'on ne peut prouver ni qu'elles sont vraies, ni qu'elles sont fausses : on dit qu'elles sont indécidables. La démonstration de Gödel est trop difficile pour être exposée ici, mais elle ressemble dans ses grandes lignes à celle de la proposition 1.60. Il considère un système consistant pour l'arithmétique des entiers. Il construit alors une assertion sur les nombres entiers qui exprime par elle-même qu'elle n'est pas dénombrable : si elle est vraie, alors elle est fausse, et si elle est fausse, alors elle est vraie. Il en déduit que le système ne peut pas être complet.

Parmi les exemples d'assertions indécidables, l'*axiome du choix* est le plus célèbre. Il s'agit de l'assertion affirmant que si un ensemble E est muni d'une relation d'équivalence, alors on peut choisir dans chacune des classes d'équivalence un élément particulier. C'est évident si les classes d'équivalence sont finies ou dénombrables, mais cela ne l'est pas en général. On peut le supposer vrai, ou bien faux, sans jamais aboutir à une contradiction.

Loin de sonner le glas de la recherche sur les systèmes formels, le résultat négatif de Gödel a donné une impulsion décisive à la logique, conduisant en particulier avec Alan Turing (1912–1954), aux fondements de l'informatique théorique.

1.5. Les cardinaux infinis. — Combien y a-t-il d'entiers naturels, de rationnels, de réels ? Une infinité bien sûr. Mais l'infinité des réels est plus grande que l'infinité des rationnels. Pour donner un sens à cette affirmation, il faut d'abord définir ce qu'est un ensemble dénombrable.

Définition 1.61

Un ensemble infini est dit dénombrable s'il existe une application injective de cet ensemble vers $\mathbf{N}$.

Il peut paraître paradoxal que $\mathbf{Q}$ soit dénombrable. C'est pourtant le cas, car il existe une application injective de $\mathbf{Q}$ vers $\mathbf{Z}\times\mathbf{N}$ (à un rationnel p/q on associe le couple (p,q)), et une application bijective de $\mathbf{Z}\times\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$: on compte les éléments de $\mathbf{Z}\times\mathbf{N}$, en commençant par $(0,0)$, puis $(1,0), (0,1), (-1,0)$, puis $(2,0), (1,1), (0,2), (-1,1), (-2,0), \ldots$ Plus généralement, on démontre que le produit et la réunion de deux ensembles dénombrables sont eux-mêmes dénombrables.

Théorème 1.62

L'ensemble des réels n'est pas dénombrable.

Démonstration. — Nous allons démontrer par l'absurde que l'intervalle $[0,1]$ n'est pas dénombrable. Supposons que l'on puisse compter les éléments de $[0,1]$, donc les mettre en bijection avec **N**. Nous aurions $[0,1] = \{x_n,\ n \in \mathbf{N}\}$. A l'élément x_n, nous associons un développement décimal :

$$x_n = 0.a_{n,1}a_{n,2}a_{n,3}\cdots,$$

où les $a_{n,k}$ sont des entiers compris entre 0 et 9. Pour tout n, fixons $b_n \in \{1,\ldots,8\}$, tel que $b_n \neq a_{n,n}$. Considérons le réel x dont le développement décimal est

$$x = 0.b_1b_2b_3\ldots$$

Ce réel est différent de x_n pour tout n, par construction. Il n'a donc pas pu être compté.
(Ce principe de démonstration s'appelle le *procédé diagonal de Cantor*). □

Il y a plus de réels que de rationnels, et donc plus d'irrationnels que rationnels. Parmi les irrationnels, on distingue ceux qui sont solutions d'une équation polynomiale à coefficients entiers, comme $\sqrt{2}$: on les appelle les nombres algébriques. Ils semblent former une grosse masse. Pourtant il n'y a pas plus de polynômes à coefficients entiers que d'entiers : l'ensemble des nombres algébriques est lui aussi dénombrable. Les nombres qui ne sont pas algébriques (on les appelle « transcendants ») forment l'essentiel des réels. Pourtant il est extrêmement difficile de démontrer qu'un réel particulier est transcendant. C'est une des victoires du XIX^e siècle que de l'avoir fait pour π et e.

Existe-t-il des ensembles « intermédiaires » entre **N** et **R**, qui seraient non dénombrables, sans pourtant être en bijection avec **R** ? C'est le premier des 23 problèmes posés par Hilbert en 1900. On a longtemps essayé d'en construire, ou de démontrer qu'il n'en existe pas, avant de s'apercevoir finalement que c'est une assertion indécidable : on peut la supposer vraie, ou bien fausse, sans jamais aboutir à une contradiction. Elle s'appelle « l'hypothèse du continu ».

1.6. Ensembles quotients. — Bertrand Russel (1872–1970) a dit « Les mathématiques sont nées au moment où l'on s'est rendu compte qu'il y avait quelque chose de commun entre un couple de faisans et une paire de claques ». Nous avons vu cela sous une forme moins imagée : le cardinal d'un ensemble peut être défini comme une classe d'équivalence d'ensembles en bijection avec lui.

A la base des mathématiques, comme de toute activité intellectuelle se trouvent les concepts. Concept en mathématiques se dit classe d'équivalence : cela désigne une boîte fictive dans laquelle nous pouvons ranger toutes sortes d'objets, pourvu qu'ils aient une propriété commune. Une fois la boîte remplie, et dûment pourvue d'une étiquette nommant la propriété qu'elle représente, on peut oublier son contenu et ne plus garder que l'étiquette qui pourra d'ailleurs devenir un nouvel objet. Cette faculté d'abstraire des propriétés communes est essentiellement humaine. C'est l'arme qui nous a permis de prendre une telle avance dans la lutte darwinienne pour la survie de l'espèce. C'est sans doute parce que l'homme préhistorique voyait un rapport entre un bras qui frappe et une branche qui tombe qu'il a été capable d'inventer la massue. C'est aussi la base du langage. Tout mot est une classe d'équivalence : « bleu » ou « table » ne sont que des boîtes pouvant contenir des objets différents. Le miracle est que ces classes d'équivalence soient transmissibles : que deux humains différents puissent être globalement d'accord sur les contenus de leurs boîtes.

En mathématiques, les relations d'équivalence servent à fabriquer toutes sortes d'ensembles. Nous n'en donnerons qu'un exemple, la construction de l'ensemble **Q** des rationnels à partir de l'ensemble des entiers.

Un rationnel est le rapport de deux nombres entiers, l'un entier relatif, l'autre entier naturel non nul.

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{p}{q},\ (p,q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^* \right\}$$

Deux couples d'entiers peuvent représenter le même rationnel.

$$\forall p \in \mathbf{Z},\ \forall q \in \mathbf{N}^* \quad \frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} \iff pq' = qp'$$

Oublions maintenant les rationnels et supposons que nous ne connaissions que l'ensemble $E = \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*$. Considérons la relation $\mathscr{R}$ définie sur E de la façon suivante.

$$(p,q)\mathscr{R}(p',q') \iff pq' = qp' .$$

Il est facile de vérifier qu'elle est réflexive, symétrique et transitive : c'est une relation d'équivalence. L'ensemble quotient $E/\mathscr{R}$ est précisément l'ensemble des rationnels. Mais pour que cette définition soit utilisable, il faut la compléter par les opérations dont nous avons besoin : addition, multiplication, ordre total.

1. *addition :* considérons l'application de $E \times E$ vers E qui à deux couples (p,q) et (r,s) associe le couple $(ps+rq, qs)$. C'est bien ce que nous attendons de l'addition des rationnels : $p/q + r/s = (ps+rq)/qs$. Le miracle est que l'application que nous avons définie « passe au quotient » : si $(p',q')\mathscr{R}(p,q)$ et $(r',s')\mathscr{R}(r,s)$, alors $(p's'+r'q', q's')\mathscr{R}(ps+rq, qs)$ (vérifiez... !). Si on la transporte sur l'ensemble quotient, cette application définit l'addition des rationnels.

2. *multiplication :* considérons l'application de $E \times E$ vers E qui à deux couples (p,q) et (r,s) associe le couple (pr, qs). C'est ce que nous attendons de la multiplication des rationnels : $(p/q)(r/s) = (pr)/(qs)$. Comme ci-dessus, si on la transporte sur l'ensemble quotient, l'application définit la multiplication des rationnels.

3. *ordre :* considérons la relation $\mathscr{O}$ sur E définie par :

$$(p,q)\mathscr{O}(r,s) \iff (ps \leqslant rq)$$

> Même technique : une fois transportée sur l'ensemble quotient, la relation $\mathscr{O}$ devient la relation d'ordre total que nous attendons sur $\mathbf{Q}$.

Ce que nous venons de décrire pour l'ensemble des rationnels est un cas particulier d'une procédure très générale, qui consiste à rajouter ce qui manque à un ensemble en définissant une relation d'équivalence sur un ensemble plus gros. Ainsi on peut définir $\mathbf{Z}$ à partir de $\mathbf{N}$, puis $\mathbf{Q}$ à partir de $\mathbf{N}$ et $\mathbf{Z}$, puis $\mathbf{R}$ à partir de $\mathbf{Q}$ puis $\mathbf{C}$ à partir de $\mathbf{R}$. Cela sert aussi pour des espaces de fonctions, et encore bien d'autres objets que vous rencontrerez plus tard.

1.7. Ramener l'infini au fini. — Le principe du raisonnement par récurrence a probablement été formulé clairement pour la première fois par Blaise Pascal (1623-1662), dans son *Traité du triangle arithmétique*. Voici son texte.

Quoique cette proposition ait une infinité de cas, j'en donnerai une démonstration bien courte, en supposant deux lemmes.

Le premier, qui est évident de soi-même, que cette proportion se rencontre dans la seconde base [...]

Le second, que si cette proportion se trouve dans une base quelconque, elle se trouvera nécessairement dans la base suivante.

D'où il se voit qu'elle est nécessairement dans toutes les bases : car elle est dans la seconde base par le premier lemme ; donc par le second elle est dans la troisième base, donc dans la quatrième, et à l'infini.

Limites de fonctions

Agnès Coquio, Emmanuel Peyre et Bernard Ycart

À titre d'illustration des quantificateurs, nous allons présenter une définition correcte de limite d'une application en un point.

Cours

2.1. Inégalités, intervalles. — La notion de nombre réel est supposée connue. On note $\mathbf{R}_+$ l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls, et $\mathbf{R}_+^*$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs. Rappelons que l'inégalité $x < y$ est vérifiée si et seulement si $y - x$ est un nombre réel strictement positif. D'autre part $x \leqslant y$ si et seulement si $x < y$ ou $x = y$. On en déduit les propriétés suivantes :

a) $\forall x, y, z \in \mathbf{R}, (x < y \text{ et } y < z) \Longrightarrow x < z$;

b) $\forall x, y, z \in \mathbf{R}, x < y \Longleftrightarrow x + z < y + z$;

c) $\forall x, y, z \in \mathbf{R}, (x < y \text{ et } 0 < z) \Longrightarrow xz < yz$;

d) $\forall x, y, z \in \mathbf{R}, (x < y \text{ et } z < 0) \Longrightarrow xz > yz$;

e) $\forall x, x', y, y' \in \mathbf{R}, (x < y \text{ et } x' < y') \Longrightarrow x + x' < y + y'$.

Dans l'énoncé d), ne pas oublier que la multiplication par un nombre négatif renverse le sens des inégalités.

Une partie finie $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ admet un plus petit élément m ; cela signifie que $m \in S$ et $\forall s \in S, m \leqslant s$. On le note $\min(x_1, \ldots, x_n)$. De même, il admet un plus grand élément noté $\max(x_1, \ldots, x_n)$.

Rappelons qu'un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$ est une partie I de $\mathbf{R}$ qui a une des formes suivantes :

1) $]a, b[= \{ x \in \mathbf{R} \mid a < x < b \}$ où $a, b \in \mathbf{R}$, cette partie est vide si $b < a$;
2) $]a, +\infty[= \{ x \in \mathbf{R}, x > a \}$ où $a \in \mathbf{R}$;
3) $]-\infty, a[= \{ x \in \mathbf{R}, x < a \}$ où $a \in \mathbf{R}$;
4) $\mathbf{R}$.

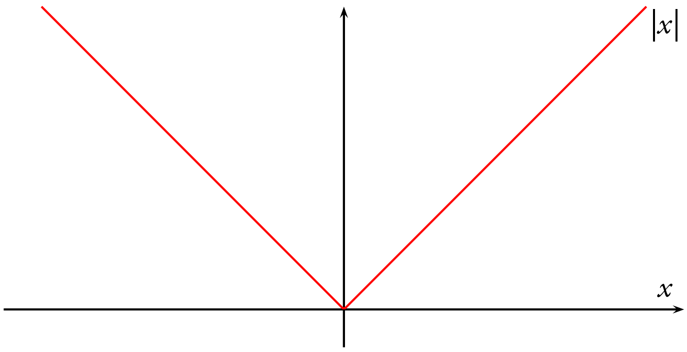
L'intersection de deux intervalles ouvert est un intervalle ouvert. Pour tout intervalle ouvert I et tout $x \in I$, il existe un nombre réel strictement positif ε tel que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset I$. Pour démontrer cela, il suffit de traiter chacun des quatres cas. Dans le cas où $I =]a, b[$, il suffit de prendre $\varepsilon = \min(x-a, b-x)$. Les autres cas se traitent de manière analogue.

2.2. La valeur absolue. — Rappelons que la *valeur absolue* d'un nombre réel x est donné par la formule

$$|x| = \max(x, -x).$$

Son graphe est représenté sur la figure 10.

FIGURE 10. Valeur absolue



Par définition, la valeur absolue est positive :

$$\forall x \in \mathbf{R}, |x| \geqslant 0.$$

et ne s'annule qu'en 0 :

$$\forall x \in \mathbf{R}, |x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$$

D'autre part, la valeur absolue est multiplicative :

$$\forall x, y \in \mathbf{R}, |xy| = |x| \times |y|.$$

Elle vérifie aussi les inégalités triangulaires

Proposition 2.1

Soient x et y des nombres réels, alors on a les deux inégalités

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|$$

et

$$\big||x| - |y|\big| \leqslant |x-y|.$$

Démonstration. — On a les inégalités $x \leqslant |x|$ et $y \leqslant |y|$. Cela implique l'inégalité $x+y \leqslant |x|+|y|$. De même, les inégalités $-x \leqslant |x|$ et $-y \leqslant |y|$ impliquent la relation $-(x+y) \leqslant |x|+|y|$ comme $|x+y|$ est égal à $x+y$ ou $-(x+y)$, la première inégalité triangulaire est démontrée.

Démontrons la seconde. Par la première inégalité, on a les relations

$$|x| = |y+x-y| \leqslant |y| + |x-y|$$

ce qui implique l'inégalité $|x|-|y| \leqslant |x-y|$. En échangeant x et y dans ce raisonnement, on obtient $|y|-|x| \leqslant |y-x| = |x-y|$. Comme $||x|-|y||$ vaut $|x|-|y|$ ou $|y|-|x|$ la seconde inégalité triangulaire est démontrée. □

2.3. Définition de la limite d'une fonction. — Dans cette partie, on considérera une fonction f à valeurs réelles définie sur une partie $\mathscr{D}_f$ de $\mathbf{R}$.

Définition 2.2

Soit $\mathscr{D}$ une partie de $\mathbf{R}$. Un élément $a \in \mathbf{R}$ est *adhérent* à $\mathscr{D}$ si pour tout intervalle ouvert I contenant a, l'intersection de I avec $\mathscr{D}$ est non vide.

Si $\mathscr{D}$ est une réunion finie d'intervalles, un élément a de $\mathbf{R}$ est adhérent à $\mathscr{D}$ si et seulement si $a \in \mathscr{D}$ ou si a est une borne d'un des intervalles composant $\mathscr{D}$.

Par exemple si $\mathscr{D} =]-1,7]$, l'ensemble des points adhérents à $\mathscr{D}$ est $[-1,7]$.

Si $\mathscr{D} =]-5,-1[\cup]-1,+\infty[$, l'ensemble des points adhérents à $\mathscr{D}$ est $[-5,+\infty[$.

Définition 2.3

Soit a un point adhérent à $\mathscr{D}_f$. Soit $l \in \mathbf{R}$.

On dit que la fonction f *a pour limite l en a* ou que $f(x)$ *tend vers l* quand x tend vers a si elle vérifie les conditions équivalentes suivantes :

(i) Pour tout intervalle ouvert J contenant l, il existe un intervalle ouvert I contenant a tel que $f(I \cap \mathscr{D}_f) \subset J$;

(ii) On a

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbf{R}_+^*, \forall x \in \mathscr{D}_f,\ |x-a| < \eta \Longrightarrow |f(x)-l| < \varepsilon.$$

On note alors

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l.$$

On prendra garde au fait que, dans l'assertion (ii) le nombre réel η dépend de la fonction f, du point a et du nombre réel ε. Si on applique plusieurs fois la définition en changeant un de ses paramètres, il faut prendre en compte cette dépendance en notant de façon différenciée chacun des nombres réels η obtenus (par exemple en utilisant des indices η_1, η_2,... ou des exposants η, η',...).

Preuve de l'équivalence entre les deux assertions. — Commençons par démontrer l'implication (i)$\Rightarrow$(ii). Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$, l'intervalle $]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$ est un un intervalle ouvert qui contient l. L'assertion (i) assure alors qu'il existe un intervalle ouvert I contenant a tel que $f(I \cap \mathscr{D}_f) \subset]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$. Cette inclusion est équivalente à l'assertion

$$\forall x \in \mathscr{D}_f, \quad x \in I \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Comme a appartient à l'intervalle ouvert I, il existe $\eta \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $]a-\eta, a+\eta[\subset I$. Il en résulte que

$$\forall x \in \mathscr{D}_f, \quad |x-a| < \eta \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

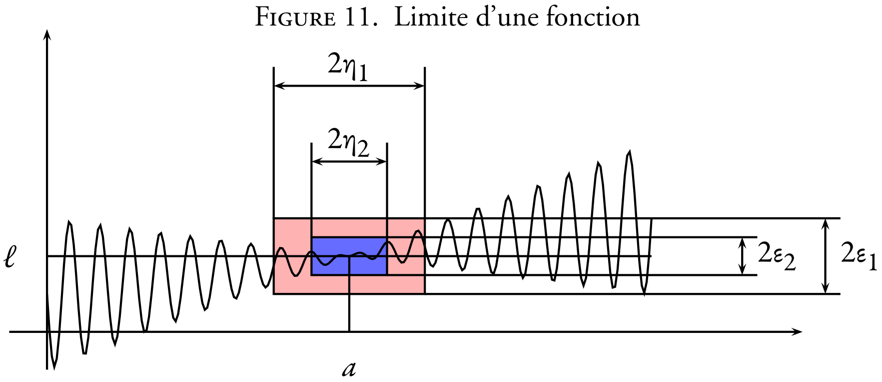
ce qui nous donne l'assertion (ii).

Démontrons maintenant la réciproque. Soit J un intervalle ouvert contenant l. Il existe un nombre réel ε strictement positif tel que $]l-\varepsilon, l+\varepsilon[\subset J$. L'assertion (ii) nous fournit un nombre $\eta \in \mathbf{R}_+^*$ tel que

$$\forall x \in \mathscr{D}_f, \quad |x-a| < \eta \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon. \tag{25}$$

Posons $I =]a-\eta, a+\eta[$. C'est un intervalle ouvert contenant a. L'assertion (25), implique l'inclusion $f(I \cap \mathscr{D}_f) \subset J$. □

Figure 11. Limite d'une fonction



Définition 2.4

La limite l si elle existe est unique. On notera :

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

et on appelle l *la* limite de f au point a.

Démonstration. — Démontrons l'assertion d'unicité par l'absurde. Supposons que les nombres réels distincts l et l' conviennent. Soit $\varepsilon = (l' - l)/2$. Comme $l \neq l'$, ce nombre réel est strictement positif. On applique la définition à l : soit $\eta \in \mathbf{R}_+^*$ tel que

$$\forall x \in \mathscr{D}_f,\ |x - a| < \eta \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon. \tag{26}$$

En appliquant maintenant la définition à l', on obtient un nombre $\eta' \in \mathbf{R}_+^*$, éventuellement distinct de η, tel que

$$\forall x \in \mathscr{D}_f,\ |x - a| < \eta' \Longrightarrow |f(x) - l'| < \varepsilon. \tag{27}$$

Soit $\eta'' = \min(\eta, \eta')$. Ce nombre est strictement positif. Comme a est supposé adhérent à $\mathscr{D}_f$, il existe un élément $x_0 \in \mathscr{D}_f \cap]a - \eta'', a + \eta''[$. Cette élément x_0 satisfait donc $|x_0 - a| < \eta$ et $|x_0 - a| < \eta'$. On peut donc utiliser les assertions (26) et (27) si bien que $|f(x_0) - l| < \frac{|l-l'|}{2}$ et $|f(x_0) - l'| < \frac{|l-l'|}{2}$. mais par l'inégalité triangulaire

$$|l - l'| \leqslant |l - f(x_0)| + |f(x_0) - l'| < 2\frac{|l - l'|}{2}$$

et on obtient une contradiction. Donc il y a au plus un nombre l qui convient. □

On notera que si $a \in \mathscr{D}_f$ alors $f(a) \in f(I)$ pour tout intervalle I contenant a, si bien que la seule valeur possible pour la limite l est $f(a)$.

On vérifie facilement que démontrer $\lim_{x \to a} f(x) = l$ revient à démontrer que $\lim_{x \to a} f(x) - l = 0$ et que démontrer $\lim_{x \to a} f(x) = l$ revient à démontrer que $\lim_{x \to 0} f(x + a) = l$.

2.4. Quelques exemples. — Pour illustrer la définition nous allons considérer la limite de deux fonctions f classiques. Les exemples qui suivent peuvent être considéré comme des exercices corrigés. Le schéma de preuve est à chaque fois le même : on fixe $a \in \mathscr{D}_f$ et un nombre réel ε strictement positif et on doit produire un nombre η strictement positif, dépendant de a et ε de sorte que

$$\forall x \in \mathscr{D}_f, \quad |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Pour cela, il convient de trouver une majoration de $|f(x)-f(a)|$ en termes de $|x-a|$. Dans l'exemple 2.6, l'étude préliminaire correspond au travail qu'on peut faire au brouillon avant de pouvoir rédiger la preuve de la convergence.

Exemple 2.5. — Considérons d'abord le cas basique de l'application $\mathrm{Id}_{\mathbf{R}} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ donnée par $x \mapsto x$. Soit $a \in \mathbf{R}$ et soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$. Posons [1] $\eta = \varepsilon$. Par hypothèse, $\eta \in \mathbf{R}_+^*$. Soit $x \in \mathbf{R}$ tel que $|x-a| < \eta$ alors

$$|\mathrm{Id}_{\mathbf{R}}(x) - \mathrm{Id}_{\mathbf{R}}(a)| = |x-a| < \eta = \varepsilon.$$

On a donc démontré que pour tout $a \in \mathbf{R}$, on a

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbf{R}_+^*, \forall x \in \mathbf{R}, \quad |x-a| \Longrightarrow |\mathrm{Id}_{\mathbf{R}}(x) - \mathrm{Id}_{\mathbf{R}}(a)| \leqslant \varepsilon.$$

et donc

$$\mathrm{Id}_{\mathbf{R}}(x) \xrightarrow[x \to a]{} \mathrm{Id}_{\mathbf{R}}(a).$$

Exemple 2.6. — Passons à l'application de $\mathbf{R}^*$ dans $\mathbf{R}$ donnée par $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Étude préliminaire. Soit $a, x \in \mathbf{R}^*$. On peut majorer $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right|$ de la façon suivante :

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| = \left|\frac{a-x}{xa}\right| = \frac{|x-a|}{|x|\,|a|}. \tag{28}$$

Une des difficultés de cet exemple est que pour majorer $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right|$, on a besoin de majorer $\frac{1}{|x|}$ c'est-à-dire minorer $|x|$. Mais la seconde inégalité triangulaire fournit les inégalités suivantes :

$$|x| = |a-(a-x)| \geqslant \big||a| - |x-a|\big| \geqslant |a| - |x-a|. \tag{29}$$

Par conséquent, si $|x-a| < \frac{|a|}{2}$, on a $|x| > \frac{|a|}{2}$.

Preuve de la limite. Soit $a \in \mathbf{R}^*$ et soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$. On pose

$$\eta = \min\left(\frac{|a|}{2}, \frac{|a|^2}{2}\varepsilon\right).$$

Ce nombre est bien strictement positif. Soit $x \in \mathbf{R}^*$ tel que $|x-a| < \eta$. Comme $|x-a| < \eta \leqslant \frac{|a|}{2}$, les inégalités (29) donnent

$$|x| \geqslant |a| - |x-a| > \frac{|a|}{2}.$$

1. Insistons sur le fait que a et ε nous sont donnés, et que nous ne pouvons pas les modifier, mais que nous avons la liberté de choisir η comme nous voulons, du moment qu'il est strictement positif.

Donc, en reprenant (28),

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right| \leqslant \frac{|x-a|}{|x|\,|a|} < \frac{2}{|a|^2}\eta \leqslant \varepsilon.$$

En conclusion, on a démontré que, pour tout $a \in \mathbf{R}^*$,

$$\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to a]{} \frac{1}{a}.$$

2.5. Opérations sur les limites. — La notion de limite se combine avec les opérations sur les fonctions comme on l'attend. Nous énonçons les résultats dans le théorème 2.8.

Notation 2.7

Soient f et g des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définies respectivement sur $\mathscr{D}_f$ et $\mathscr{D}_g$. La fonction $f+g$ (resp. fg) est la fonction définie sur $\mathscr{D}_f \cap \mathscr{D}_g$ par $x \mapsto f(x)+g(x)$ (resp. $x \mapsto f(x)g(x)$) et s'appelle la *somme* (resp. le *produit*) des fonctions f et g.

Théorème 2.8

Soient f et g des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définies respectivement sur $\mathscr{D}_f$ et $\mathscr{D}_g$. On suppose que a est un nombre réel adhérent à $\mathscr{D}_f \cap \mathscr{D}_g$. Soient l et l' des nombres réels. On fait l'hypothèse suivante :

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l \quad \text{et} \quad g(x) \xrightarrow[x\to a]{} l'.$$

Alors

$$(f+g)(x) \xrightarrow[x\to a]{} l+l' \quad \text{et} \quad (fg)(x) \xrightarrow[x\to a]{} l\,l'.$$

Si une application est constante, sa limite en tout point est égale à cette constante. Comme cas particulier du théorème 2.8, si $f(x)$ tend vers l quand x tend vers a, et λ est un réel quelconque, alors la limite en a de $\lambda f(x)$ est λl.

Démonstration du théorème 2.8. — Démontrons l'assertion a). Soit ε un nombre réel strictement positif. On applique la définition de la limite aux fonctions f et g et au nombre réel strictement positif $\varepsilon/2$. Il existe donc des nombres réels strictement positifs η_1 et η_2 tels que

$$\forall x \in \mathscr{D}_f, \quad |x-a| < \eta_1 \Longrightarrow |f(x)-l| < \frac{\varepsilon}{2}$$

et
$$\forall x \in \mathscr{D}_g, \quad |x-a| < \eta_2 \Longrightarrow |g(x)-l'| < \frac{\varepsilon}{2}.$$
On pose $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$. Soit $x \in \mathscr{D}_f \cap \mathscr{D}_g$ tel que $|x-a| < \eta$. On a alors $|f(x)-l| < \frac{\varepsilon}{2}$ et $|g(x)-l'| < \frac{\varepsilon}{2}$. On utilise alors la première inégalité triangulaire :
$$|(f+g)(x)-(l+l')| \leqslant |f(x)-l| + |g(x)-l'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$
On a donc démontré l'assertion
$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbf{R}_+^*, \quad |(f+g)(x)-(l+l')| < \varepsilon.$$
ce qui prouve que l'application $f+g$ admet la limite $l+l'$ en a.

Démontrons l'assertion b) qui est légèrement plus subtile. L'idée est d'abord d'écrire l'égalité
$$(fg)(x) - ll' = (f(x)-l)g(x) + l(g(x)-l')$$
pour tout $x \in \mathscr{D}_f \cap \mathscr{D}_g$. On veut donc majorer la valeur absolue du terme de droite en utilisant l'inégalité triangulaire. Pour cela on a besoin aussi de majorer $g(x)$ lorsque x est proche de a.

Soit ε un nombre réel strictement positif. En appliquant la définition à l'application g et au nombre réel strictement positif 1, on obtient $\eta_0 \in \mathbf{R}_+^*$ tel que
$$\forall x \in \mathscr{D}_g, \quad |x-a| < \eta_0 \Longrightarrow |g(x)-l'| < 1.$$
Notons que pour tout $x \in \mathscr{D}_g$, l'assertion $|g(x)-l'| < 1$ implique $|g(x)| < |l'|+1$. On applique maintenant la définition à f et au nombre strictement positif $\frac{\varepsilon}{2|l'|+2}$, on obtient un nombre $\eta_1 \in \mathbf{R}_+^*$ tel que
$$\forall x \in \mathscr{D}_f, \quad |x-a| < \eta_1 \Longrightarrow |f(x)-l| < \frac{\varepsilon}{2|l'|+2}.$$
De même la définition pour g fournit $\eta_2 \in \mathbf{R}_+^*$ tel que
$$\forall x \in \mathscr{D}_g, \quad |x-a| < \eta_2 \Longrightarrow |g(x)-l'| < \frac{\varepsilon}{2|l|+2}.$$
On pose $\eta = \min(\eta_0, \eta_1, \eta_2)$ c'est un nombre strictement positif. Soit $x \in \mathscr{D}_f \cap \mathscr{D}_g$ tel que $|x-a| < \eta$. On obtient les inégalités
$$\begin{aligned} |fg(x)-ll'| &\leqslant |f(x)-l| \times |g(x)| + |l| \times |g(x)-l'| \\ &< |f(x)-l| \times (|l'|+1) + (|l|+1) \times |g(x)-l'| \\ &< 2 \times \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ceci démontre que la fonction fg admet la limite ll' en a. $\square$

Remarque 2.9. — Dans la démonstration de l'assertion b), il n'est pas évident de deviner *a priori* que la bonne borne à utiliser pour f est $\frac{\varepsilon}{2|l'|+2}$. Pour concevoir cette preuve, une méthode consiste à l'écrire au brouillon en utilisant des paramètres ε_1 et ε_2, avec lesquels on teste les calculs, en définitive on se rend compte qu'il suffit de trouver des nombres réels ε_1 et ε_2 strictement positifs tels que

$$\varepsilon_1(|l'|+1)+(|l|+1|)\varepsilon_2 \leqslant \varepsilon$$

et les valeurs $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2|l'|+2}$ et $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2|l|+2}$ conviennent (mais ce n'est pas le seul choix possible). On peut alors rédiger la preuve « au propre » avec de bonnes valeurs pour ε_1 et ε_2. Ce jeu avec les ε est surnommé « couper les ε en 4 », sans doute en référence au lien entre ε et cheveu.

Le résultat attendu sur la composition des limites se vérifie.

Lemme 2.10. — *Soit f une application de $\mathcal{D}_f$ dans $\mathbf{R}$. Soient a un point adhérent à $\mathcal{D}_f$ et $l \in \mathbf{R}$. On suppose que l'application f admet la limite l au point a. Alors l est adhérent à l'image de f, c'est-à-dire à $f(\mathcal{D}_f)$.*

Démonstration. — Soit J un intervalle ouvert contenant l. Par l'assertion (i) de la définition de la limite, il existe un intervalle ouvert I de $\mathbf{R}$ contenant a tel qu'on ait l'inclusion $f(I \cap \mathcal{D}_f) \subset J$. Mais $f(I \cap \mathcal{D}_f)$ est contenu dans l'image de f et donc

$$f(I \cap \mathcal{D}_f) \subset J \cap f(\mathcal{D}_f).$$

D'autre part, comme a est adhérent à $\mathcal{D}_f$, l'ensemble $I \cap \mathcal{D}_f$ est non vide. Il en est donc de même de son image par f et donc de l'intersection $J \cap f(\mathcal{D}_f)$. $\square$

Théorème 2.11

Soient a et b deux réels. Soit f et g deux fonctions telles que $f(\mathcal{D}_f) \subset \mathcal{D}_g$. On suppose que a est un point adhérent à $\mathcal{D}_f$. Soient $b, l \in \mathbf{R}$. On suppose :

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \quad \text{et} \quad \lim_{y \to b} g(y) = l\,.$$

Alors

$$\lim_{x \to a} g \circ f(x) = l\,.$$

Démonstration. — Notons tout d'abord que par le lemme, l'hypothèse $\lim_{x\to a} f(x) = b$ entraîne que b est adhérent à l'image de f et donc à l'ensemble $\mathscr{D}_g$. Soit J un intervalle ouvert contenant l. Par la condition (i) de la définition appliquée à g, il existe un intervalle ouvert I_1 contenant b tel que $g(I_1 \cap \mathscr{D}_g) \subset J$. On applique alors la définition à f et à l'intervalle ouvert I_1. Il existe donc un bel intervalle ouvert I_2 tel que $f(I_2 \cap \mathscr{D}_f) \subset I_1$. On en déduit les inclusions

$$(g\circ f)(I_2 \cap \mathscr{D}_f) = g(f(I_2 \cap \mathscr{D}_f)) \subset g(I_1 \cap \mathscr{D}_g) \subset J.$$

Cela démontre que $g \circ f$ admet la limite l en a. □

Définition 2.12

Soient f et g des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, définies respectivement sur $\mathscr{D}_f$ et $\mathscr{D}_g$. Alors le quotient f/g est la fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie sur

$$\mathscr{D}_{f/g} = \{\, x \in \mathscr{D}_f \cap \mathscr{D}_g \mid g(x) \neq 0 \,\}$$

par

$$\forall x \in \mathscr{D}_{f/g}, \quad (f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Cette fonction se note également $\frac{f}{g}$.

Théorème 2.13

Soit f et g des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Soit a un point adhérent à $\mathscr{D}_f \cap \mathscr{D}_g$. Soit l un nombre réel. Soit l' un nombre réel *non nul*. On fait l'hypothèse suivante

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l \quad \text{et} \quad g(x) \xrightarrow[x\to a]{} l'.$$

Alors a est adhérent à $\mathscr{D}_{f/g}$ et

$$\frac{f}{g}(x) \xrightarrow[x\to a]{} \frac{l}{l'}.$$

Démonstration. — Démontrons tout d'abord que le nombre a est adhérent à $\mathscr{D}_{f/g}$. En applicant la définition de la limite à g et au nombre strictement positif $|l'|$, on obtient un nombre réel η

tel que, pour tout $x \in \mathscr{D}_g$ qui vérifie $|x-a| < \eta$, on ait $|g(x)-l'| < |l'|$. Cela donne les inégalités

$$(30) \qquad |g(x)| = |l' - (l' - g(x))| \geqslant |l'| - |l' - g(x)| > |l'| - |l'| = 0.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme a est adhérent à $\mathscr{D}_f \cap \mathscr{D}_g$, il existe un élément $x \in \mathscr{D}_f \cap \mathscr{D}_g$ tel que $|x-a| < \min(\eta, \varepsilon)$. Par (30), cela implique que $g(x) \neq 0$. Donc $x \in \mathscr{D}_{f/g}$ et $|x-a| < \varepsilon$. Donc a est adhérent à $\mathscr{D}_{f/g}$.

Démontrons maintenant le résultat sur la limite. Par le théorème sur la composée de limite de fonctions appliquée à l'application de $\mathscr{D}_{f/g}$ dans $\mathbf{R}^*$ donnée par $x \mapsto g(x)$ et à l'application de $\mathbf{R}^*$ dans $\mathbf{R}$ donnée par $x \mapsto 1/x$, le quotient $1/g(x)$ tend vers $1/l'$ lorsque x tend vers a. En multipliant avec la fonction f, on obtient alors le résultat attendu pour le quotient f/g. $\square$

2.6. Limites sur une partie du domaine de définition. — On est souvent amené à étudier la fonction sur un domaine D plus petit que le domaine de définition de f. C'est pourquoi, on a la notion de *restriction* d'une fonction. Soit f une application à valeur réelle définie sur $\mathscr{D}_f$. Alors pour toute partie $D \subset \mathscr{D}_f$, la restriction de f à D, noté $f_{|D}$ sera l'application $f_{|D} : D \to \mathbf{R}$ définie par $f_{|D}(x) = f(x)$ pour tout $x \in D$.

Proposition 2.14

Soit f une application de $\mathscr{D}_f$ dans $\mathbf{R}$, soit D une partie de $\mathscr{D}_f$ et soit a un point adhérent à D. Soit $l \in \mathbf{R}$. Si $f(x)$ tend vers l quand vers x tend vers a, alors $f_{|D}$ admet la limite l en a.

En particulier on utilisera les notations suivantes :

a) On suppose que a est adhérent à $\mathscr{D}_f - \{a\}$. Lorsque la restriction de f à la partie $\mathscr{D}_f - \{a\}$ admet un limite l en a, cette limite est notée

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x)$$

et s'appelle la *limite épointée* de f en a.

b) On suppose que a est adhérent à $\mathscr{D}_f \cap\,]-\infty, a[$. Lorsque la restriction de f à la partie $\mathscr{D}_f \cap\,]-\infty, a[$ admet un limite l en a, cette limite est notée

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to a^-} f(x)$$

et s'appelle la *limite à gauche* de f en a. On définit de manière analogue la *limite à droite*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to a^+} f(x)$$

de f en a.

Remarque 2.15. — Les limites de restrictions de la fonction peuvent être utilisées pour démontrer aisément qu'une fonction n'admet pas de limite en un point. En effet, supposons que le domaine $\mathscr{D}_f$ contient deux parties A et B de sorte que le point a soit adhérent à la fois à A et à B, que les restrictions $f_{|A}$ et $f_{|B}$ admettent des limites en a et que ces limites diffèrent :

$$\lim_{x \to a} f_{|A} \neq \lim_{x \to a} f_{|B}.$$

Démontrons alors par l'absurde que f n'admet pas de limite en a. Si f admettait une limite l en a, par la proposition 2.14, on aurait

$$\lim_{x \to a} f_{|A} = l = \lim_{x \to a} f_{|B},$$

ce qui contredit les hypothèses faites sur ces limites.

En particulier, si f admet des limites à droite et à gauche en un point a, mais que ces limites diffèrent, alors f n'admet pas de limite en a.

Certains ouvrages, utilisant des conventions plus anciennes, définissent la limite comme la limite épointée. Insistons donc une fois de plus sur le fait que, dans ce cours, si $a \in \mathscr{D}_f$ et que f admet une limite en a, alors cette limite est nécessairement $f(a)$.

2.7. Critères de convergence. — Pour démontrer qu'une fonction f admet une limite l en un point a, on choisira de préférence la méthode la plus simple. On peut en général procéder de la façon suivante :

1. On essaye d'obtenir la limite en utilisant les opérations sur les limites et le théorème sur les limites des applications composées ;
2. On essaye d'utiliser les critères de ce paragraphe ;
3. En dernier recours, si aucune des méthodes précédentes ne s'appliquent, on utilise la définition.

Théorème 2.16 (Théorème des gendarmes)

Soient f, g et h des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ de domaines de définition respectifs $\mathcal{D}_f$, $\mathcal{D}_g$ et $\mathcal{D}_h$. Soit a un nombre réel adhérent à $\mathcal{D}_f$ et soit $l \in \mathbf{R}$. On fait les trois hypothèses suivantes :

(i) On a l'inclusion $\mathcal{D}_f \subset \mathcal{D}_g \cap \mathcal{D}_h$;

(ii) Il existe un intervalle ouvert I de $\mathbf{R}$ contenant a tel que
$$\forall x \in I \cap \mathcal{D}_f, \quad g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x);$$

(iii) Les fonctions g et h admettent la même limite l en a.

Alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.

Démonstration. — Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$. En appliquant la définition de la limite à g (resp. h) et au nombre ε, on obtient $\eta_1 \in \mathbf{R}_+^*$ (resp. $\eta_2 \in \mathbf{R}_+^*$) tel que
$$\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad |x-a| < \eta_1 \Longrightarrow |g(x)-l| < \varepsilon,$$
(resp.
$$\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad |x-a| < \eta_2 \Longrightarrow |h(x)-l| < \varepsilon).$$
D'autre part comme I est un intervalle ouvert contenant a, il existe η_3 tel que $]\eta_3 - a, a+\eta_3[\subset I$. Posons $\eta = \min(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$. Soit $x \in \mathcal{D}_f$ tel que $|x-a| < \eta$. alors x vérifie $|g(x)-l| < \varepsilon$ et $|h(x)-l| < \varepsilon$. D'autre part $x \in I$ ce qui donne les inégalités
$$g(x)-l \leqslant f(x)-l \leqslant h(x)-l$$
et donc
$$-(h(x)-l) \leqslant -(l-f(x)) \leqslant -(g(x)-l)$$
Par conséquent, $|l-f(x)| \leqslant \max(h(x)-l, -(g(x)-l)) < \varepsilon$. Ceci prouve que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers a. $\square$

Proposition 2.17

Soit f une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Soit $\delta \in \mathbf{R}_+^*$. Soient a un nombre réel adhérent à $\mathcal{D}_f$ et $l \in \mathbf{R}$. Soit g une application de $[0, \alpha[$ dans $\mathbf{R}$. On suppose que $g(x)$ tend vers 0 quand x

tend vers 0 et que
$$\forall x \in \mathscr{D}_f, \quad |x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x)-l| < g(|x-a|).$$
Alors f tend vers l quand x tend vers a.

La preuve est laissée en exercice au lecteur.

2.8. Continuité. — Donnons maintenant la définition de la continuité.

Définition 2.18

Soit f une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Soit $\mathscr{D}_f$ son domaine de définition. On dira que f est *continue* si, pour tout $a \in \mathscr{D}_f$, on a
$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)\,.$$

Exemples 2.19. **—** Une application constante est continue. Par les exemples 2.5 et 2.6 les fonctions $\mathrm{Id}_{\mathbf{R}}$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ sont continues. Le lecteur vérifiera en exercice que l'application valeur absolue, c'est-à-dire l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ donnée par $x \mapsto |x|$, est également continue. La restriction d'une application continue est continue.

Proposition 2.20

La somme, le produit et le quotient de fonctions continues sont continues. La composée d'applications continue est continue.

Démonstration. — Cela découle des résultats correspondants sur les limites, c'est-à-dire des théorèmes 2.8, 2.13 et 2.11. □

Exemple 2.21. **—** Passons à l'application *racine carrée* définie de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$ par $x \mapsto \sqrt{x}$. Nous allons distinguer deux cas suivant que $a = 0$ ou $a \neq 0$

Étude préliminaire. Soit $a \in \mathbf{R}_+^*$ et $x \in \mathbf{R}$. On peut majorer $\left|\sqrt{x}-\sqrt{a}\right|$ de la façon suivante :

(31) $$\left|\sqrt{x}-\sqrt{a}\right| = \left|\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\right| = \frac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}.$$

D'autre part, on a l'inégalité $\sqrt{x}+\sqrt{a} \geqslant \sqrt{a}$.

Preuve de la limite. Soit $a \in \mathbf{R}_+^*$ et soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$. On pose

$$\eta = \varepsilon\sqrt{a}.$$

Ce nombre est bien strictement positif. Soit $x \in \mathbf{R}_+$ tel que $|x-a| < \eta$. Donc, en reprenant (31),

$$\left|\sqrt{x}-\sqrt{a}\right| \leqslant \frac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} \leqslant \frac{|x-a|}{\sqrt{a}} < \frac{1}{\sqrt{a}}\eta = \varepsilon.$$

En conclusion, on a démontré que, pour tout $a \in \mathbf{R}_+^*$,

$$\sqrt{x} \xrightarrow[x \to a]{} \sqrt{a}.$$

Traitons maintenant le cas où $a = 0$. Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$, posons $\eta = \varepsilon^2$. Soit $x \in \mathbf{R}_+$ tel que $|x-0| < \eta$ alors, comme la racine carrée est une application strictement croissante, on a les inégalités

$$\left|\sqrt{x}-\sqrt{0}\right| = \left|\sqrt{x}\right| < \sqrt{\eta} = \varepsilon.$$

Donc

$$\sqrt{x} \xrightarrow[x \to 0]{} \sqrt{0}.$$

Ceci conclut la démonstration de la continuité de l'application racine carrée.

Définition 2.22

Une fonction f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ est dite polynomiale s'il existe un entier d et $d+1$ nombres réels $a_0, \ldots, a_d$ de sorte que

$$\forall x \in \mathscr{D}_f, \quad f(x) = a_d x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \cdots + a_0. \tag{32}$$

Proposition 2.23

Un fonction polynomiale est continue.

Démonstration. — Démontrons tout d'abord par récurrence sur d que pour tout $d \in \mathbf{N}$ l'application $P_d : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $x \mapsto x^d$ est continue. Si $d = 0$ ou $d = 1$ cela résulte de l'exemple 2.19. Supposons le résultat pour $d-1$. Alors P_d est le produit des applications $\mathrm{Id}_{\mathbf{R}}$ et P_{d-1}. Cette dernière est continue par hypothèse de récurrence et le produit est continu par la proposition 2.20. Ceci prouve le résultat pour d. Par récurrence, l'application P_d est continue pour tout $d \in \mathbf{N}$.

Soit f une fonction polynomiale. Soient $d \in \mathbf{N}$ et $a_0, \ldots, a_d \in \mathbf{R}$ de sorte que l'assertion (32) soit vérifiée. On va démontrer par récurrence sur d que f est continue. Si $d = 0$ la fonction est constante et donc continue. Supposons le résultat démontré pour $d-1$. Par hypothése de récurrence la fonction définie sur $\mathscr{D}_f$ par

$$x \mapsto a_{d-1}x^{d-1} + \cdots + a_0$$

est continue. Comme f est la somme de cette fonction et de la fonction $a_d P_d$, elle est continue, ce qui prouve le résultat pour d. Par récurrence le résultat vaut pour tout $d \in \mathbf{N}$. $\square$

2.9. Application : la notion de dérivée. — Vous connaissez la notion de dérvée depuis la première. Elle se définit en termes de limites :

Définition 2.24

Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur une partie $\mathscr{D}_f$ de $\mathbf{R}$. Soit $a \in \mathscr{D}_f$ tel que a soit adhérent à $\mathscr{D}_f - \{a\}$. On dit que la fonction f est *dérivable* en a si l'application de $\mathscr{D}_f - \{a\}$ dans $\mathbf{R}$ définie par

$$x \longmapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

admet une limite en a. Dans ce cas, on note

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Le nombre réel $f'(a)$ s'appelle le nombre *dérivé* de f en a.

Définition 2.25

Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur une partie $\mathscr{D}_f$ de $\mathbf{R}$. On suppose que tout élément de $a \in \mathscr{D}_f$ est adhérent à $\mathscr{D}_f - \{a\}$. On dit que f est dérivable si f est dérivable en tout point $a \in \mathscr{D}_f$. L'application de $\mathscr{D}_f$ dans $\mathbf{R}$ définie par $x \mapsto f'(x)$ s'appelle la *fonction dérivée* de f (ou plus simplement la *dérivée* de f).

Fiche de révision

2.1. Définitions

Définition 2.26

Soit $\mathscr{D}$ une partie de $\mathbf{R}$. Un élément $a \in \mathbf{R}$ est *adhérent* à $\mathscr{D}$ si pour tout intervalle ouvert I contenant a, l'intersection de I avec $\mathscr{D}$ est non vide.

Définition 2.27

Soit a un point adhérent à $\mathscr{D}_f$. Soit $l \in \mathbf{R}$.

On dit que la fonction f *a pour limite l en a* ou que $f(x)$ *tend vers l* quand x tend vers a si elle vérifie les conditions équivalentes suivantes :

(i) Pour tout intervalle ouvert J contenant l, il existe un intervalle ouvert I contenant a tel que $f(I \cap \mathscr{D}_f) \subset J$;

(ii) On a
$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbf{R}_+^*, \forall x \in \mathscr{D}_f,\ |x-a| < \eta \Longrightarrow |f(x)-l| < \varepsilon.$$

On note alors
$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l\,.$$

2.2. Opération sur les limites

Théorème 2.28

Soient f et g des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définies respectivement sur $\mathscr{D}_f$ et $\mathscr{D}_g$. On suppose que a est un nombre réel adhérent à $\mathscr{D}_f \cap \mathscr{D}_g$. Soient l et l' des nombres réels. On fait l'hypothèse suivante :
$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l \quad \text{et} \quad g(x) \xrightarrow[x \to a]{} l'.$$

Alors
$$(f+g)(x) \xrightarrow[x \to a]{} l+l' \quad \text{et} \quad (fg)(x) \xrightarrow[x \to a]{} l\,l'.$$

Théorème 2.29

Soit f et g des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Soit a un point adhérent à $\mathscr{D}_f \cap \mathscr{D}_g$. Soit l un nombre réel. Soit l' un nombre réel *non nul*. On fait l'hypothèse suivante

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l \quad \text{et} \quad g(x) \xrightarrow[x \to a]{} l'.$$

Alors a est adhérent à $\mathscr{D}_{f/g}$ et

$$\frac{f}{g}(x) \xrightarrow[x \to a]{} \frac{l}{l'}.$$

Théorème 2.30

Soient a et b deux réels. Soit f et g deux fonctions telles que $f(\mathscr{D}_f) \subset \mathscr{D}_g$. On suppose que a est un point adhérent à $\mathscr{D}_f$. Soient $b, l \in \mathbf{R}$. On suppose :

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \quad \text{et} \quad \lim_{y \to b} g(y) = l\,.$$

Alors

$$\lim_{x \to a} g \circ f(x) = l\,.$$

Entraînement

2.1. Vrai ou faux

Vrai-Faux 2.1. Soit f une fonction définie sur $\mathbf{R}$ telle que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1$$

Pouvez-vous en déduire que (donnez un contre-exemple si ce n'est pas toujours vrai et une preuve si cela est vrai)

1. ☐ $\lim_{x\to 0} f(1-x) = 0$
2. ☒ $\lim_{x\to 0} 1/f(x) = 1$
3. ☒ $\lim_{x\to 1} 1-1/f(1-x) = 0$
4. ☒ $\lim_{x\to 0} \sqrt{f(\sqrt{x})} = 1$
5. ☐ $\lim_{x\to 0} f(\cos(x)) = 0$
6. ☒ $\lim_{x\to 0} 1/f(\sin(x)) = 1$
7. ☐ $\lim_{x\to 1} f(1+x) = 0$
8. ☒ $\lim_{x\to 1} f(x-1) = 1$
9. ☐ $\lim_{x\to 1} f(x-1)^2 - 2f(1-x) = 0$

Vrai-Faux 2.2. Soit f une fonction définie sur $]-1,1[$ et g une fonction définie sur $\mathbf{R}$. Est-il toujours vrai que ?

1. ☐ Si $\forall x \in\,]-1,1[$, $f(x) \leqslant g(x)$ et $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$, alors $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.
2. ☒ Si $\forall x \in\,]-1,1[$, $-g(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ et $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$, alors $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$
3. ☒ Si $\forall x \in\,]-1,1[$, $f(x)^2 \leqslant g(x)$ et $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$, alors $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$
4. ☐ Si $\forall x \in\,]-1,1[$, $f(x) \leqslant g(x)^2$ et $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$, alors $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$
5. ☐ Si $\forall x \in\,]-1,1[$, $f(x) \geqslant 0$ et $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$, alors $\lim_{x\to 0} f(x)g(x) = 0$
6. ☐ Si $\forall x \in\,]-1,1[$, $f(x) \leqslant 4$ et $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$, alors $\lim_{x\to 0} f(x)g(x) = 0$
7. ☒ Si $\forall x \in\,]-1,1[$, $-1 \leqslant f(x) \leqslant 4$ et $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$, alors $\lim_{x\to 0} f(x)g(x) = 0$
8. ☒ Si $\forall x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $-1 \leqslant f(x) \leqslant 4$ et $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$, alors $\lim_{x\to 0} f(x)g(x) = 0$

2.2. Exercices

Exercice 2.1. Résoudre les inégalités :

1. $|2x+1| \leqslant 1$;
2. $|x-1| < |x+1|$.

Exercice 2.2.
1. Montrer que $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x + |y| = 2y\}$ est le graphe d'une fonction f. Donner l'ensemble de définition de cette fonction et exprimer pour $x \in \mathscr{D}_f$, $f(x)$ en fonction de x.
2. L'ensemble $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x + |y| = y^2\}$ est-il le graphe d'une fonction ?

Exercice 2.3. Dans cet exercice, on note f la fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ donnée par $x \mapsto x^2$.

1. Soient a, b des nombres réels tels que $a < b$.
   (a) Trouver une nombre réel $C_{a,b}$ dépendant uniquement de a et de b tel que
   $$\forall x, y \in [a,b], \quad |f(x) - f(y)| < C_{a,b}|x-y|.$$
   (b) On admet que $\pi \in [3,4]$. Combien de décimales de π faut-il connaître pour calculer π^2 avec une erreur $< 10^{-5}$?
   (c) Démontrer en utilisant la définition de la limite que la restriction de f à l'intervalle $[a,b]$ est continue.
2. Existe-t-il une constante $C \in \mathbf{R}$ telle que
   $$\forall x, y \in \mathbf{R}, \quad |f(x) - f(y)| < C|x-y| ?$$
3. L'application f est-elle continue ?

Exercice 2.4. Dans cet exercice, on note f la fonction de $\mathbf{R}^*$ dans $\mathbf{R}$ donnée par $x \mapsto \frac{1}{x}$.

1. Soient a, b des nombres réels tels que $0 < a < b$.
   (a) Trouver une nombre réel $C_{a,b}$ dépendant uniquement de a et de b tel que
   $$\forall x, y \in [a,b], \quad |f(x) - f(y)| < C_{a,b}|x-y|.$$
   (b) On admet que $\pi \in [3,4]$. Combien de décimales de π faut-il connaître pour calculer $\frac{1}{\pi}$ avec une erreur $< 10^{-5}$?
   (c) Démontrer en utilisant la définition de la limite que la restriction de f à l'intervalle $[a,b]$ est continue.
2. Existe-t-il une constante $C \in \mathbf{R}$ telle que
   $$\forall x, y \in \mathbf{R}^*, \quad |f(x) - f(y)| < C|x-y| ?$$

3. L'application f est-elle continue sur son domaine de définition ?

Exercice 2.5. On note f la fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ donnée par $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Déterminer l'ensemble A des solutions de l'équation $f(x) = 1$.
3. Déterminer l'ensemble B des solutions de l'équation $f(x) = 0$.
4. Démontrer que 0 est adhérent à chacun des ensembles A et B.
5. Démontrer que f n'admet pas de limite en 0.

Exercice 2.6. Soit f une fonction à valeur réelle définie sur une partie $\mathscr{D}_f$ de $\mathbf{R}$. On désigne par a un nombre réel adhérent à $\mathscr{D}_f$. Soit $l \in \mathbf{R}$.

1. Démontrer que, si f admet pour limite l en a, alors

$$\exists M \in \mathbf{R},\ \exists \eta \in \mathbf{R}_+^*,\ \forall x \in \mathscr{D}_f,\ |x-a| < \eta \Longrightarrow f(x) < M. \tag{33}$$

   Une fonction qui vérifie (33) est dite *localement majorée au voisinage de a*. (Indication : on pourra démontrer que $M = l + 1$ convient).
2. De même, démontrer que si f admet pour limite l en a alors

$$\exists m \in \mathbf{R},\ \exists \eta \in \mathbf{R}_+^*,\ \forall x \in \mathscr{D}_f,\ |x-a| < \eta \Longrightarrow f(x) > m.$$

3. On suppose que la fonction f est donnée par $x \mapsto \frac{1}{x}(\sin(1/x) + 1)$.
   (a) Donner dans ce cas le domaine de définition de f.
   (b) Démontrer que f n'admet pas de limite en 0.

Exercice 2.7. Calculer les limites suivantes (si elles existent) :

1. $\displaystyle\lim_{x\to-1} \frac{x^3+1}{x^2+1}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to-1} \frac{x^2-1}{x^2+3x+2}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3x}{1-x^3}\right)$

6. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$, on pourra faire le changement de variable $y^6 = 1+x$

Exercice 2.8. On admet que $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$. Calculer les limites suivantes (si elles existent) :

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(5x)}{x}$
2. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)^2}{x^2}$
3. $\lim_{x\to 0} x\sin(\dfrac{1}{x})$
4. $\lim_{x\to \frac{\pi}{3}} \dfrac{1-2\cos(x)}{\pi-3x}$

Exercice 2.9. Démontrer les résultats suivants.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4x^2+1}}{2x+3} = \frac{1}{3} \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4x^2+x^3}}{|2x+x^2|} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x+\sqrt{|x|}}{x-\sqrt{|x|}} = -1 \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{|x|}+\sqrt{|x|}}{\sqrt[3]{|x|}-\sqrt{|x|}} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x} = \frac{2}{3}$$

On rappelle la définition de limite pour une suite, telle qu'elle est donnée en terminale :

Définition 2.31

La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *admet pour limite le nombre réel* l si tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs de la suite à partir d'un certain rang.

Exercice 2.10*. Soit X une partie de $\mathbf{R}$ et soit $a \in \mathbf{R}$. Démontrer que a est adhérent à X si et seulement si a est limite d'une suite d'éléments de X.

Exercice 2.11*.

1. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ admet pour limite le nombre réel l si et seulement si

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*,\ \exists N \in \mathbf{N},\ \forall n \in \mathbf{N},\ (n \geqslant N) \Longrightarrow |u_n - l| < \varepsilon.$$

2. Démontrer que si la suite admet l et l' comme limites alors $l = l'$.
3. Soit f une fonction à valeur réelle définie sur une partie $\mathscr{D}_f$ de $\mathbf{R}$. Soit $a \in \mathbf{R}$ un nombre réel adhérent à $\mathscr{D}_f$ et l un nombre réel. Démontrer que la fonction f admet la limite l en a si et seulement si, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ qui admet a comme limite, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbf{N}}$ admet l comme limite.

Exercice 2.12.* Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle I de $\mathbf{R}$. On suppose que $f(I) \subset I$ et que f est continue. Soit $a \in I$. On note $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ l'unique suite d'éléments de I qui vérifie les conditions suivantes

$$\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

Démontrer que si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ admet une limite $l \in I$, alors $f(l) = l$.

Exercice 2.13.*

1. Soit $n \in \mathbf{N}$. Démontrer que l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par $x \mapsto x^n$ est dérivable. Calculer sa dérivée.
2. Démontrer que toute fonction polynomiale est dérivable et donner une formule pour calculer sa dérivée.

Calcul Algébrique

Agnès Coquio, Éric Dumas, Emmanuel Peyre et Bernard Ycart

Ce chapitre est consacré à la manipulation de formules algébriques, constituées de variables formelles, de réels ou de complexes. L'objectif est essentiellement pratique : « savoir calculer ». La seule nouveauté réside dans la manipulation de formules avec indices, utilisant les symboles $\sum$ (somme) et $\prod$ (produit). Pour le reste, vous aurez simplement à réviser votre cours de terminale sur les nombres complexes.

Cours

3.1. Sommes et produits. — Nous commençons par les sommes.

L'écriture

$$\sum_{k=0}^{5} 2^k$$

se lit « *somme pour k allant de zéro à cinq de deux puissance k* ». C'est une notation abrégée pour :

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5.$$

La lettre k est l'*indice de sommation*. On la remplace successivement par toutes les valeurs entières comprises entre les deux *bornes*, qui sont 0 et 5 dans notre exemple. Donnons une définition plus précise de ces notations :

Définition 3.1

Soient $p, q \in \mathbf{Z}$ des entiers relatifs tels que $p \leqslant q$. Soit $(u_p, \dots, u_q)$ une famille de $q-p+1$ nombres réels (ou complexes) On définit

$$\sum_{k=p}^{q} u_k = u_p + u_{p+1} + \dots + u_q$$

Le terme de gauche se lit « somme pour k allant de p à q des u_k ». De même

$$\prod_{k=p}^{q} u_k = u_p \times u_{p+1} \times \cdots \times u_q$$

et se lit « produit pour k allant de p à q des u_k »

Remarque 3.2. — Les bornes peuvent elles-mêmes être des variables, mais elles sont nécessairement différentes de l'indice de sommation. Par exemple, pour tout entier naturel n :

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k$$

désigne la somme

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1} + 2^n .$$

Rappelons que, par convention, $a^0 = 1$ pour tout nombre réel a. Prenez l'habitude d'écrire les sommes sous forme développée quitte à introduire des points de suspension entre les premiers termes et les derniers.

Exemple 3.3. — Voici quelques exemples d'égalités illustrant la manipulation des indices et des bornes. Nous donnons sous chaque exemple une écriture sous forme développée.

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^k & = & \displaystyle\sum_{h=0}^{n-1} 2^{h+1} \\ 2^1 + \cdots + 2^n & = & 2^{0+1} + \cdots + 2^{n-1+1} . \end{array}$$

L'indice de sommation peut être remplacé par n'importe quel autre : on dit que c'est une *variable muette*.

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k + \sum_{h=1}^{n} 2^{n+h} & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} 2^k \\ (2^0 + \cdots + 2^n) + (2^{n+1} + \cdots + 2^{2n}) & = & 2^0 + \cdots + 2^{2n} . \end{array}$$

Observez que la borne peut être une des variables de la quantité à sommer.

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^n & = & (n+1)2^n \\ 2^n + \cdots + 2^n & = & (n+1)2^n . \end{array}$$

Dans cet exemple la quantité à sommer ne dépend pas de l'indice de sommation : celle-ci a pour seul effet de compter les termes. Attention, pour $m \leqslant n$, il y a $n-m+1$ termes dans la somme de m à n.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\sum_{h=0}^{1} 2^{k+h} &= \sum_{h=0}^{1}\sum_{k=0}^{n} 2^{k+h}\\ (2^0+2^1)+\cdots+(2^n+2^{n+1}) &= (2^0+\cdots+2^n)+(2^1+\cdots+2^{n+1})\,.\end{aligned}$$

Une double somme est une somme de sommes, et on peut toujours intervertir les deux.

Exemple 3.4. — Voici un enchaînement d'égalités, montrant que la somme des puissances de 2 de 2^0 jusqu'à 2^n vaut $(2^{n+1}-1)$ (c'est un cas particulier d'une formule à connaître que nous verrons plus loin). Pour chaque ligne de calcul, nous donnons à droite l'écriture sous forme développée. On rappelle que $2^0=1$.

$$\begin{array}{rcl|l}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k &=& \displaystyle 2\left(\sum_{k=0}^{n} 2^k\right)-\left(\sum_{k=0}^{n} 2^k\right) & = 2(2^0+\cdots+2^n)-(2^0+\cdots+2^n)\\ &=& \displaystyle\left(\sum_{k=0}^{n} 2^{k+1}\right)-\left(\sum_{k=0}^{n} 2^k\right) & = (2^1+\cdots+2^{n+1})-(2^0+\cdots+2^n)\\ &=& \displaystyle\left(\sum_{h=1}^{n+1} 2^{h}\right)-\left(\sum_{k=0}^{n} 2^k\right) & = (2^1+\cdots+2^{n+1})-(2^0+\cdots+2^n)\\ &=& 2^{n+1}-2^0 & = 2^{n+1}-1\,.\end{array}$$

Ce que nous venons de voir pour les sommes s'applique aussi aux produits. Le produit des entiers de 1 à n intervient dans de nombreuses formules.

Définition 3.5

La *factorielle* de n, notée « $n!$ », est définie comme le produit

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1\ 2\ 3\cdots\ (n-2)\ (n-1)\ n\,.$$

Il est souvent utile d'étendre la définition de la factorielle en convenant que $0! = 1$.

Voici les premières valeurs.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n!$	1	1	2	6	24	120	720	5040	40320	362880	3628800

Définition 3.6

Soit X un ensemble. On appelle permutation de X une application bijective de X dans X. Soit n un entier positif ou nul, On appelle *permutation des nombres de* 1 *à* n une permutation de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$. L'ensemble des permutations des nombres de 1 à n est noté $\mathfrak{S}_n$ [2].

Une permutation u des nombres de 1 à n peut être vue comme un n-uplet d'entiers $(u_1, \ldots, u_n)$ dans lequel chaque entier entre 1 et n apparaît une et une seule fois. Par exemple $(5, 3, 2, 4, 1)$ est une permutation des nombres de 1 à 5.

En effet soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une tel n-uplet. On définit alors l'application σ de $\{1, \ldots, n\}$ dans lui même par $\sigma(k) = u_k$ si $1 \leqslant k \leqslant n$. σ est une bijection.

Réciproquement, à une bijection σ de $\{1, \ldots, n\}$ dans lui même, on associe le n-uplet de 1 à n $(\sigma(1), \ldots, \sigma(n))$.

Théorème 3.7

Le nombre de permutations des nombres de 1 à n est $n!$.

Démonstration. — On montre le théorème par récurrence sur n.

Si $n = 1$, la seule permutation des entiers de 1 à 1 est (1).

On suppose donc que le résultat est vrai pour l'entier n. Montrons-le pour l'entier $n + 1$. Soit k un entier tel que $1 \leqslant k \leqslant n + 1$ et comptons le nombre A_k de permutations

$$(u_1, \ldots, u_{n+1})$$

telles que $u_k = n + 1$. À une telle permutation, associons le n-uplet :

$$(u_1, \ldots, u_{k-1}, u_{k+1}, \ldots, u_{n+1}).$$

C'est une permutation des nombres de 1 à n. Inversement étant donnée une permutation $(v_1, \ldots, v_n)$ des entiers de 1 à n, alors

$$(v_1, \ldots, v_{k-1}, n + 1, v_{k+1}, \ldots, v_n)$$

est une permutation des entiers de 1 à $n + 1$ dont le k-ième terme est $n + 1$. En appliquant l'hypothèse de récurrence, on obtient que $A_k = n!$. Donc grâce au principe de d'addition, le

2. La lettre $\mathfrak{S}$ est une lettre S majuscule dans l'alphabet gothique.

nombre total de permutations des nombres de 1 à $n+1$ est :

$$\sum_{k=1}^{n+1} A_k = \sum_{k=1}^{n+1} n! = (n+1)\,n! = (n+1)!\,,$$

ce qui montre le résultat pour $n+1$. □

Remarques 3.8. — i) De manière générale, si X est un ensemble fini de cardinal n l'ensemble des permutations de X est fini de cardinal $n!$.

ii) Pour ordonner n objets, il faut associer à chacun un nombre entre 1 et n de sorte que chaque nombre renvoie à un objet et un seul. Il y a autant de manières de le faire que de permutations des n premiers entiers : $n!$. Au tiercé, il y a $5! = 120$ manières d'ordonner les 5 premiers chevaux. Une seule donne l'ordre d'arrivée, soit le quinté dans l'ordre, et il y a 119 quintés dans le désordre.

Définition 3.9

Le *nombre de combinaisons* de k objets parmi n est le cardinal de l'ensemble des parties de $\{1,\dots,n\}$ de cardinal k. On le note

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\,. \tag{34}$$

Remarque 3.10. — C'est le nombre de manières de choisir k objets parmi n, sans distinguer leur ordre. La notation $\binom{n}{k}$ que nous utilisons ici, de préférence à l'ancienne notation C_n^k, est conforme aux programmes en vigueur et à l'usage international. On peut éventuellement la lire « de n choisir k ».

La formule (34) correspond au raisonnement suivant. Pour choisir k objets, on peut se donner une permutation des n objets, et décider d'en retenir les k premiers. Parmi les permutations, toutes celles qui auront en commun leurs k premiers nombres conduiront au même choix. Il faut donc diviser par le nombre de permutations des k objets choisis, et par le nombre de permutations des $n-k$ objets qui ne l'ont pas été.

Observez que (34) ne change pas si on remplace k par $n-k$.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Choisir k objets parmi n (ceux que l'on garde) revient à en choisir $n-k$ (ceux que l'on laisse).

Voici une autre expression de $\binom{n}{k}$.

(35)
$$\binom{n}{k} = \frac{1}{k!}\prod_{h=0}^{k-1}(n-h) = \frac{n\,(n-1)\,\cdots\,(n-k+1)}{1\;2\;\cdots\;k}\,.$$

Notez qu'il y a k facteurs au numérateur, comme au dénominateur. On obtient cette formule en simplifiant le quotient $n!/(n-k)!$ dans (34).

On peut aussi raisonner comme suit. Il y a n façons de choisir le premier objet, puis $n-1$ de choisir le second (puisqu'un objet a déjà été choisi), etc. Pour choisir le k-ième objet, il reste $n-(k-1)$ possibilités. Ceci correspond au numérateur de (35). Cette manière de procéder retourne une liste ordonnée. Il faut donc diviser par le nombre d'ordres possibles des k objets choisis, qui est $k!$.

Observez les relations suivantes, faciles à déduire de (34) ou (35) et de la définition de la factorielle.

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}.$$

Pour calculer $\binom{n}{k}$ en pratique, on n'utilise ni (34) ni (35). Le calcul récursif par la formule du *triangle de Pascal* (connue des indiens, des chinois et des arabes bien avant Pascal) est beaucoup plus rapide.

Proposition 3.11 (Formule du triangle de Pascal)

(36)
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Nous conseillons au lecteur de démontrer cette formule à partir des expressions (34) et (35). Voici la justification combinatoire. Supposons que parmi les n objets dont k doivent être choisis, l'un d'entre eux soit distingué (disons qu'il est rouge). Parmi les choix possibles de k objets, certains ne contiennent pas l'objet rouge, d'autres le contiennent. Les premiers sont au nombre de $\binom{n-1}{k}$, car les k objets sont choisis parmi les $n-1$ différents de l'objet rouge. Les choix contenant l'objet rouge sont au nombre de $\binom{n-1}{k-1}$ car l'objet rouge ayant été retenu, il reste $k-1$ objets à choisir parmi les $n-1$ autres. Voici, disposées en triangle, les valeurs de $\binom{n}{k}$ pour n allant de 0 à 6.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Chaque valeur est la somme de celle qui est au-dessus, et de celle qui est à gauche de celle qui est au-dessus. S'il n'est pas indispensable de connaître ce tableau par cœur, il est souvent utile de savoir le réécrire rapidement.

3.2. Trois formules à connaître. — Les formules données par les trois théorèmes qui suivent vous seront souvent utiles.

Théorème 3.12

Pour tout entier $n \geqslant 1$, la somme des n premiers entiers vaut $n(n+1)/2$.

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{37}$$

Démonstration. — Nous donnons d'abord la démonstration par récurrence. Nous verrons ensuite une justification géométrique et une justification combinatoire. L'hypothèse de récurrence est :

$$H(n) \qquad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Pour $n = 1$:

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1(1+1)}{2}.$$

Supposons maintenant que $H(n)$ est vraie. Ecrivons :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + (n+1).$$

En appliquant $H(n)$, on obtient :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)\,.$$

Le membre de droite s'écrit :

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}\,.$$

Nous avons donc démontré que :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}\,,$$

c'est-à-dire que $H(n+1)$ est vraie. $\square$

Voici maintenant une justification géométrique. Considérons un rectangle dont la largeur et la hauteur valent respectivement $n+1$ et n unités (figure 12). Ce rectangle peut être découpé en deux moitiés superposables. Chacune est formée de $1+2+\cdots+n$ carrés de côté unité, et couvre une surface égale à la surface du rectangle divisée par 2, soit $n(n+1)/2$.

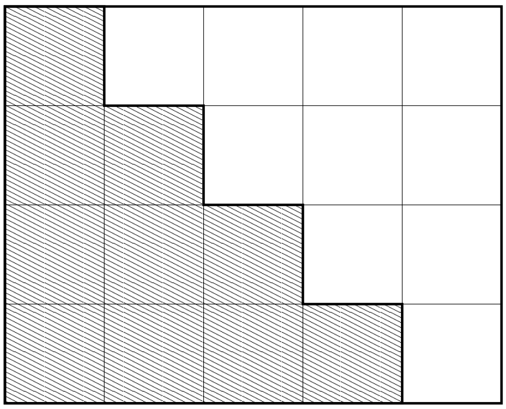


FIGURE 12. La somme des n premiers entiers vaut $n(n+1)/2$.

Voici maintenant une explication combinatoire. Autour d'une table $n+1$ personnes sont assises et s'apprêtent à trinquer. Combien de bruits de verre entendra-t-on ? Il y a deux manières de compter. La première consiste à prendre les personnes dans l'ordre : la première doit trinquer avec les n autres. La seconde, qui a déjà trinqué avec la première, doit encore trinquer avec $n-1$ autres. Ainsi de suite jusqu'à la n-ième personne, qui ayant déjà trinqué avec les $n-1$ autres n'aura plus que la n-ième avec qui trinquer. On entendra donc $n + (n-1) + \cdots + 1$ bruits de verre. La seconde manière de compter consiste à remarquer que le nombre de bruits de verre est égal au nombre de combinaisons de 2 personnes parmi $n+1$:

$$\binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Les deux formules suivantes portent sur deux variables a et b que vous pouvez voir dans un premier temps comme deux réels. Ces formules sont aussi valables pour des nombres complexes, et plus généralement pour des objets quelconques que l'on peut ajouter et multiplier de façon commutative (par exemple des polynômes ou des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$).

La première généralise l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

Théorème 3.13

Pour tout entier n,

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^k\right) = (a-b)(a^n + a^{n-1}b + \cdots + ab^{n-1} + b^n). \tag{38}$$

(Rappelons la convention $a^0 = b^0 = 1$.)

Démonstration. — La démonstration se fait par récurrence. L'affirmation est vraie pour $n = 0$ puisque :

$$\sum_{k=0}^{0} a^0 b^0 = 1.$$

Supposons le résultat vrai pour n.

$$\begin{aligned}
(a-b)\left(\sum_{k=0}^{n+1} a^{n+1-k}b^k\right) &= (a-b)\left(\left(\sum_{k=0}^{n} a^{n+1-k}b^k\right)+b^{n+1}\right)\\
&= (a-b)\left(a\left(\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k\right)+b^{n+1}\right)\\
&= a(a-b)\left(\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k\right)+(a-b)b^{n+1}\\
&= a(a^{n+1}-b^{n+1})+(a-b)b^{n+1}\\
&= a^{n+2}-b^{n+2}
\end{aligned}$$

L'hypothèse de récurrence a été utilisée pour obtenir l'avant-dernière égalité. Le résultat est vrai pour $n+1$, donc pour tout n. □

Des cas particuliers du théorème 3.13 reviennent souvent dans les calculs. Nous avons déjà rencontré le cas $a=2, b=1$. Vous pouvez retenir le suivant :

$$(1-x)\left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right) = (1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^n) = 1-x^{n+1}.$$

Plus généralement, on a la relation :

Proposition 3.14 (Somme d'une série géométrique)

Soit x un nombre réel différent de 0 et de 1 et soient p et q des entiers relatifs tels que $p \leqslant q$. Alors :

$$\sum_{k=p}^{q} x^k = \frac{x^p - x^{q+1}}{1-x}.$$

Démonstration. — Il suffit de remarquer que :

$$(1-x)\left(\sum_{k=p}^{q} x^k\right) = \sum_{k=p}^{q} x^k - \sum_{k=p+1}^{q+1} x^k = x^p - x^{q+1}.$$

□

Une autre formule à connaître est celle du *binôme de Newton*, qui généralise $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$.

Théorème 3.15 (Formule du binôme de Newton)

Pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = b^n + nb^{n-1}a + \cdots + nba^{n-1} + a^n. \tag{39}$$

À cause de (39), les nombres $\binom{n}{k}$ s'appellent les *coefficients binomiaux*.

Démonstration. — Ici encore la démonstration se fait par récurrence, nous donnerons ensuite une justification combinatoire. Pour $n = 1$:

$$(a+b)^1 = \binom{1}{0} a^0 b^1 + \binom{1}{1} a^1 b^0 .$$

Supposons que la formule est vraie pour n et démontrons-la pour $n+1$.

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b)\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\right) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k}\right) + \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}\right) \\
&= \left(\sum_{h=1}^{n+1} \binom{n}{h-1} a^h b^{n+1-h}\right) + \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}\right) \\
&= a^{n+1} + \left(\sum_{h=1}^{n} \binom{n}{h-1} a^h b^{n+1-h}\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}\right) + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) a^k b^{n+1-k}\right) + b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} .
\end{aligned}$$

Pour la dernière égalité, nous avons appliqué la formule du triangle de Pascal (36). Le résultat est démontré. □

Voici maintenant la justification combinatoire. La quantité $(a+b)^n$ est le produit de n facteurs, chacun contenant deux termes a et b. Quand on développe le produit, on prend dans le premier facteur un des deux termes, on le multiplie par un terme du second facteur, ainsi de suite jusqu'au n-ième facteur. Le produit obtenu est égal à $a^k b^{n-k}$ si on a choisi le terme a dans k facteurs et le terme b dans les $n-k$ autres. Le nombre de produits égaux à $a^k b^{n-k}$ est le nombre de combinaisons de k facteurs parmi n, soit $\binom{n}{k}$.

3.3. Nombres complexes. — Le reste de ce chapitre est une révision du programme de terminale sur les complexes.

Les nombres complexes sont nés de la nécessité de donner un sens à la racine carrée de nombres négatifs, pour résoudre les équations algébriques. Dans l'ensemble des réels, l'équation $x^2 = 1$ a deux solutions, $+1$ et -1, mais l'équation $x^2 = -1$ n'en a pas, puisque le carré de tout nombre réel est positif ou nul. On décide d'appeler i un nombre (imaginaire) tel que $\mathrm{i}^2 = -1$, puis d'appeler *nombre complexe* tout nombre de la forme $a+\mathrm{i}b$, où a et b sont deux réels quelconques. Leur ensemble est noté $\mathbf{C}$.

Ainsi tout nombre complexe z a une *partie réelle*, notée $\mathrm{Re}(z)$ et une *partie imaginaire*, notée $\mathrm{Im}(z)$.

$$z = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z)\,\mathrm{i}\,.$$

On représente ces nombres par les points d'un plan muni de deux axes orthogonaux. L'axe horizontal porte les réels (qui sont les nombres complexes dont la partie imaginaire est nulle). L'axe vertical porte les nombres dits imaginaires purs, ceux dont la partie réelle est nulle. Le point correspondant au nombre $a+\mathrm{i}b$ est placé à la verticale du réel a et à l'horizontale de l'imaginaire pur $\mathrm{i}b$ (figure 13). On dit que le nombre $a+\mathrm{i}b$ est l'*affixe* du point qui le représente. Le point d'affixe 0 est l'*origine*, et on le note O.

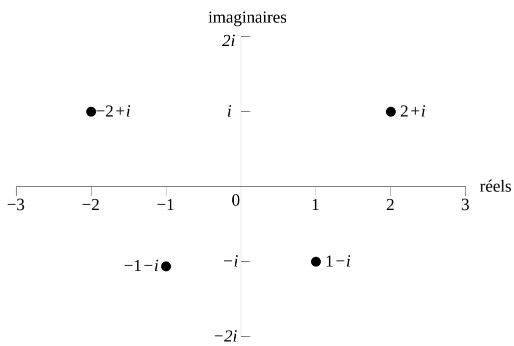


FIGURE 13. Le plan complexe.

L'addition et la multiplication des réels s'étendent aux nombres complexes sans difficulté particulière.

- *addition :* $(a+\mathrm{i}b)+(c+\mathrm{i}d)=(a+c)+\mathrm{i}(b+d)$,
- *multiplication :* $(a+\mathrm{i}b)(c+\mathrm{i}d)=(ac-bd)+\mathrm{i}(bc+ad)$.

Soient a, b, c trois réels. L'équation du second degré $ax^2+bx+c=0$ admet toujours des solutions, éventuellement complexes.

1. si $b^2-4ac>0$ l'équation admet deux racines réelles,
$$r_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{et} \quad r_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\ ;$$
2. si $b^2-4ac=0$ l'équation admet une racine réelle « double »,
$$r=\frac{-b}{2a}\ ;$$
3. si $b^2-4ac<0$ l'équation admet deux racines complexes,
$$r_1=\frac{-b+\mathrm{i}\sqrt{-b^2+4ac}}{2a} \quad \text{et} \quad r_2=\frac{-b-\mathrm{i}\sqrt{-b^2+4ac}}{2a}.$$

Ce résultat n'est pas étonnant, et vous le connaissez déjà. Le miracle est que les complexes permettent de résoudre non seulement les équations du second degré, mais toutes les équations algébriques quel que soit leur degré. Le théorème suivant porte en France le nom de d'Alembert, bien qu'il ait été démontré par Gauss. Il est partout connu comme le *théorème fondamental de l'algèbre*.

Théorème 3.16

Soit P un polynôme de degré $n \geqslant 1$ à coefficients complexes. Le polynôme P est un produit de n facteurs de degré 1, à coefficients dans $\mathbf{C}$.

En d'autres termes, l'équation $P(x)=0$ a toujours n solutions ; certaines solutions peuvent être multiples, et elles sont comptées avec leur ordre de multiplicité. On traduit cette propriété en disant que $\mathbf{C}$ est *algébriquement clos*.

Définition 3.17

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. On appelle

1. *module de z* le nombre réel positif ou nul $\sqrt{a^2+b^2}$. On le note $|z|$.
2. *argument de z si z est non nul* tout réel θ tel que $\mathrm{Re}(z) = |z|\cos(\theta)$ et $\mathrm{Im}(z) = |z|\sin(\theta)$.
   On note $\arg(z)$. Il est donc défini à 2π près.
3. *conjugué de z* le nombre complexe de même partie réelle et de partie imaginaire opposée. On le note $\overline{z}$.
$$\overline{z} = a - ib\,.$$

Voici quelques exemples.

nombre	module	argument	conjugué
i	1	$\pi/2$	$-\mathrm{i}$
$1+\mathrm{i}$	$\sqrt{2}$	$\pi/4$	$1-\mathrm{i}$
$-1+\mathrm{i}$	$\sqrt{2}$	$3\pi/4$	$-1-\mathrm{i}$
$1+\mathrm{i}\sqrt{3}$	2	$\pi/3$	$1-\mathrm{i}\sqrt{3}$
$\sqrt{3}-\mathrm{i}$	2	$11\pi/6$	$\sqrt{3}+\mathrm{i}$
$-\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{6}$	$2\sqrt{2}$	$2\pi/3$	$-\sqrt{2}-\mathrm{i}\sqrt{6}$

Dans le plan complexe, le module est la longueur du segment joignant l'origine au point représentant z. Un argument est une mesure de l'angle entre l'axe des réels et ce segment, orienté dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (le sens trigonométrique). Le conjugué est le symétrique par rapport à l'axe horizontal des réels (figure 14).

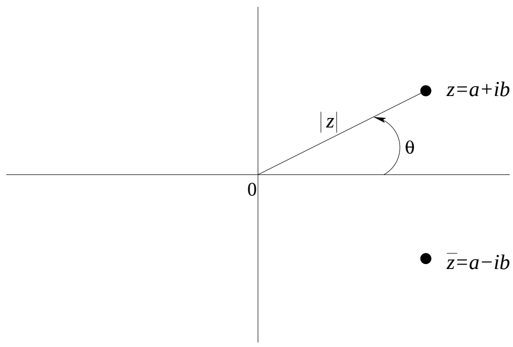


FIGURE 14. Module, argument et conjugué d'un nombre complexe.

Observez qu'un nombre et son conjugué ont le même module et que leur produit est le carré de ce module.

$$z\,\overline{z} = |z|^2 = |\overline{z}|^2 .$$

Il est fréquent dans les calculs d'utiliser un conjugué pour simplifier le résultat et le mettre sous la forme $a + \mathrm{i}b$. Si z_1 et z_2 sont deux complexes, leur quotient s'écrit :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\,\overline{z_2}}{z_2\,\overline{z_2}} = \frac{z_1\,\overline{z_2}}{|z_2|^2} .$$

Voici un exemple.

$$\frac{1+2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \frac{(1+2\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})} = \frac{3+\mathrm{i}}{2} = \frac{3}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2} .$$

Remarque 3.18. — *Calcul des racines carrées :*

Soit $z = a + \mathrm{i}b$ un nombre complexe. On veut trouver les nombres complexes $\delta = x + \mathrm{i}y$ tels que $\delta^2 = z$. Comme $|\delta|^2 = |z|$, on est ramené à résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

En sommant les deux premières, on obtient l'égalité

$$x^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2} + a}{2}.$$

Si b est non nul ou $a > 0$, le terme de droite est non nul ; on en déduit donc les deux valeurs possibles pour x ; dans ce cas, la coordonnée y est alors donnée par $y = \frac{b}{2x}$. Dans le cas contraire, $x = 0$ et $y^2 = -a$, ce qui donne les valeurs possibles pour δ.

3.4. Formes trigonométrique et exponentielle. — Par définition si ρ et θ désignent respectivement le module et l'argument du nombre complexe $a + \mathrm{i}b$, alors $a = \rho\cos(\theta)$ et $b = \rho\sin(\theta)$. Ainsi le nombre s'écrit :

$$z = a + \mathrm{i}b = \rho(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)) .$$

On dit que le nombre est mis sous *forme trigonométrique*, ou *forme polaire*. Cette écriture prend toute sa force grâce à l'*exponentielle complexe*.

Définition 3.19

Soit $z = a + \mathrm{i}b$ un nombre complexe. On appelle *exponentielle complexe de z* et on note e^z (ou $\exp(z)$) le nombre complexe :

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^a\Big(\cos(b) + \mathrm{i}\sin(b)\Big),$$

où e^a est l'exponentielle réelle de a.

Observez que l'exponentielle complexe coïncide avec l'exponentielle réelle si la partie imaginaire est nulle. Si la partie réelle est nulle, le nombre $\cos(b) + \mathrm{i}\sin(b)$ est un nombre complexe de module 1 (car $\cos^2(b) + \sin^2(b) = 1$). Dans le cas général, le module de $\mathrm{e}^{a+\mathrm{i}b}$ est e^a et son argument est l'unique élément θ de $[0, 2\pi[$ tel que $b - \theta$ soit multiple de 2π.

La périodicité modulo 2π des fonctions sinus et cosinus induit la périodicité modulo $2\mathrm{i}\pi$ de l'exponentielle complexe : pour tout réel b et pour tout entier k,

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}b} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(b+2k\pi)}$$

Ainsi,

$$\mathrm{e}^{2k\pi\mathrm{i}} = 1\,,\quad \mathrm{e}^{(2k+1)\pi\mathrm{i}} = -1\,,\quad \mathrm{e}^{(\pi/2+2k\pi)\mathrm{i}} = \mathrm{i}\,,\quad \mathrm{e}^{(-\pi/2+2k\pi)\mathrm{i}} = -\mathrm{i}\,.$$

L'exponentielle complexe conserve la propriété fondamentale de l'exponentielle réelle qui est de transformer les sommes en produits.

Théorème 3.20

Soient z et z' deux nombres complexes,

$$\mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^z\mathrm{e}^{z'}\,.$$

Démonstration. — Posons $z = a + \mathrm{i}b$ et $z' = c + \mathrm{i}d$. Par définition de l'exponentielle,

$$\mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^{(a+c)+\mathrm{i}(b+d)} = \mathrm{e}^{a+c}\Big(\cos(b+d) + \mathrm{i}\sin(b+d)\Big)\,.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^z\mathrm{e}^{z'} &= \Big(\mathrm{e}^a\Big(\cos(b) + \mathrm{i}\sin(b)\Big)\Big)\Big(\mathrm{e}^c\Big(\cos(d) + \mathrm{i}\sin(d)\Big)\Big) \\ &= \mathrm{e}^{a+c}\Big(\cos(b) + \mathrm{i}\sin(b)\Big)\Big(\cos(d) + \mathrm{i}\sin(d)\Big)\,, \end{aligned}$$

car $\mathrm{e}^a\mathrm{e}^c = \mathrm{e}^{a+c}$ (propriété de l'exponentielle réelle). Les formules trigonométriques suivantes sont supposées connues :

$$\cos(b+d) = \cos(b)\cos(d) - \sin(b)\sin(d) \quad \text{et} \quad \sin(b+d) = \sin(b)\cos(d) + \cos(b)\sin(d)\,.$$

On en déduit immédiatement que :

$$\big(\cos(b)+\mathrm{i}\sin(b)\big)\big(\cos(d)+\mathrm{i}\sin(d)\big)=\cos(b+d)+\mathrm{i}\sin(b+d)\,.$$

□

Si z est un nombre complexe de module ρ et d'argument θ, il est souvent commode de l'écrire sous sa *forme exponentielle* :

$$z=\rho e^{\mathrm{i}\theta}\,.$$

Observez que le conjugué est :

$$\overline{z}=\rho e^{-\mathrm{i}\theta}\,,$$

et un argument est $-\theta$. L'utilisation de l'exponentielle facilite le calcul des produits et des puissances. Par exemple si n est un entier,

$$z^n=(\rho e^{\mathrm{i}\theta})^n=\rho^n e^{\mathrm{i}n\theta}\,.$$

Il est facile également de retrouver les racines n-ièmes d'un nombre complexe sous forme trigonométrique, c'est-à-dire de résoudre l'équation $z^n=\rho e^{\mathrm{i}\theta}$. Il y a n solutions qui s'écrivent :

$$\rho^{1/n}e^{\mathrm{i}(\theta/n+2k\pi/n)}\,,\quad k=0,\dots,n-1\,.$$

Les nombres de la forme

$$e^{\mathrm{i}(2k\pi/n)}\,,\quad k=0,\dots,n-1\,,$$

sont les solutions de $z^n=1$. On les appelle les *racines n-ièmes de l'unité* (figure 15).

Le fait que $e^{inx}=\cos(nx)+\mathrm{i}\sin(nx)$ conduit à la *formule de Moivre* (où de “De Moivre”) :

$$(\cos(x)+\mathrm{i}\sin(x))^n=\cos(nx)+\mathrm{i}\sin(nx)$$

Cette formule est utile pour exprimer $\cos(nx)$ ou $\sin(nx)$ en fonction de $\cos(x), \sin(x)$. Voici un exemple.

$$\begin{array}{rcl}\cos(3x)+\mathrm{i}\sin(3x) & = & (\cos(x)+\mathrm{i}\sin(x))^3\\ & = & \cos^3(x)+3\mathrm{i}\cos^2(x)\sin(x)+3\mathrm{i}^2\cos(x)\sin^2(x)+\mathrm{i}^3\sin^3(x)\\ & = & \cos^3(x)-3\cos(x)\sin^2(x)+\mathrm{i}(3\cos^2(x)\sin(x)-\sin^3(x))\end{array}$$

On a utilisé la formule du binome de Newton. En identifiant les parties réelles, on obtient :

$$\cos(3x)=\cos^3(x)-3\cos(x)\sin^2(x).$$

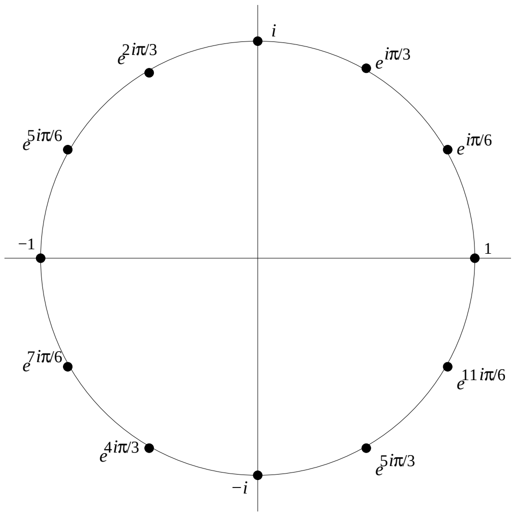


FIGURE 15. Racines douzièmes de l'unité.

Les fonctions sinus et cosinus s'expriment à l'aide de l'exponentielle complexe par les *formules d'Euler*.

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}. \tag{40}$$

On les utilise pour *linéariser* des puissances de sinus et cosinus, afin de calculer leurs primitives. Voici un exemple.

$$\begin{aligned}
\sin^4(x)\cos^6(x) &= \frac{1}{2^{10}}(e^{ix}-e^{-ix})^4(e^{ix}+e^{-ix})^6 \\
&= \frac{1}{1024}(e^{2ix}-e^{-2ix})^4(e^{ix}+e^{-ix})^2 \\
&= \frac{1}{1024}(e^{8ix}-4e^{4ix}+6-4e^{-4ix}+e^{-8ix})(e^{2ix}+2+e^{-2ix}) \\
&= \frac{1}{1024}(e^{10ix}-4e^{6ix}+6e^{2ix}-4e^{-2ix}+e^{-6ix} \\
&\qquad +2e^{8ix}-8e^{4ix}+12-8e^{-4ix}+2e^{-8ix} \\
&\qquad +e^{6ix}-4e^{2ix}+6e^{-2ix}-4e^{-6ix}+e^{-10ix}) \\
&= \frac{1}{512}\big(6+2\cos(2x)-8\cos(4x)-3\cos(6x)+2\cos(8x)+\cos(10x)\big)
\end{aligned}$$

D'où une primitive de $\sin^4(x)\cos^6(x)$:

$$\frac{3x}{256}+\frac{\sin(2x)}{512}-\frac{\sin(4x)}{256}-\frac{\sin(6x)}{1024}+\frac{\sin(8x)}{2048}+\frac{\sin(10x)}{5120}.$$

L'observation de la parité permet de prévoir a priori que la linéarisation ne contiendra que des $\cos(kx)$. En effet, $\sin(x)$ est une fonction impaire et $\cos(x)$ une fonction paire. Donc si on remplace x par $-x$, $\sin^n(x)\cos^m(x)$ sera inchangé si n est pair, changé en son opposé si n est impair. Dans le premier cas, la linéarisation ne contiendra que des cosinus, dans le second cas, elle ne contiendra que des sinus.

Considérons le polynome du second degré à coefficients complexes az^2+bz+c, avec a,b,c complexes et $a\neq 0$.

z est racine de ce polynome si $az^2+bz+c=0$. On note $\Delta=b^2-4ac$, comme dans le cas réel le discriminant qui est un complexe. Δ a deux racines complexes $\pm\delta$.

Si la forme trigonométrique de Δ est $\rho e^{i\theta}$, on peut prendre $\delta=\sqrt{\rho}e^{i\frac{\theta}{2}}$. on a alors :

$$\begin{aligned}
az^2+bz+c=0 &\iff a(z+\tfrac{b}{2a})^2-\tfrac{\Delta}{4a}=0\\
&\iff (z+\tfrac{b}{2a})^2=\tfrac{\Delta}{4a^2}=\left(\tfrac{\delta}{2a}\right)^2\\
&\iff z=\tfrac{-b\pm\delta}{2a}
\end{aligned}$$

Les deux racines du polynomes sont donc

$$z_1=\frac{-b+\delta}{2a}\quad\text{et}\quad z_2=\frac{-b-\delta}{2a}.$$

On en déduit la factorisation du polynome $az^2+bz+c=a(z-z_1)(z-z_2)$.

3.5. Géométrie du plan complexe. — Nous rappelons ici les liens entre les calculs sur les nombres complexes et la géométrie du plan. Nous utilisons dans ce paragraphe des notions de géométrie du secondaire qui seront revues et approfondies dans le chapitre 4. Le premier résultat concerne les mesures de distances et d'angles.

Théorème 3.21

Soient A, B et C trois points distincts deux à deux, d'affixes respectives z_A, z_B et z_C.

1. La distance entre A et B est le module de z_B-z_A.
2. Une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})$ est égal à l'argument du rapport $(z_B-z_C)/(z_A-z_C)$.

Si C est un point du plan d'affixe z_C, et ρ et un réel positif, l'ensemble des points dont l'affixe z est telle que $|z-z_C| = \rho$ est le cercle de centre C et de rayon ρ. On peut aussi écrire ce cercle comme l'ensemble des points d'affixe $z_C + \rho e^{i\theta}$, où θ décrit $[0, 2\pi[$. Comme conséquence immédiate du point *2*, les points A, B, C sont alignés si et seulement si l'argument de $(z_B - z_C)/(z_A - z_C)$ est égal à 0 ou π ; le triangle ABC est rectangle en C si l'argument de $(z_B - z_C)/(z_A - z_C)$ est égal à $\pi/2$ ou $3\pi/2$.

Définition 3.22

une *Similitude plane* est une application φ du plan dans lui-même telle qu'il existe un nombre réel $\lambda > 0$ tel que pour tout couple de points (A, B) du plan on ait

$$\varphi(A)\varphi(B) = \lambda AB.$$

Cela détermine le nombre réel λ qu'on appelle la *rapport* de la similitude.

Exemple 3.23. — Soit A un point du plan et soit $\lambda \in \mathbf{R}_+^*$. L'*homothétie* de centre A et de rapport λ est l'application h du plan dans lui-même caractérisée par la relation

$$\overrightarrow{Ah(M)} = \lambda\overrightarrow{AM}$$

pour tout point M du plan. Cette homothétie est une similitude de rapport λ.

Remarques 3.24. — i) Une *isométrie* du plan est une similitude de rapport 1. Les translations, les rotations et les symétries orthogonales sont des isométries.

ii) La composée de deux similitudes de rapports respectifs λ et μ est une similitude de rapport $\lambda\mu$. Toute similitude de rapport λ est une bijection dont la réciproque est une similitude de rapport λ^{-1}.

iii) Il résulte de ce qui précède que toute similitude est la composée d'une homothétie de rapport λ et d'une isométrie.

Le lien entre nombres complexes et similitudes est donné par la proposition suivante :

Proposition 3.25 (admise)

a) Soient a et b des nombres complexes. L'application qui à un point d'affixe z associe le point d'affixe $az + b$ est une similitude de rapport $|a|$. Une telle similitude est dite *directe*.

b) Soient a et b des nombres complexes. L'application qui à un point d'affixe z associe le point d'affixe $a\bar{z}+b$ est une similitude de rapport $|a|$. Une telle similitude est dite *indirecte*.

c) Toute similitude du plan complexe est soit une similitude directe au sens du point a) soit une similitude indirecte au sens du point b).

***Remarque 3.26.* —** Notons $M(z)$ le point du plan d'affixe z. Si z et z' sont des nombres complexes, le produit zz' peut être décrit comme l'unique nombre complexe tel qu'il existe une similitude directe qui envoie le triangle $(M(0), M(z'), M(zz'))$ sur le triangle $(M(0), M(1), M(z))$. (figure 16). En particulier, ces triangles sont *semblables*.

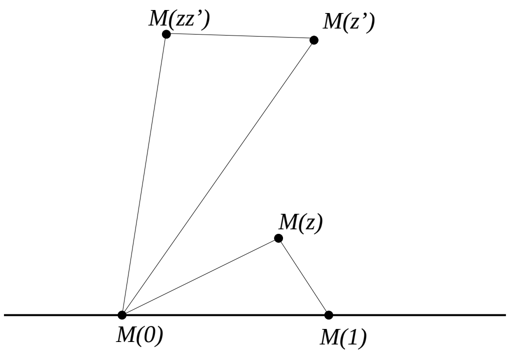


FIGURE 16. Interprétation géométrique du produit de deux complexes.

Voici maintenant la traduction sous forme de tranformations dans $\mathbf{C}$ des translations, homothéties, rotations et symétries orthogonales. (figure 17).

Théorème 3.27

Soit f une application de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$. On note F l'application du plan dans lui-même qui au point d'affixe z associe le point d'affixe $f(z)$. Soit A un point du plan, d'affixe z_A.

1. *Translation :* L'application F est la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$, si et seulement si f est l'application qui à z associe $z+z_A$.

2. *Homothétie :* Soit r un réel. L'application F est l'homothétie de centre A et de rapport r si et seulement si f est l'application qui à z associe le complexe $f(z)$ tel que $f(z)-z_A = r(z-z_A)$.
3. *Rotation :* Soit θ un réel. L'application F est la rotation de centre A et d'angle θ si et seulement si f est l'application qui à z associe le complexe $f(z)$ tel que $f(z)-z_A = e^{i\theta}(z-z_A)$.
4. *Symétrie* Soit θ un réel. L'application F est la symétrie orthogonale par rapport à la droite passant par A et de vecteur directeur d'affixe $e^{\frac{i\theta}{2}}$ si et seulement si f est l'application qui à z associe le complexe $f(z)$ tel que $f(z)-z_A = e^{i\theta}(\overline{z}-\overline{z_A})$.

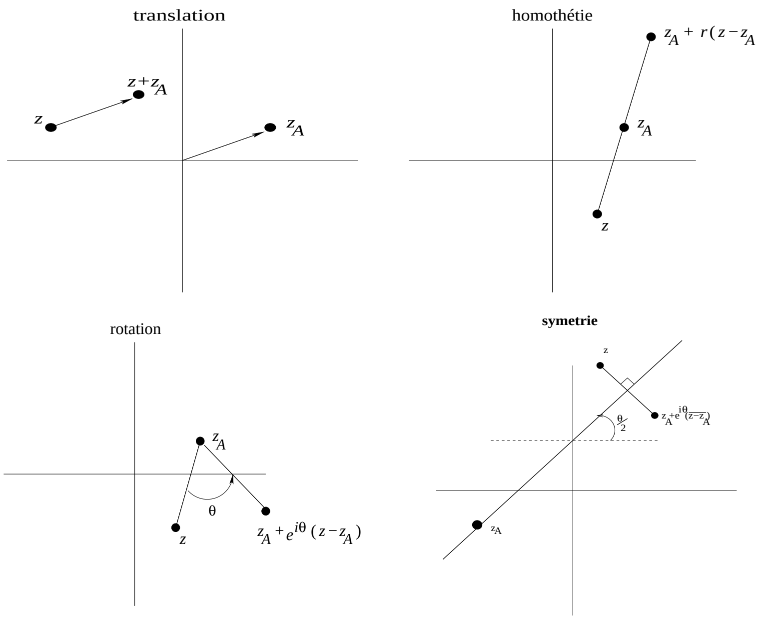


FIGURE 17. Translation, homothétie, rotation et symétrie dans le plan complexe.

Fiche de révision

3.1. Quelques formules

Pour tout entier $n \geqslant 1$, la somme des n premiers entiers vaut $n(n+1)/2$.

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Pour tout entier n et tous nombres complexes a et b,

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^k\right) = (a-b)(a^n + a^{n-1}b + \cdots + ab^{n-1} + b^n).$$

Soit x un nombre complexe différent de 0 et de 1 et soient p et q des entiers relatifs tels que $p \leqslant q$. Alors la somme d'une série géométrique est donnée par :

$$\sum_{k=p}^{q} x^k = \frac{x^p - x^{q+1}}{1-x}.$$

Une autre formule à connaître est celle du *binôme de Newton*. Pour tout entier $n \geqslant 1$ et tous nombres complexes a et b,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = b^n + nb^{n-1}a + \cdots + nba^{n-1} + a^n.$$

On a également la formule de Moivre :

$$(\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x))^n = \cos(nx) + \mathrm{i}\sin(nx).$$

Entraînement

3.1. Vrai ou faux

Vrai-Faux 3.1. Soit n un entier $\geqslant 2$. Parmi les expressions suivantes lesquelles sont toujours égales à n, lesquelles peuvent être différentes et pourquoi ?

1. ☐ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 1$.
2. ☒ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} 1$.
3. ☐ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2k/n$.
4. ☒ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} 2k/(n-1)$.
5. ☒ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{h=0}^{n-1} h$.
6. ☐ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{h=2}^{n-1} h$.
7. ☒ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{h=2}^{n-2} h$.
8. ☐ $\displaystyle\sum_{k=n}^{n} 1$.
9. ☒ $\displaystyle\sum_{k=n}^{n} k$.

Vrai-Faux 3.2. Soient n et k deux entiers tels que $1 \leqslant k \leqslant n$. Nous conviendrons que les entiers compris entre k et n sont $k, k+1, \dots, n-1, n$. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont toujours vraies, lesquelles peuvent être fausses et pourquoi ?

1. ☒ Le nombre $n!/(n-k)!$ est entier.
2. ☐ Le nombre $k!/(n!)$ est entier.
3. ☐ Il y a $n-k$ entiers compris entre k et n.

4. ☒ Il y a $(n-k+1)^2$ couples d'entiers compris entre k et n.
5. ☐ Il y a $\binom{n-k+1}{3}$ triplets d'entiers, différents deux à deux, et tous compris entre k et n.
6. ☒ Il y a $\binom{n-k+1}{3}$ triplets d'entiers (a,b,c) tels que $a<b<c$, et a,b,c compris entre k et n.
7. ☐ La somme des entiers compris entre k et n est $(n-k)(n-k+1)/2$.
8. ☐ La somme des entiers compris entre k et n est $n(n+1)/2-k(k+1)/2$.
9. ☒ La somme des entiers compris entre k et n est $n(n+1)/2-k(k-1)/2$.
10. ☐ La somme des nombres 2^h pour h compris entre k et n vaut $2^{n+1}-2^{k+1}$.
11. ☒ La somme des nombres 2^h pour h compris entre k et n vaut $2^{n+1}-2^k$.

Vrai-Faux 3.3. Dans une course de chevaux, 10 chevaux sont au départ. Vous en choisissez 3 que vous classez pour jouer au tiercé. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ Il y a 3 tiercés dans le désordre.
2. ☒ Il y a 3! tiercés, dont 1 dans l'ordre.
3. ☐ Il y a $\binom{10}{3}$ tiercés possibles.
4. ☐ Il y a 720 ordres d'arrivée possibles.
5. ☒ Il y a plus de 3 millions d'ordres d'arrivée possibles.
6. ☒ Vous avez 720 choix différents.
7. ☐ Vous avez une chance sur 120 de gagner le tiercé dans l'ordre.
8. ☒ Vous avez une chance sur 120 de gagner, soit dans l'ordre, soit dans le désordre.

Vrai-Faux 3.4. Parmi les égalités suivantes, lesquelles sont vraies pour tout entier n, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 3^k = \frac{3^{n+1}-1}{2}$.
2. ☐ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} 3^k = \frac{3^{n}-1}{2}$.
3. ☒ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} 3^k = \frac{3^{n}-3}{2}$.
4. ☒ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k = 4^n$.

5. ☐ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}3^k = 4^n - 3.$
6. ☒ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}3^k = 4^n - 3^n.$
7. ☒ $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}3^k = 4^n - 1 - 3n.$

Vrai-Faux 3.5. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ Tout nombre réel a pour argument 0.
2. ☒ Tout nombre réel strictement négatif a pour argument π.
3. ☒ Tout nombre imaginaire pur non nul a pour argument $\pi/2$ ou $3\pi/2$.
4. ☒ Le conjugué d'un nombre imaginaire pur est égal à son opposé.
5. ☐ Si deux nombres complexes ont le même argument alors leur produit est réel.
6. ☒ Le produit de deux nombres imaginaires purs est réel.
7. ☒ Si deux nombres complexes non nuls ont le même argument alors leur quotient est réel.
8. ☒ Si deux nombres complexes non nuls ont le même module alors leur quotient a pour module 1.

Vrai-Faux 3.6. Soit z un nombre complexe non nul. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ Le module de z égal au module de son conjugué.
2. ☐ L'argument de z est l'opposé de l'argument de son conjugué.
3. ☒ Le produit de z par une racine n-ième de l'unité a le même module que z.
4. ☐ L'argument de $-z$ est l'opposé de l'argument de z.
5. ☒ Si la partie imaginaire de z est positive, alors son argument est compris entre 0 et π.
6. ☐ L'argument de z^2 est le double de l'argument de z.
7. ☒ L'argument de $z/\overline{z}$ est égal à l'argument de z^2.

Vrai-Faux 3.7. On pose $z = -\sqrt{2+\sqrt{2}} + \mathrm{i}\sqrt{2-\sqrt{2}}$. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ la partie réelle de z est l'opposé de sa partie imaginaire.
2. ☒ la partie réelle de z^2 est l'opposé de sa partie imaginaire.

3. ☐ l'argument de z^2 est $-\pi/4$.
4. ☒ l'argument de z^2 est $7\pi/4$.
5. ☐ le module de z^2 est 16.
6. ☒ le module de z est 2.
7. ☒ $z^2 = 4e^{-i\pi/4}$.
8. ☐ $z = 2e^{-i\pi/8}$.
9. ☒ $z = 2e^{i(7\pi/8)}$.
10. ☐ $\cos(7\pi/8) = (\sqrt{2+\sqrt{2}})/2$.
11. ☒ $\cos(\pi/8) = (\sqrt{2+\sqrt{2}})/2$.
12. ☒ $\sin(7\pi/8) = (\sqrt{2-\sqrt{2}})/2$.

Vrai-Faux 3.8. A tout nombre complexe $z \neq -2$, on associe $z' = (z-4i)/(z+2)$. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ L'ensemble des points d'affixe z tels que z' est réel est un cercle.
2. ☒ L'ensemble des points d'affixe z tels que z' est réel est une droite privée d'un point.
3. ☒ L'ensemble des points d'affixe z tels que z' est imaginaire pur est un cercle privé d'un point.
4. ☐ L'ensemble des points d'affixe z tels que $|z'| = 1$ est un cercle.
5. ☐ L'ensemble des points d'affixe z tels que $|z'| = 1$ est une droite privée d'un point.
6. ☒ L'ensemble des points d'affixe z tels que $|z'| = 1$ est une droite.

Vrai-Faux 3.9. L'application qui à un point d'affixe z associe le point d'affixe $iz-1$ est (vrai ou faux et pourquoi) ?

1. ☐ une translation.
2. ☐ une homothétie de rapport i.
3. ☒ une rotation.
4. ☐ une rotation dont le centre est le point d'affixe 1.
5. ☒ une rotation dont le centre est le point d'affixe $-(1+i)/2$.
6. ☐ une rotation d'angle $-\pi/2$.

Vrai-Faux 3.10. L'application qui à un point d'affixe z associe le point d'affixe $i\bar{z}$ est (vrai ou faux et pourquoi) ?

1. ☐ une homothétie de rapport i.

2. ☐ une rotation.
3. ☒ une symétrie.
4. ☐ la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.
5. ☒ la symétrie par rapport à la première bissectrice.

3.2. Exercices

Exercice 3.1. Calculer les nombres suivants.

$$\sum_{k=1}^{3}\sum_{h=1}^{k}1\,,\quad \sum_{k=1}^{3}\sum_{h=1}^{k}h\,,\quad \sum_{k=1}^{3}\sum_{h=1}^{k}k\,,$$

$$\sum_{k=1}^{3}\prod_{h=1}^{k}h\,,\quad \sum_{k=1}^{3}\prod_{h=1}^{k}k\,,\quad \prod_{k=1}^{3}\sum_{h=1}^{k}h\,,$$

$$\prod_{k=1}^{3}\sum_{h=1}^{k}k\,,\quad \prod_{k=1}^{3}\prod_{h=1}^{k}h\,,\quad \prod_{k=1}^{3}\prod_{h=1}^{k}k\,.$$

Exercice 3.2. Soient a_1, a_2, a_3, a_4 quatre variables. Ecrire à l'aide des symboles $\sum$ et $\prod$ les quantités suivantes.

1. $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$.
2. $a_1 + a_1a_2 + a_1a_2a_3 + a_1a_2a_3a_4$.
3. $a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4$.
4. $a_1a_2a_3 + a_2a_3a_4$.
5. $a_1a_2 + a_1a_3 + a_1a_4 + a_2a_3 + a_2a_4 + a_3a_4$.
6. $a_1(a_1 + a_2)(a_1 + a_2 + a_3)(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$.

Exercice 3.3. Démontrer par récurrence les assertions suivantes.

1. $\forall n \in \mathbf{N}, \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+1) = (n+1)(n+2)/2.$
2. $\forall n \in \mathbf{N}, \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n}k^2 = n(n+1)(2n+1)/6.$
3. $\forall n \in \mathbf{N}, \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n}k^3 = n^2(n+1)^2/4.$

4. $\forall n \in \mathbf{N},\quad \sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1.$
5. $\forall n \in \mathbf{N},\quad \sum_{k=0}^{n} k2^k = (n-1)2^{n+1} + 2.$
6. $\forall n \in \mathbf{N}, n \geq 3,\quad \prod_{k=3}^{n} \frac{k^2-4}{k} = \frac{(n+2)!}{12n(n-1)}.$
7. $\forall n \in \mathbf{N}^*,\quad \prod_{k=1}^{n} (n+k) = 2^n \prod_{k=1}^{n} (2k-1).$

Exercice 3.4. Démontrer les égalités suivantes.

1. $\prod_{k=1}^{n} (2k) = 2^n\, n!.$
2. $\prod_{k=1}^{n-1} (2k+1) = \frac{(2n)!}{2^n\, n!}.$
3. $\prod_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{2k-1} = 2n+1.$
4. $\prod_{k=2}^{n} \frac{k^2-1}{k} = \frac{(n+1)!}{2n}.$

Exercice 3.5. Une entreprise veut se donner un nouveau sigle, qui soit formé d'exactement 3 lettres. De combien de façons peut-elle le faire ? Combien reste-t-il de possibilités si on impose au sigle d'être formé de lettres distinctes ?

Exercice 3.6. On met dans une boîte 26 jetons de Scrabble, portant chacune des lettres de l'alphabet. On en tire 3 à la fois. Combien de tirages différents peut-on obtenir ?

Exercice 3.7. Dix personnes doivent s'asseoir autour d'une table circulaire. On considère comme identiques deux dispositions dont l'une se déduit de l'autre par une rotation. Combien y a-t-il de dispositions possibles ? Combien en reste-t-il si deux personnes données refusent d'être assises à côté ?

Exercice 3.8. Une association comprenant 20 membres dont 12 femmes et 8 hommes désire former un comité de 5 personnes, dans lequel doivent se trouver au moins deux hommes et deux femmes. Calculer de combien de façons on peut former ce comité dans chacun des cas suivants.

1. Chaque membre de l'association accepte d'en faire partie.

2. Deux des femmes refusent d'en faire partie.
3. Monsieur X et Madame Y refusent de siéger ensemble.

Exercice 3.9. Démontrer les égalités suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(n-k)=\frac{n(n+1)}{2}$.
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$.
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2k+1)=(n+1)^2$.

Exercice 3.10. Démontrer les égalités suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}2^k=2^{n+1}-1$.
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}2^k=2^n-2$.
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1}2^{k/2}=\frac{2^n-1}{\sqrt{2}-1}$.
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}2^{2k-1}=\frac{4^{2n+1}-1}{6}$.
5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}2^k3^{n-k}=3^{n+1}-2^{n+1}$.
6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k2^{n-k}=\frac{2^{n+1}-(-1)^{n+1}}{3}$.

Exercice 3.11. Démontrer les égalités suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$.
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0$.

3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k} = 2^{2n-1}$ *(ajoutez les deux égalités précédentes).*
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}2^k\binom{n}{k} = 3^n$.
5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}2^{3k-1}\binom{n}{k} = 9^n/2$.
6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}2^{3k}3^{n-2k}\binom{n}{k} = (73/3)^n$.
7. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\mathrm{i}^k\binom{n}{k} = 2^{n/2}\mathrm{e}^{n\mathrm{i}\pi/4}$.
8. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}3^{k/2}\mathrm{i}^k\binom{n}{k} = 2^n\mathrm{e}^{n\mathrm{i}\pi/3}$.
9. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(nk-1) = \frac{n(n-1)(n+2)}{2}$.

Exercice 3.12. Calculer les sommes suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{k=3}^{n+4}(k-2)$.
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^{2k+1}2^{n-3k}$.

Exercice 3.13. Soit $n \in \mathbf{N}$ et $f(x) = (1+x)^n$.

1. En utilisant une formule du cours, écrivez $f(x)$ comme une somme où interviennent les puissances de x.
2. La dérivée de f est $f'(x) = n(1+x)^{n-1}$. L'intégrale de f sur $[0, 1]$ vaut
$$\int_0^1 f(x)dx = \left[\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$
En utilisant la question 1. donner une autre expression de $f'(x)$ et de cette intégrale.
3. En déduire les valeurs des expressions suivantes :
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}, \qquad \sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}, \qquad \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}.$$

Exercice 3.14. Soient n et p deux entiers naturels. Cet exercice présente une méthode générale pour calculer $\sum_{k=0}^{n} k^p$, sur le cas particulier $p = 2$.

1. Soit $x \to P(x)$ une fonction, donner une expression plus simple de $\sum_{k=0}^{n}(P(k+1)-P(k))$.
2. Soit a, b, c des réels et $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx$. Calculer $P(x+1) - P(x)$.
3. Déterminer a, b, c de sorte que $P(x+1) - P(x) = x^2$.
4. Déduire des questions précédentes que

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exercice 3.15. Le but de l'exercice est de démontrer que pour tout nombre entier naturel n non nul, et pour tout n-uplets de réels $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{R}^n$, $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbf{R}^n$ on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \times \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

On pose $A = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$, $B = \sum_{i=1}^{n} b_i^2$, $C = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$.

1. Soit $P(x) = \sum_{i=1}^{n} (a_i x + b_i)^2$. Exprimez $P(x)$ en fonction de A, B, C et x.
2. Si $A \neq 0$, quel est le signe du **trinôme** du second degré P ?
3. Déduisez que $C^2 \leqslant AB$.
4. Soit $(a_1, \ldots, a_n)$ un n-uplet de réels strictement positifs. Montrez que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \times \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right) \geqslant n^2$$

Exercice 3.16. Mettre sous la forme $a + \mathrm{i}b$ les nombres complexes suivants.

$$\frac{3+6\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}}, \quad \frac{5+2\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}, \quad \frac{-2}{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}, \quad \frac{1+2\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}},$$

$$\left(\frac{1+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}\right)^2 + \frac{3+6\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}}, \quad \frac{2+5\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} + \frac{2-5\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}, \quad \left(\frac{1+\mathrm{i}-\sqrt{3}(1-\mathrm{i})}{1+\mathrm{i}}\right)^2.$$

Exercice 3.17. Calculer le module et l'argument des nombres complexes suivants.

$$1+\mathrm{i}\,,\quad 3+3\mathrm{i}\,,\quad 1+\mathrm{i}\sqrt{3}\,,\quad -1+\mathrm{i}\sqrt{3}\,,$$
$$\sqrt{3}+\mathrm{i}\,,\quad -\frac{4}{3}\mathrm{i}\,,\quad 1+\mathrm{i}(1+\sqrt{2})\,,\quad (1+\sqrt{2})-\mathrm{i}\,.$$

Exercice 3.18. Mettre sous la forme $a+\mathrm{i}b$ les nombres complexes suivants.

$$2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}\,,\quad 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/8}\,,\quad 2\mathrm{e}^{-7\mathrm{i}\pi/3}\,,\quad 3\mathrm{e}^{-7\mathrm{i}\pi/8}\,,$$
$$(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4})(\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\pi/4})\,,\quad \frac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}}{\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\pi/4}}$$
$$(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3})(3\mathrm{e}^{-5\mathrm{i}\pi/6})\,,\quad \frac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}}{3\mathrm{e}^{-5\mathrm{i}\pi/6}}$$

Exercice 3.19. Effectuer les calculs suivants en utilisant la forme exponentielle.

$$\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\,,\quad \left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^3\,,\quad (1+\mathrm{i}\sqrt{3})^4$$
$$(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^5+(1-\mathrm{i}\sqrt{3})^5\,,\quad \frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}\,,\quad \frac{\sqrt{6}-\mathrm{i}\sqrt{2}}{2-2\mathrm{i}}$$

Exercice 3.20. Calculer les racines carrées des nombres suivants.

$$-1\,,\quad \mathrm{i}\,,\quad 1+\mathrm{i}\,,\quad -1-\mathrm{i}\,,\quad 1+\mathrm{i}\sqrt{3}$$
$$3+4\mathrm{i}\,,\quad 8-6\mathrm{i}\,,\quad 7+24\mathrm{i}\,,\quad 3-4\mathrm{i}\,,\quad 24-10\mathrm{i}$$

Exercice 3.21.

1. Calculer les racines carrées de $(1+\mathrm{i})/\sqrt{2}$. En déduire les valeurs de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$.
2. Calculer les racines carrées de $(\sqrt{3}+\mathrm{i})/2$. En déduire les valeurs de $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.

Exercice 3.22. Résoudre dans $\mathbf{C}$ les équations suivantes.

$$z^2+z+1=0\,,\quad z^2-z+1=0\,,\quad z^2+2z+4=0\,,$$
$$4z^2-2z+1=0\,,\quad z^2+(1+2\mathrm{i})z+\mathrm{i}-1=0\,,\quad z^2-(3+4\mathrm{i})z-1+5\mathrm{i}=0\,,$$
$$z^2+4z+5=0\,,\quad z^2-(1-\mathrm{i})z-\mathrm{i}=0\,,\quad z^2-(11-5\mathrm{i})z+24-27\mathrm{i}=0\,,$$
$$z^3=\mathrm{i}\,,\quad z^3=\frac{-1+\mathrm{i}}{4}\,,\quad z^3=2-2\mathrm{i}\,,$$
$$z^4=1\,,\quad z^4=(-1+\mathrm{i}\sqrt{3})/2\,,\quad \left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4=1\,.$$

Exercice 3.23. Soit θ un réel.

1. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}$. En déduire les valeurs de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sin(k\theta)$.
2. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} e^{ik\theta}$. En déduire les valeurs de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(k\theta)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(k\theta)$.

Exercice 3.24. Montrer en utilisant la formule de Moivre que :

$$\cos(4x) = 8\cos^4(x) - 8\cos^2(x) + 1\,, \quad \sin(4x) = 4\cos^3(x)\sin(x) - 4\cos(x)\sin^3(x)$$

Exercice 3.25. Linéariser :

$$\cos^3(x)\,,\quad \sin^3(x)\,,\quad \cos^4(x)\,,\quad \sin^4(x)\,,$$
$$\cos^2(x)\sin^2(x)\,,\quad \cos(x)\sin^3(x)\,,\quad \cos^3(x)\sin(x)\,,$$
$$\cos^3(x)\sin^2(x)\,,\quad \cos^2(x)\sin^3(x)\,,\quad \cos(x)\sin^4(x)\,.$$

Exercice 3.26.

1. Déterminer l'ensemble des complexes z tels que $(1-z)/(1-iz)$ soit réel.
2. Déterminer l'ensemble des complexes z tels que $(1-z)/(1-iz)$ soit imaginaire pur.
3. Déterminer l'ensemble des complexes z tels que les points d'affixe 1, z, $1+z^2$ soient alignés.
4. Déterminer l'ensemble des complexes z tels que les points d'affixe z, iz, i forment un triangle équilatéral.
5. Déterminer l'ensemble des complexes z tels que les points d'affixe z, z^2, z^3 forment un triangle rectangle au point d'affixe z.
6. Déterminer l'ensemble des complexes z tels que les points d'affixe z, $1/z$, $1-z$ soient sur un même cercle, de centre l'origine.

Exercice 3.27.

1. Montrer que $(1+i)^6 = -8i$.
2. En déduire une solution de l'équation $(E)\quad z^2 = -8i$.
3. Ecrire les deux solutions de (E) sous forme algébrique, et sous forme exponentielle.
4. Déduire de la première question une solution de l'équation $(E')\quad z^3 = -8i$.
5. Soit A le point d'affixe $2i$. Soit B l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $2\pi/3$. Soit C l'image de B par la même rotation. Ecrire les affixes des points B et C, sous forme exponentielle, puis sous forme algébrique.
6. Vérifier que les affixes calculées à la question précédente sont solution de (E').

7. Montrer que le triangle ABC est équilatéral et que O est son centre de gravité.

Exercice 3.28. On note j le nombre complexe $e^{2i\pi/3}$. On pose $a = 8$, $b = 6j$ et $c = 8j^2$. On note A, B et C les points d'affixes respectives a, b et c. On note

- A' l'image de B par la rotation de centre C, et d'angle $\pi/3$
- B' l'image de C par la rotation de centre A, et d'angle $\pi/3$
- C' l'image de A par la rotation de centre B. et d'angle $\pi/3$

On note a', b' et c' les affixes respectives de A', B' et C'.

1. Calculer a', b' et c'.
2. Montrer que les droites AA', BB' et CC' sont concourantes en 0.
3. Montrer que $j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0$
4. Soit z un nombre complexe quelconque. Montrer que
$$|(a-z) + (b-z)j^2 + (c-z)j| = 22$$
5. On admet que quels que soient les nombres complexes z et z', $|z+z'| \leqslant |z| + |z'|$. Montrer que la somme de distances $MA + MB + MC$ est minimale lorsque $M = O$.

Compléments

Ce paragraphe de compléments est réservé à une seconde lecture.

3.1. Les formules de Ramanujan. — Srinivasa Ramanujan (1887-1920) avait appris tout seul les mathématiques, grâce à deux livres seulement. Admis en 1903 dans un collège gouvernemental du sud de l'Inde, il était tellement obnubilé par ses recherches qu'il échoua à ses examens, et ce quatre ans de suite. Ayant obtenu un poste dans un comptoir de Madras, ses supérieurs l'encouragèrent à envoyer ses résultats à d'éminents mathématiciens anglais. Seul G.H. Hardy (1877–1947) fit l'effort de s'intéresser à la lettre qu'il reçut le 16 janvier 1913, et qui contenait 120 formules. L'écriture mathématique était particulière et aucune justification n'était fournie. Ramanujan n'aura d'ailleurs jamais une idée claire de ce qu'est une démonstration. Il disait ; « une équation pour moi n'a aucun sens, à moins qu'elle n'exprime une pensée de Dieu ».

Après quelques heures d'effort, Hardy reconnut certaines formules ; d'autres étaient erronées. Mais un grand nombre étaient totalement nouvelles. Hardy déclara « un coup d'œil sur ces formules était suffisant pour se rendre compte qu'elles ne pouvaient être pensées que par un mathématicien de la plus grande classe. Elles devaient être vraies, car si elles ne l'étaient pas, personne n'aurait eu assez d'imagination pour les inventer ».

Hardy invita Ramanujan à Cambridge où il séjourna de 1914 à 1919. Au fil du temps, la santé de Ramanujan déclinait, et son régime strictement végétarien ainsi que les restrictions dues à la première guerre mondiale ne l'amélioraient pas. Il retourna en Inde, ou il mourut à seulement 32 ans. Personne, pas même Hardy, n'avait eu le temps de comprendre d'où lui venaient ses intuitions géniales. Il fit dans sa vie environ 6000 découvertes qu'il consignait dans des carnets. Le déchiffrage de ces carnets a occupé de nombreux mathématiciens tout au long du 20ème siècle.

Voici une des nombreuses formules que Ramanujan donna pour le calcul de π : elle date de 1910 mais ne fut démontrée qu'en 1985.

$$\pi = \frac{9801}{2\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!}{(n!)^4} \frac{1103 + 26390n}{396^{4n}}}$$

3.2. Le Rapido. — Voulez-vous calculer vos chances de gagner au Bridge, au Poker, au Loto, au Keno ? Le procédure est à peu près la même et vous avez tous les outils en main.

Commençons par une formule générale, qui vous servira pour tous les jeux de hasard. Soit N un entier au moins égal à 2. Soient m et n deux autres entiers inférieurs ou égaux à N.

$$\binom{N}{n} = \sum_{k=0}^{\min\{m,n\}} \binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k} \tag{41}$$

On peut démontrer cette formule par récurrence, en utilisant les propriétés des coefficients du binôme, mais il est plus intéressant de la comprendre. Disons que N est un nombre d'objets parmi lesquels vous vous apprêtez à en piocher n : $N = 52$ cartes et vous en recevez $n = 13$ (Bridge) ; $N = 32$ cartes et vous en recevez $n = 5$ (Poker) ; $N = 49$ numéros et vous en cochez $n = 6$ (Loto) etc... Parmi les N objets, m sont *marqués* et ce sont ceux qui peuvent vous faire gagner : $m = 4$ as au bridge, $m = 6$ numéros du tirage officiel au loto, etc...

Vous avez $\binom{N}{n}$ choix possibles. Ces choix se répartissent selon le nombre d'objets marqués que vous aurez en main. Il peut y en avoir au plus $\min\{m, n\}$. Comment constituer une sélection de n objets en tout, parmi lesquels k sont marqués ? Il faut choisir les k objets marqués parmi m en tout : $\binom{m}{k}$ façons de le faire. Il faut ensuite choisir $n-k$ objets non marqués parmi $N-m$: $\binom{N-m}{n-k}$ possibilités. La formule (41) traduit cette décomposition.

Comme cas particulier, voici comment décomposer le nombre de mains au bridge (13 cartes distribuées sur 52) en fonction du nombre d'as qu'elles contiennent.

$$\binom{52}{13} = \binom{4}{0}\binom{48}{13} + \binom{4}{1}\binom{48}{12} + \binom{4}{2}\binom{48}{11} + \binom{4}{3}\binom{48}{10} + \binom{4}{4}\binom{48}{9}.$$

Comment en déduire vos chances d'avoir 4 as dans une main ? C'est facile, il suffit de diviser le nombre de mains contenant 4 as par le nombre total de mains.

$$\frac{\binom{4}{4}\binom{48}{9}}{\binom{52}{13}} \simeq 0.002641$$

Le Rapido, comme son nom l'indique, ne demande pas une réflexion très puissante, et les résultats défilent toutes les 10 minutes sur un écran de télé. Pour jouer, vous cochez 8 numéros parmi 20 sur la grille A, et 1 numéro parmi 4 sur la grille B. Les « bons » numéros affichés à la télé sont choisis de même. Vous pouvez donc avoir k bons numéros (k entre 0 et 8) sur la grille A et 0 ou 1 sur la grille B. Vos chances d'avoir k bons numéros sur la grille A sont de

$$\frac{\binom{8}{k}\binom{12}{8-k}}{\binom{20}{8}}$$

Pour avoir vos chances d'avoir en plus le bon numéro de la grille B, multipliez par 1/4. Voici les probabilités pour k allant de 0 à 8 et $b = 0$ ou 1 selon que vous avez ou non le numéro de la grille B.

$b\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0.00295	0.03772	0.15404	0.26406	0.20630	0.07335	0.01100	0.00057	0.00001
1	0.00098	0.01257	0.05135	0.08802	0.06877	0.02445	0.00367	0.00019	0.00000

Vos chances d'avoir au moins 3 bons numéros sur la grille A sont de 74%, ce qui vous encourage à jouer. Cependant vous ne gagnez qu'à partir de 4 bons numéros. Voici les gains en euros offerts pour 1 euro misé, pour chacune des combinaisons gagnantes.

$b\backslash k$	4	5	6	7	8
0	0	2	10	50	1000
1	1	6	30	150	10000

D'après les probabilités calculées plus haut, sur 100 000 joueurs payant chacun 1 euro, environ 6877 gagneront 1 euro, environ 7335 gagneront 2 euros, environ 2445 gagneront 6 euros, ... Au total, la Française des Jeux reversera en moyenne 66 518 euros, pour 100 000 euros de mise empochés.

3.3. La marquise de Tencin. — Claudine Alexandrine Guérin, marquise de Tencin (1682-1749) était une femme du siècle des lumières. Née à Grenoble, elle fut placée au couvent de Montfleury à l'âge de 8 ans. Contrainte de prononcer ses vœux afin que sa famille puisse disposer de ses biens, elle se révolta et, dès la mort de son père en 1705, après avoir déposé une protestation chez un notaire, elle s'enfuit du couvent. Relevée de ses vœux par le pape en 1712, elle gagna Paris où elle se lança dans l'intrique politique et la galanterie. On lui prêta de nombreux amants, parmi lesquels le chevalier Destouches, dont elle eut un fils en 1717. Abandonné dès sa naissance sur les marches de la chapelle de Saint-Jean-le-Rond près de Notre-Dame, ce fils fut baptisé Jean Le Rond.

A 12 ans, il entre au collège janséniste des Quatre-Nations, où il étudie la philosophie, le droit et les arts, et devient avocat en 1738. Il s'intéresse à la médecine et aux mathématiques. Il s'était d'abord inscrit sous le nom de Daremberg, puis il le change en d'Alembert, nom qu'il conservera toute sa vie. Il est un des maîtres d'œuvre de l'Encyclopédie, dont le premier tome paraît en 1751.

En 1743 dans son Traité de Dynamique, il énonce le théorème fondamental de l'algèbre, qui dit que tout polynôme de degré n à coefficients complexes possède n racines dans $\mathbf{C}$ (ceci avait déjà été conjecturé par Girard au début du 17ème siècle). La démonstration que d'Alembert donne de ce résultat est incomplète, et il faudra attendre Carl Friedrich Gauss (1777–1855) pour une démonstration rigoureuse. En fait, celui-ci en donnera 4 tout au long de sa vie, clarifiant au passage considérablement la notion de nombre complexe.

Et Madame de Tencin ? On raconte que dès les premiers succès de son fils, elle désira se rapprocher de lui et le fit venir dans le salon littéraire (et aussi politique et financier) qu'elle tenait à Paris. D'Alembert y vint accompagné de sa mère adoptive, et se montra très froid à l'égard de la belle marquise. . .

3.4. Equations résolubles par radicaux. — On résout des équations du premier et du second degré au moins depuis les babyloniens, au début du deuxième millénaire avant notre ère, mais ce n'est que depuis les 16ème et surtout 17ème siècles que zéro et les nombres négatifs sont traités de la même façon que les nombres positifs. Ainsi il y avait avant une théorie pour l'équation $x^2 = ax + b$ et une autre pour $x^2 + ax = b$, a et b étant supposés positifs.

Au début du 9ème siècle Al Khawarizmi (dont le nom a donné algorithme) décrit la méthode de résolution des équations du second degré, pratiquement telle que vous la connaissez (mais en supposant que le discriminant est positif ou nul). Il faudra attendre sept siècles et une belle bagarre avant que l'on sache résoudre les équations de degré 3 et 4.

Niccolò Fontana, dit Tartaglia (1499-1557) est né à Brescia. Son surnom qui signifie « le bègue », provient d'un défaut d'élocution, séquelle d'un coup de sabre reçu en 1512. Ayant appris les mathématiques en autodidacte, il gagna sa vie en les enseignant dans toute l'Italie et en participant à des concours mathématiques. Il se consacra très tôt à la recherche d'une méthode de résolution d'équations du troisième degré.

Scipione del Ferro, professeur de mathématiques à Bologne, semble être le premier à résoudre les équations du troisième degré du type $x^3 = ax + b$. Il ne publia pas sa méthode mais la révéla avant sa mort à son élève Fior. En 1535, celui-ci lança à Tartaglia un défi public sous la forme d'un concours portant sur la résolution d'équations. Fior proposa 30 équations du type $x^3 + ax = b$, que Tartaglia résolut, et Tartaglia proposa 30 équations du type $x^3 + ax^2 = b$, que Fior ne savait pas résoudre. Vainqueur haut la main, Tartaglia renonça au prix : 30 banquets successifs !

A partir de 1539 Girolano Cardano (1501-1576) (l'inventeur du joint de Cardan) se passionne pour la résolution d'équations. Il fait venir Tartaglia chez lui, lui promet de lui présenter un mécène pour résoudre ses problèmes d'argent et lui demande de lui révéler sa technique, en lui promettant le secret. Cardan comprend alors la méthode générale, mais ayant appris que del Ferro avait trouvé une partie de la solution avant Tartaglia, il décide de la publier dans son livre *Ars Magna* en 1545 et s'en approprie la découverte. Une violente dispute s'ensuit !

Cardan ne parvenant pas à résoudre une équation de degré 4, il demanda l'aide de Ferrari. Celui-ci trouva le moyen de se ramener à une équation de degré 3, que Cardan savait désormais résoudre.

Voici ce que l'on appelle de manière assez injuste les « formules de Cardan ». Considérons l'équation

$$(E) \qquad ax^3 + bx^2 + cx + d = 0\,,$$

avec $a \neq 0$. En divisant par a puis en posant $z = x + b/(3a)$, on obtient l'équation

$$(E') \qquad z^3 + pz + q = 0\,,$$

où

$$p = \frac{3ac - b^2}{3a^2} \quad \text{et} \quad q = \frac{27a^2d - 9abc + 2b^3}{27a^3}\,.$$

Si $4p^3 + 27q^2 \geqslant 0$, La formule suivante donne une solution réelle en z :

$$z_0 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4p^3 + 27q^2}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4p^3 + 27q^2}{27}}} \tag{42}$$

Del Ferro, Fior, Tartaglia et Cardan n'utilisaient leurs formules que pour des équations dont on savait à l'avance qu'elles avaient des solutions réelles. Quand tout se passait bien, (42) donnait cette solution réelle. En factorisant par $(z - z_0)$, on se ramenait à une équation de degré 2 que l'on savait résoudre.

Cardan, puis Bombelli furent intrigués par l'équation $x^3 - 15x - 4 = 0$, dont 4 est racine. Pourtant, la formule de Cardan donne comme solution

$$\sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}\,.$$

En fait dans le cas général (42) définit six nombres complexes, parmi lesquels seulement trois sont solutions de l'équation (E'). En effet, si u est tel que $u^3 = z$, les deux autres racines cubiques de z sont ju et $\bar{j}u$, où $j = e^{2i\pi/3}$ et $\bar{j} = j^2 = e^{4i\pi/3}$ sont les deux racines cubiques de l'unité différentes de 1. Voici la solution complète de (E').

1. Si $4p^3 + 27q^2 \geqslant 0$, soient u et v les deux réels tels que

   $$u^3 = -\frac{q}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4p^3 + 27q^2}{27}} \quad \text{et} \quad v^3 = -\frac{q}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4p^3 + 27q^2}{27}}$$

   Les trois solutions de (E') sont

   $$z_1 = u + v\,, \quad z_2 = ju + \bar{j}v\,, \quad z_3 = \bar{j}u + jv\,.$$

   L'équation (E') a une solution réelle, et deux solutions complexes conjuguées.
2. Si $4p^3 + 27q^2 < 0$, soit u un des complexes tels que

   $$u^3 = -\frac{q}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{\frac{-4p^3 - 27q^2}{27}}$$

Les trois solutions de (E') sont

$$z_1 = u + \overline{u}, \quad z_2 = ju + \bar{j}\overline{u}, \quad z_3 = \bar{j}u + j\overline{u}.$$

L'équation (E') a trois solutions réelles, même s'il faut passer par les complexes pour les écrire.

En 1572, Bombelli surmonte sa répulsion à l'égard des racines carrées de nombres négatifs et écrit le nombre « più di meno », c'est-à-dire i, puis définit les règles que vous connaissez, en particulier « più di meno via più di meno fa meno » : $i \times i = -1$. On constata bientôt qu'en acceptant les racines complexes et en comptant ces racines avec leur multiplicité, toute équation de degré 2 avait 2 racines, toute équation de degré 3 en avait 3 et toute équation de degré 4 en avait 4. Ceci fut énoncé par Girard en 1629, puis Descartes en 1637.

Et les équations de degré 5 ? On chercha longtemps une « résolution par radicaux » : une formule générale ne faisant intervenir que les opérations de $\mathbf{C}$ et l'extraction de racines. Le mémoire sur la résolution algébrique des équations que Joseph Louis Lagrange (1736–1813) publia en 1772 était une avancée importante. Il proposait une théorie ramenant le problème à l'étude des différentes valeurs que peuvent prendre certaines fonctions des racines lorsque l'on permute ces racines entre elles. Il y montrait aussi que les méthodes qui avaient conduit à la résolution des équations de degré $\leqslant 4$ ne pouvaient pas fonctionner sur une équation de degré 5 générale. Il s'écoula encore 60 ans avant qu'Evariste Galois (1811–1832) ne comprenne que la résolubilité par radicaux était liée aux propriétés du groupe des permutations des racines. Une conséquence de la théorie de Galois était la démonstration du fait que les équations de degré 5 n'étaient pas résolubles par radicaux en général. Ce n'est qu'en 1870, avec la parution du « Traité des substitutions et des équations algébriques » de Camille Jordan (1838–1922) que l'ampleur des conceptions de Galois fut pleinement comprise.

Il faut dire que Galois avait exposé ses idées dans des articles plutôt mal écrits, souvent incomplets, ainsi que dans une lettre à un ami, fébrilement écrite dans la nuit du 29 mai 1832. Elle se terminait par ces mots : « Après cela, il y aura j'espère des gens qui trouveront leur profit à déchiffrer tout ce gâchis. Je t'embrasse avec effusion ». Le lendemain matin, il mourait des suites d'un duel ; il avait 21 ans.

Plan et espace

Agnès Coquio, Eric Dumas, Emmanuel Peyre et Bernard Ycart

Ce chapitre est en partie une révision des programmes de géométrie de vos années de collège et de lycée.

Cours

4.1. Introduction. — La façon traditionnelle d'aborder les vecteurs est de les définir à partir de points d'un espace affine.

Plus précisément, on considère $\mathscr{E}$, un *espace affine* (un plan ou un espace de dimension 3) qui est un ensemble de *points*

À un couple (A, B) de points de $\mathscr{E}$ est associé un vecteur de E, noté $\overrightarrow{AB}$. On a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si les segments $[A, D]$ et $[B, C]$ ont le même milieu (ou si ABDC est un parallélogramme). On peut alors montrer à partir de quelques axiomes de géométrie affine que ce qui précède a bien un sens, i.e. si $ABDC$ est un parallélogramme et $CDFE$ est un parallélogramme alors $ABFE$ est un parallélogramme.

On peut définir sur l'ensemble E des vecteurs une addition grâce à la *relation de Chasles*, pour tous points A, B, C de l'espace affine $\mathscr{E}$,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}\,.$$

L'ensemble E est donc muni de deux opérations, l'addition et la multiplication par un réel. Ce sont bien celles que vous connaissez et leurs propriétés vous sont familières (figure 18).

Si A est un point de $\mathscr{E}$ et $\vec{u}$ un vecteur de E, il existe un unique point B dans $\mathscr{E}$ tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$. (On dira que B est l'image de A par la translation de vecteur $\vec{u}$).

En effet si $\vec{u} = \overrightarrow{CD}$, il suffit de construire le point B tel que $ABDC$ soit un parallélogramme, ce qui se construit en prenant des parallèles.

Lorsque $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, on écrit :

$$B = A + \vec{u},$$

malgré le risque de confusion avec l'addition des vecteurs.

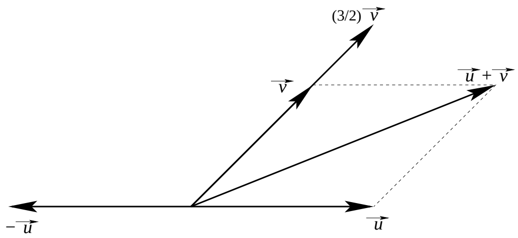


FIGURE 18. Addition de deux vecteurs et multiplication d'un vecteur par un réel.

4.2. Structure d'espace vectoriel réel. — Nous allons maintenant définir la *structure* d'espace vectoriel. L'objectif de cette définition est d'avoir un cadre dans lequel on peut démontrer un certains nombres de propriétés qu'on pourra ensuite appliquer à tous les espaces vectoriels, quelle soit la façon dont ils sont construits.

Définition 4.1

Un *espace vectoriel réel* (ou **R**-espace vectoriel ou espace vectoriel sur **R**)est un ensemble E muni d'une apllication appelée *addition*

$$\begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & E \\ \left(\vec{u}, \vec{v}\right) & \longmapsto & \vec{u} + \vec{v} \end{array}$$

et d'une application appelée *multiplication par un scalaire*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R} \times E & \longrightarrow & E \\ \left(\lambda, \vec{v}\right) & \longmapsto & \lambda\vec{v} \end{array}$$

qui vérifient les huit conditions suivantes :

(EV1) (Associativité de l'addition)

$$\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in E, \quad (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w});$$

(EV2) (Élément neutre pour l'addition) Il existe un élément $\overrightarrow{0}$ de E tel que

$$\forall u \in E, \quad \vec{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + \vec{u} = \vec{u};$$

(EV3) (Opposé pour l'addition) Pour tout élément $\vec{u} \in E$, il existe $\vec{v} \in E$ tel que

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u} = \overrightarrow{0}.$$

Pour un $\vec{u}$ donné, il existe un unique $\vec{v} \in E$ qui vérifie cette condition. On l'appelle l'*opposé* de $\vec{u}$ et on le note $-\vec{u}$.

(EV4) (Commutativité de l'addition)

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in E, \quad \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u};$$

(EV5) (Associativité de la multiplication scalaire)

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbf{R}, \forall \vec{u} \in E, \quad \lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u};$$

(EV6) (Distributivité à droite de la multiplication scalaire)

$$\forall \lambda \in \mathbf{R}, \forall \vec{u}, \vec{v} \in E, \quad \lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v};$$

(EV7) (Distributivité à gauche de la multiplication scalaire)

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbf{R}, \forall \vec{u} \in E, \quad (\lambda + \mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u};$$

(EV8) (Multiplication par l'unité)

$$\forall \vec{u} \in E, \quad 1\vec{u} = \vec{u}.$$

Remarque 4.2. — Cette liste peut paraître longue, mais il suffit, en première lecture, de retenir que les règles de calculs enseignées dans le secondaire pour les vecteurs sont valides dans les espaces vectoriels. Ainsi, par exemple, la formule $0\vec{u} = 0_E$ pour un élément $\vec{u}$ de E découle des précédentes. En effet, en utilisant uniquement les conditions de la définition, on a la suite d'égalités :

$$0\vec{u} = 0\vec{u} + \overrightarrow{0} = 0\vec{u} + (\vec{u} + (-\vec{u})) = (0\vec{u} + 1\vec{u}) + (-\vec{u}) = (0+1)\vec{u} + (-\vec{u}) = 1\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{u} + (-\vec{u}) = \overrightarrow{0}.$$

On laisse en exercice la démonstration du fait que pour tout $\vec{u} \in E$, on a l'égalité $(-1)\vec{u} = -\vec{u}$.

Terminologie 4.3

Un *vecteur* est un élément d'un espace vectoriel.

Exemple 4.4. — L'ensemble $\mathbf{R}^n$, muni de l'addition

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

pour $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbf{R}$ et de la multiplication scalaire

$$\lambda(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$$

pour $\lambda, x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{R}$, est un espace vectoriel réel. Dans cet espace, le vecteur nul est $\overrightarrow{0} = (0, \ldots, 0)$ et l'opposé du vecteur $(x_1, \ldots, x_n)$ est le vecteur $(-x_1, \ldots, -x_n)$.

Exemple 4.5. — L'ensemble des vecteurs d'un espace affine muni de l'addition et du produit scalaire décrits au paragraphe précédent forme un espace vectoriel réel, où le vecteur nul est le vecteur $\overrightarrow{AA}$ pour tout point A de l'espace et l'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur $\overrightarrow{BA}$.

Notations 4.6

Par abus de notation, on note également 0 le vecteur nul $\overrightarrow{0}$. On prendra donc garde que 0 peut aussi bien désigner le nombre réel nul que le vecteur nul.

On note également $u - v$ pour $u + (-v)$. Compte tenu de l'associativité de l'addition, on peut définir le symbole de somme Σ comme on la fait pour des familles de nombres. Étant donné des entiers $a \leqslant b$ et une famille de $b - a + 1$ vecteurs $\left(\vec{u}_a, \ldots, \vec{u}_b\right)$, on définit

$$\sum_{k=a}^{b} \vec{u}_k = \vec{u}_a + \vec{u}_{a+1} + \ldots \vec{u}_b.$$

Par convention, si $b < a$, la somme $\sum_{k=a}^{b} \vec{u}_k$ est le vecteur nul.

4.3. Combinaison linéaire, familles libres, liées et génératrices. — Dans ce paragraphe, la lettre E désigne un espace vectoriel réel. On définit une combinaison linéaire de vecteurs comme suit.

Définition 4.7

Soit $n \in \mathbf{N}$ et soient $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$ des vecteurs de E. On appelle *combinaison linéaire*des vecteurs $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$ tout vecteur w qui peut s'écrire :

$$w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{u}_i = \lambda_1 \vec{u}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{u}_n\,,$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des nombres réels.

Exemple 4.8. — Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs, les combinaisons linéaires de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont les vecteurs de la forme $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$, où λ et μ sont deux réels quelconques.

Notation 4.9

Soit $n \in \mathbf{N}$ et soient $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$ des vecteurs de E. On note $\mathrm{Vect}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$.

Proposition 4.10

Soit $n \in \mathbf{N}$ et soient $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$ des vecteurs de E. L'ensemble $\mathrm{Vect}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ muni de l'addition et de la multiplication scalaire induites de celles de E forme un espace vectoriel appelé *sous-espace vectoriel de E engendré par $\{u_1, \ldots, u_n\}$*

Exemples 4.11. — Si $n = 0$, alors il résulte de nos conventions sur les sommes que le sous-espace vectoriel engendré est $\{0\}$.

Si $n = 1$ et si $\vec{u}_1$ est un vecteur *non nul*, le sous-espace vectoriel engendré est formé de tous les multiples de $\vec{u}_1$ qui forment une droite (figure 19). Par contre, si $\vec{u}_1 = 0$, alors tout multiple de

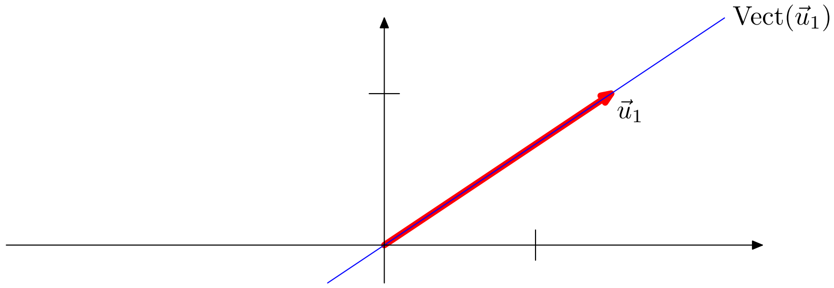


FIGURE 19. Sous-espace vectoriel engendré par un vecteur non nul

$\vec{u}_1$ est également non nul et le sous-espace vectoriel engendré est $\{0\}$.

Pour deux vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$, il va falloir également distinguer plusieurs cas : sur la figure 20 est représenté un exemple où l'espace vectoriel engendré par deux vecteurs de l'espace forme un plan. Mais supposons que le vecteur $\vec{u}_2$ soit proportionnel au vecteur $\vec{u}_1$, c'est-à-dire que $\vec{u}_2 = \rho\vec{u}_1$ pour un nombre réel ρ avec $\vec{u}_1 \neq 0$. Alors une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ s'écrit

$$\vec{w} = \lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 = (\lambda_1 + \lambda_2\rho)\vec{u}_1;$$

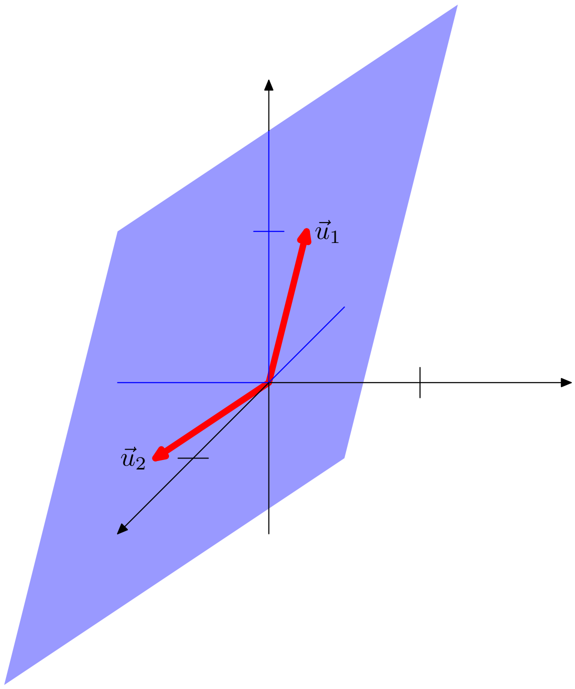


FIGURE 20. Sous-espace vectoriel engendré par deux vecteurs

autrement dit $\mathrm{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \mathrm{Vect}(\vec{u}_1)$ est une droite. Enfin, si les deux vecteurs sont nuls, le sous-espace vectoriel engendré est à nouveau réduit à $\{0\}$.

Les exemples précédents montrent l'intérêt d'introduire un critère qui permet de connaître la nature du sous-espace vectoriel engendré. Ces l'objet des définitions qui suivent ; celles-ci permettront de définir une notion de dimension pour les espaces vectoriel.

Définition 4.12

Soit $n \in \mathbf{N}$ et soient $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$ des vecteurs de E.

On dit que le n-uplet $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ est :

a) une *famille libre* si la seule combinaison linéaire nulle a tous ses coefficients nuls.

$$\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{u}_i = \vec{0} \implies (\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0);$$

b) une *famille liée* si elle n'est pas libre ;

c) une *famille génératrice* si tout vecteur de l'espace E est combinaison linéaires des vecteurs $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$.

d) une *base* si c'est une famille libre et génératrice.

Exemple 4.13. — Soit $\vec{u}$ un vecteur de E. La famille $(\vec{u})$ est libre si et seulement si le vecteur $\vec{u}$ n'est pas nul.

Si un des vecteurs $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ est nul, alors la famille $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ est liée.

Définition 4.14

Des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de E sont dit *colinéaires* s'il existe un nombre $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ ou $\vec{u} = \lambda\vec{v}$.

Remarque 4.15. — De manière équivalente, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si $\vec{u} = 0$ ou s'il existe un nombre λ tel que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$.

Proposition 4.16

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs de E. La famille $(\vec{u}, \vec{v})$ est liée si seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Démonstration. — Supposons la famille liée. Il existe alors un couple de nombres réels $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ tel que $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = 0$. Si $\mu = 0$, alors $\lambda \neq 0$ et donc $\vec{u} = 0$. Par conséquent les vecteurs sont colinéaires. Sinon $\vec{v} = -\frac{\lambda}{\mu}\vec{u}$ et les vecteurs sont également colinéaires.

Réciproquement, supposons que les vecteurs sont colinéaires. Si $\vec{v} = \lambda\vec{u}$, alors $\lambda\vec{u} + (-1)\vec{v} = 0$; Donc la famille $(\vec{u}, \vec{v})$ est liée. On raisonne de même si $\vec{u} = \lambda\vec{v}$. □

Terminologie 4.17

Trois vecteurs liés sont dits *coplanaires*.

Remarque 4.18. — Le lecteur pourra démontrer que trois vecteurs sont coplanaires si et seulement l'un d'entre eux s'écrit comme combinaison linéaire des deux autres.

Proposition 4.19

Soit $n \in \mathbf{N}$ et soit $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$ des vecteurs de E. On considère l'application $\varphi : \mathbf{R}^n \to E$ définie par

$$\varphi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{u}_k$$

alors

a) La famille $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ est libre si et seulement si φ est injective ;

b) La famille $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ est génératrice si et seulement si φ est surjective ;

c) La famille $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ est une base si et seulement si φ est bijective.

Définition 4.20

Si $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ est une base de E, les *coordonnées d'un vecteur $\vec{u} \in E$ dans la base $(\vec{a}_1, \ldots \vec{e}_n)$* est l'unique n-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n$ tel que

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_i \vec{e}_i = \vec{u}.$$

Théorème 4.21 (admis)

Si $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_m)$ et $(\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n)$ sont des bases de l'espace vectoriel de E alors $m = n$.

Définition 4.22

Si $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est une base de l'espace vectoriel E, alors n s'appelle la *dimension de E*. On la note $\dim(E)$.

Une *droite vectorielle* est un espace vectoriel de dimension un, un *plan vectoriel* est un espace vectoriel de dimension deux.

Théorème 4.23 (admis)

On suppose que l'espace vectoriel est de dimension n. Soit $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n) \in E^n$ une famille de n vecteurs. Les assertions suivantes sont équivalentes

(i) La famille $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ est libre ;

(ii) La famille $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ est génératrice ;

(iii) La famille $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ est une base.

On prendra garde au fait que l'équivalence ne vaut que lorsque le nombre de vecteurs est égal à la dimension de l'espace.

4.4. Espaces vectoriels de dimension 1, 2 ou 3. — L'addition et la multiplication des vecteurs se traduisent par les mêmes opérations sur les coordonnées. Enonçons ceci dans un espace vectoriel de dimension 3.

Proposition 4.24

Soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base de l'espace vectoriel de dimension 3. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, dont les coordonnées respectives dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ sont (x_u, y_u, z_u) et (x_v, y_v, z_v). Soient λ et μ deux réels quelconques. Les coordonnées du vecteur $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ sont $(\lambda x_u + \mu x_v, \lambda y_u + \mu y_v, \lambda z_u + \mu z_v)$.

$$\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = (\lambda x_u + \mu x_v)\vec{e}_1 + (\lambda y_u + \mu y_v)\vec{e}_2 + (\lambda z_u + \mu z_v)\vec{e}_3.$$

Un vecteur non nul $\vec{u}$ engendre une droite vectorielle. Si D est cette droite, $D = \{\lambda\vec{u}, \lambda \in \mathbf{R}\}$. La famille formée d'un vecteur $(\vec{u})$ est une base de D.

Deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ engendrent un plan vectoriel. Notons P ce plan. Le couple $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de P : pour tout vecteur $\vec{w}$ de P, il existe un unique couple $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$ tel que $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$. Par définition, (λ, μ) sont les coordonnées de $\vec{w}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$.

Plaçons-nous dans un espace vectoriel E de dimension 3. Les vecteurs d'une famille libre $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ engendrent l'espace. Le triplet $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est alors une base de l'espace : pour tout vecteur $\vec{v}$, il existe un unique triplet $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbf{R}^3$ tel que $\vec{v} = \lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \lambda_3\vec{u}_3$. Le triplet $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ sont les coordonnées de $\vec{v}$ dans la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$.

4.4.1. *Déterminant de deux vecteurs du plan.* — Dans ce paragraphe, on se place dans un plan vectoriel. Voyons comment traduire sur les coordonnées de deux vecteurs d'un plan vectoriel, la colinéarité de ces vecteurs.

Définition 4.25

Soit $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ une base du plan vectoriel. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, dont les coordonnées respectives dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ sont (x_u, y_u) et (x_v, y_v).

On appelle *déterminant de* $(\vec{u}, \vec{v})$ *dans la base* $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, la quantité notée $\text{Dét}_{(\vec{\imath}, \vec{\jmath})}(\vec{u}, \vec{v})$ définie par :

$$\text{Dét}_{(\vec{\imath}, \vec{\jmath})}(\vec{u}, \vec{v}) = x_u y_v - y_u x_v$$

Proposition 4.26

Soit $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ une base du plan vectoriel. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\text{Dét}_{(\vec{\imath}, \vec{\jmath})}(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

Proposition 4.27 (Propriétés du déterminant)

Soit $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ une base du plan vectoriel, soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs du plan et soit $\lambda \in \mathbf{R}$.

a) $\text{Dét}_{(\vec{\imath}, \vec{\jmath})}(\vec{u}, \vec{u}) = 0$

b) $\text{Dét}_{(\vec{\imath}, \vec{\jmath})}(\vec{v}, \vec{u}) = -\text{Dét}_{(\vec{\imath}, \vec{\jmath})}(\vec{u}, \vec{v})$

c) $\text{Dét}_{(\vec{\imath}, \vec{\jmath})}(\lambda\vec{u}, \vec{v}) = \lambda\,\text{Dét}_{(\vec{\imath}, \vec{\jmath})}(\vec{u}, \vec{v})$.

d) $\text{Dét}_{(\vec{\imath}, \vec{\jmath})}(\vec{u}, \vec{v} + \vec{w}) = \text{Dét}_{(\vec{\imath}, \vec{\jmath})}(\vec{u}, \vec{v}) + \text{Dét}_{(\vec{\imath}, \vec{\jmath})}(\vec{u}, \vec{w})$

Tout ceci se vérifie facilement à partir de la définition du déterminant (définition 4.25)

Proposition 4.28

Soient $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ et $(\vec{f}_1, \vec{f}_2)$ des bases du plan vectoriel. Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ des vecteurs du plan

$$\text{Dét}_{(\vec{e}_1,\vec{e}_2)}(\vec{u},\vec{v}) = \text{Dét}_{(\vec{e}_1,\vec{e}_2)}(\vec{f}_1,\vec{f}_2)\,\text{Dét}_{(\vec{f}_1,\vec{f}_2)}(\vec{u},\vec{v})$$

Démonstration. — Notons (x'_u, y'_u) les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{f}_1, \vec{f}_2)$ et (x'_v, y'_v) celles de $\vec{v}$ dans la base $(\vec{f}_1, \vec{f}_2)$. Des relations $\vec{u} = x'_u \vec{f}_1 + y'_u \vec{f}_2$ et $\vec{v} = x'_v \vec{f}_1 + y'_v \vec{f}_2$, on déduit de la proposition précédente les égalités

$$\begin{aligned}\text{Dét}_{(\vec{e}_1,\vec{e}_2)}(\vec{u},\vec{v}) &= x'_u y'_v\,\text{Dét}_{(\vec{e}_1,\vec{e}_2)}(\vec{f}_1,\vec{f}_2) + y'_u x'_v\,\text{Dét}_{(\vec{e}_1,\vec{e}_2)}(\vec{f}_2,\vec{f}_1)\\ &= \text{Dét}_{(\vec{e}_1,\vec{e}_2)}(\vec{f}_2,\vec{f}_1)\,\text{Dét}_{(\vec{f}_1,\vec{f}_2)}(\vec{u},\vec{v}).\end{aligned}$$ □

4.4.2. *Critère de colinéarité en dimension 3.* — Voyons maintenant comment traduire sur les coordonnées de deux ou trois vecteurs de l'espace qu'ils sont liés.

On considère une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de l'espace et $(\vec{u}, \vec{v})$ deux vecteurs de coordonnées respectives (x_u, y_u, z_u) et (x_v, y_v, z_v). Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont liés s'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ ou $\vec{v} = \lambda\vec{u}$. On voit alors que dans ce cas on a

$$\begin{cases} y_u z_v - z_u y_v = 0\\ z_u x_v - x_u z_v = 0\\ x_u y_v - x_v y_u = 0\end{cases}$$

On pose alors :

(43) $$a(\vec{u},\vec{v}) = y_u z_v - y_v z_u\,,\quad b(\vec{u},\vec{v}) = z_u x_v - z_v x_u\,,\quad c(\vec{u},\vec{v}) = x_u y_v - x_v y_u\,.$$

Lemme 4.29. — *Pour tous réels $x_u, y_u, z_u, x_v, y_v, z_v$, si a, b, c sont définis par (43), alors :*

(44) $$ax_u + by_u + cz_u = 0 \quad \text{et} \quad ax_v + by_v + cz_v = 0\,.$$

De plus les vecteurs de coordonnées respectives (x_u, y_u, z_u), (x_v, y_v, z_v) sont colinéaires si et seulement si $(a, b, c) = (0, 0, 0)$.

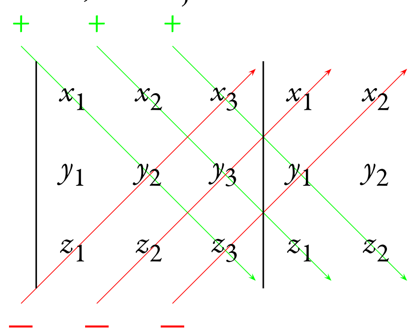
Démonstration. — La vérification, laissée au lecteur, est un peu fastidieuse, mais elle ne présente aucune difficulté. □

Définition 4.30

Le déterminant de trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de coordonnées respectives (x_u, y_u, z_u), (x_v, y_v, z_v) et (x_w, y_w, z_w) est donné par

$$\text{Dét}_{(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = a(\vec{u}, \vec{v})x_w + b(\vec{u}, \vec{v})y_w + c(\vec{u}, \vec{v})z_w$$

Remarque 4.31. — Pour calculer le déterminant de trois vecteurs au brouillon, on peut utiliser la règle de Sarrus : on réécrit les deux premières colonnes de la matrice à la droite de celle-ci, puis on effectue tous les produits en diagonale. On affecte du signe + les diagonales descendantes, du signe — les diagonales montantes, et on ajoute le tout.



Proposition 4.32

Les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ forment une famille liée si et seulement si

$$\text{Dét}_{(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0.$$

Démonstration. — Le sens direct est une conséquence du lemme (4.29).

Démontrons la réciproque. On suppose que $a(\vec{u}, \vec{v})x_w + b(\vec{u}, \vec{v})y_w + c(\vec{u}, \vec{v})z_w = 0$. Si $(\vec{u}, \vec{v})$ est une famille liée, alors les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ forment une famille liée. Supposons donc que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une famille libre. Notons $a = a(\vec{u}, \vec{v}), b = b(\vec{u}, \vec{v}), c = c(\vec{u}, \vec{v})$. D'après le lemme (4.29), $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Supposons $a \neq 0$, les autres cas se traitent de la même façon. Il s'agit de montrer qu'il existe (λ, μ) tel que $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$, ce qui équivaut à chercher une solution au système :

$$\left\{ \begin{aligned} x_w &= \lambda x_u + \mu x_v \\ y_w &= \lambda y_u + \mu y_v \\ z_w &= \lambda z_u + \mu z_v\,. \end{aligned} \right. \tag{45}$$

Considérons le sous-système

$$(46) \qquad \begin{cases} y_w = \lambda y_u + \mu y_v \\ z_w = \lambda z_u + \mu z_v \,. \end{cases}$$

En multipliant la première équation par z_v et la deuxième par $-y_v$, on obtient $z_v y_w - y_v z_w = a\lambda$, d'où $\lambda = \frac{z_v y_w - y_v z_w}{a}$.

On trouve de même $\mu = \frac{-z_u y_w + y_u z_w}{a}$.

il ne reste plus qu'à vérifier en utilisant la relation $ax_w + by_w + cz_w = 0$ que $x_w = \lambda x_u + \mu x_v$. □

Corollaire 4.33

Si $\vec{u}, \vec{v}$ forment une famille libre, l'équation

$$a(\vec{u},\vec{v})x + b(\vec{u},\vec{v})y + c(\vec{u},\vec{v})z = 0$$

est l'équation cartésienne du plan vectoriel engendré par $(\vec{u},\vec{v})$ dans le sens où un vecteur $\vec{w}$ de coordonnées (x,y,z) dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ appartient à ce plan si et seulement si $a(\vec{u},\vec{v})x + b(\vec{u},\vec{v})y + c(\vec{u},\vec{v})z = 0$.

4.5. Droites et plans affines. — Cette section rappelle les équations des droites et des plans.

4.5.1. *Rappel sur les espaces affines.* — Rappelons les propriétés de la translation, que nous utiliserons par la suite :

Définition 4.34

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine et soit $E = \overrightarrow{\mathscr{E}}$ l'espace vectoriel associé. Pour tout point $A \in E$ et tout vecteur $\vec{u} \in E$, il existe un unique point $B \in \mathscr{E}$ tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$. On note $B = A + \vec{u}$ et B s'appelle le *translaté* de A par $\vec{u}$. Les assertions suivantes sont vérifiées :

(EA1) (Associativité)

$$\forall A \in \mathscr{E}, \quad \forall \vec{u},\vec{v} \in E, \quad (A+\vec{u})+\vec{v} = A + (\vec{u}+\vec{v});$$

(EA2) (Unicité)

$$\forall A \in \mathscr{E}, \quad \forall \vec{u},\vec{v} \in E, \quad A+\vec{u} = A+\vec{v} \quad \Longrightarrow \vec{u} = \vec{v};$$

(EA3) (Transitivité)

$$\forall A, B \in \mathscr{E}, \quad \exists \vec{u} \in E, \quad A + \vec{u} = B.$$

L'application bijective de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ donnée par $A \mapsto A + \vec{u}$ s'appelle la *translation* de vecteur $\vec{u}$.

Remarques 4.35. — Étant donné des points $A, B \in \mathscr{E}$, l'unique vecteur $\vec{u}$ tel que $A + \vec{u} = B$ est le vecteur $\overrightarrow{AB}$. On notera les formules

$$A + \overrightarrow{AB} = B$$

pour $A, B \in \mathscr{E}$ et

$$A + \overrightarrow{0} = A$$

pour $A \in \mathscr{E}$.

4.5.2. *Repères affines.* — Pour définir des coordonnées dans un espace affine, on utilise un repère affine.

Définition 4.36

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine. Soit E l'espace vectoriel associé. La donnée d'une origine O et d'une base de l'espace vectoriel E constitue un *repère* de l'espace affine $\mathscr{E}$.

Soit $(O, \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ un repère affine de l'espace $\mathscr{E}$. Pour tout point M de $\mathscr{E}$, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ sont appelées les *coordonnées* du point M dans le repère $(O, \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$.

Remarques 4.37. — i) L'application qui à un point M de $\mathscr{E}$ associe ses coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ est une bijection de $\mathscr{E}$ sur $\mathbf{R}^n$. Ces coordonnées sont caractérisées par la relation

$$\overrightarrow{OM} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{u}_i.$$

ii) Par exemple si le plan affine $\mathscr{P}$ est muni d'un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, à tout point A du plan correspond le couple unique de réels (x, y) qui sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OA}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

4.5.3. *Équations de droites dans le plan affine.* — Nous considérons un plan affine $\mathscr{P}$ et son plan vectoriel associé P.

Soit A un point de $\mathscr{P}$ et $\vec{u}$ un vecteur non nul de P. La droite de vecteur directeur $\vec{u}$ passant par A est l'ensemble des points B tel qu'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $\overrightarrow{AB} = \lambda\vec{u}$.

$$\mathscr{D} = \{B \mid \exists\lambda \in \mathbf{R}, \overrightarrow{AB} = \lambda\vec{u}\} = \{A + \lambda\vec{u},\ \lambda \in \mathbf{R}\}.$$

Supposons le plan muni d'un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Notons x_A et y_A les coordonnées de A dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, x_u et y_u les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Les coordonnées x, y de $M = A + \lambda\vec{u}$ sont :

$$\begin{cases} x = x_A + \lambda x_u \\ y = y_A + \lambda y_u . \end{cases} \tag{47}$$

Les équations ci-dessus sont les *équations paramétriques* de la droite $\mathscr{D}$. On notera que l'application qui à un nombre réel λ associe le point de la droite de coordonnées $(x_A + \lambda x_u, y_A + \lambda y_u)$ définit une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\mathscr{D}$.

On obtient son *équation implicite* (on dit aussi « *cartésienne* ») en notant que le point M appartient à la droite $\mathscr{D}$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, ce qui se traduit, à l'aide de la proposition (4.26) par l'équation :

$$x_u(y - y_A) - y_u(x - x_A) = 0,$$

c'est-à-dire :

$$y_u x - x_u y - (y_u x_A - x_u y_A) = 0.$$

La proposition suivante montre que, réciproquement, toute équation de ce type définit bien une droite.

Proposition 4.38

Soient a et b deux réels, dont un au moins est non nul. Pour tout réel c l'ensemble des points de coordonnées (x, y) telles que :

$$ax + by + c = 0, \tag{48}$$

est une droite dont un vecteur directeur a pour coordonnées $(-b, a)$.

Démonstration. — Sans perte de généralité, nous pouvons supposer $a \neq 0$. Soit A un point dont les coordonnées (x_A, y_A) vérifient (48) (par exemple $x_A = -c/a$ et $y_A = 0$). Nous devons démontrer que, pour tout point M dont les coordonnées vérifient (48), le vecteur $\overrightarrow{AM}$ et le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(-b, a)$ sont colinéaires. Ecrivons :

$$\begin{aligned} ax \quad + by \quad + c &= 0 \\ ax_A + by_A + c &= 0, \end{aligned}$$

et soustrayons les deux équations. On obtient :

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0.$$

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM}$ sont $(x - x_A, y - y_A)$. On a alors

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) = \text{Dét}_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}(\overrightarrow{AM}, \vec{u}).$$

On en déduit en utilisant la proposition (4.26) que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires donc que le point M appartient à la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

Réciproquement si M appartient à la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$, les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires donc $a(x-x_A)+b(y-y_A) = 0$ et donc $ax+by-(ax_A+by_A) = ax+by+c = 0$. □

Il est clair qu'on a pas unicité de l'équation d'une droite. En effet si $ax+by+c = 0$ est l'équation d'une droite alors pour tout $\lambda \neq 0$, $\lambda ax + \lambda by + \lambda c = 0$ est l'équation de la même droite.

Réciproquement si $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ sont deux équations de la même droite $\mathscr{D}$, il existe $\lambda \neq 0$ tel que $(a', b', c') = \lambda(a, b, c)$. En effet, le vecteur de coordonnées $(b, -a)$ est vecteur directeur de $\mathscr{D}$ donc satisfait $a'b - b'a = 0$. Donc il existe $\lambda \neq 0$ tel que $(a', b') = \lambda(a, b)$. En considérant ensuite un point de $\mathscr{D}$, on obtient $c' = \lambda c$.

Soit $\mathscr{D}$ une droite d'équation $ax + by + c = 0$. Toute droite d'équation $ax + by + c' = 0$ est parallèle à $\mathscr{D}$ car elle a un même vecteur directeur. On obtient ainsi l'équation de toute droite parallèle à $\mathscr{D}$.

On a donc le résultat suivant :

Soit $\mathscr{D}_1$ une droite d'équation $a_1x + b_1y + c_1 = 0$. Soit $\mathscr{D}_2$ une droite d'équation $a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont sécantes si et seulement si $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. On obtient les coordonnées du point d'intersection en résolvant le système :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

4.5.4. *Equations de plans dans l'espace affine.* — En dimension 3 un plan est déterminé par un point A et deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ non colinéaires.

$$\mathscr{P} = \{B / \exists(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2;\ \overrightarrow{AB} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}\} = \{A + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v},\ (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2\}.$$

Le plan vectoriel associé à $\mathscr{P}$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, c'est aussi l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ quand B et C décrivent $\mathscr{P}$ et c'est aussi l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ quand B décrit $\mathscr{P}$.

Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère de l'espace. Les trois coordonnées d'un point du plan $\mathscr{P}$ s'écrivent :

$$\left\{\begin{array}{l} x = x_A + \lambda x_u + \mu x_v \\ y = y_A + \lambda y_u + \mu y_v \\ z = z_A + \lambda z_u + \mu z_v \,. \end{array}\right. \tag{49}$$

Ce sont les *équations paramétriques* du plan $\mathscr{P}$. On notera que l'application qui à un couple de nombre réels (λ, μ) associe le point du plan de coordonnées $(x_A + \lambda x_u + \mu x_v, y_A + \lambda y_u + \mu y_v, z_A + \lambda z_u + \mu z_v)$ définit une bijection de $\mathbf{R}^2$ sur le plan $\mathscr{P}$.

Pour obtenir son *équation implicite* (on dit aussi « *cartésienne* ») on note que le point M appartient au plan $\mathscr{P}$ si et seulement si les vecteurs $\vec{AM}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont liés, ce qui se traduit, à l'aide de la proposition (4.32) par l'équation :

$$a(\vec{u}, \vec{v})(x - x_A) + b(\vec{u}, \vec{v})(y - y_A) + c(\vec{u}, \vec{v})(z - z_A) = 0$$

Proposition 4.39

Soit $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Pour tout réel d l'ensemble des points de coordonnées (x, y, z) telles que :

$$ax + by + cz + d = 0\,, \tag{50}$$

est un plan.

La preuve de ceci est la même que celle de la proposition (4.38) en utilisant la proposition (4.32) caractérisant la coplanarité de trois vecteurs.

Comme dans le cas des droites du plan, on a le résultat suivant.

$ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ sont les équations du même plan si et seulement si il existe $\lambda \neq 0$ tel que $(a', b', c', d') = \lambda(a, b, c, d)$.

Si $\mathscr{P}$ est un plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$, on obtient tous les plans parallèles à $\mathscr{P}$ en prenant les équations $ax + by + cz + d' = 0$, d' décrivant $\mathbf{R}$.

Soit $\mathscr{P}_1$ un plan d'équation $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$. Soit $\mathscr{P}_2$ un plan d'équation $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$. Les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont parallèles si et seulement si (a_1, b_1, c_1) et (a_2, b_2, c_2) sont colinéaires. Si ce n'est pas le cas, des équations implicites de la droite d'intersection sont données par :

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1 = 0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2 = 0 \end{cases}$$

4.5.5. *Equations de droites dans l'espace affine.* — En dimension 3, les équations paramétriques de la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ sont sans surprise :

$$\begin{cases} x = x_A + \lambda x_u \\ y = y_A + \lambda y_u \\ z = z_A + \lambda z_u \,. \end{cases} \tag{51}$$

Pour obtenir des équations implicites, on utilise le lemme (4.29).

Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires si et seulement si $a(\overrightarrow{AM},\vec{u}) = b(\overrightarrow{AM},\vec{u}) = c(\overrightarrow{AM},\vec{u}) = 0$.

Le vecteur $\vec{u}$ est différent du vecteur nul donc une de ses coordonnées au moins n'est pas nulle. Supposons $x_u \neq 0$.

Il est facile de voir que dans ce cas, $b(\overrightarrow{AM},\vec{u}) = c(\overrightarrow{AM},\vec{u}) = 0$ entraine que $a(\overrightarrow{AM},\vec{u}) = 0$. on a donc

$$\begin{cases} y_u x - x_u y - (y_u x_A - x_u y_A) = 0 \\ z_u x - x_u z - (z_u x_A - x_u z_A) = 0 \,. \end{cases}$$

Les deux équations obtenues sont les équations de deux plans dont la droite $\mathscr{D}$ est l'intersection. Evidemment elles n'ont rien d'uniques. Il existe une infinité de manières d'exprimer une droite comme intersection de deux plans. Soit $\mathscr{D}$ une droite d'équation donnes par

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1 = 0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2 = 0 \end{cases}$$

Tout plan contenant la droite $\mathscr{D}$ a une équation du type $\lambda(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+\mu(a_2x+b_2y+c_2z+d_2) = 0$ avec $(\lambda,\mu) \neq (0,0)$.

Si $\mathscr{P}$ est un plan d'équation $ax+by+cz+d = 0$, la droite $\mathscr{D}$ est parallèle au plan $\mathscr{P}$ si et seulement si (a_1,b_1,c_1), (a_2,b_2,c_2) et (a,b,c) sont liés, ce qu'on peut vérifier en utilisant par exemple la proposition (4.32).

Si ce n'est pas le cas, on trouve les coordonnées du point d'intersection en résolvant le système

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1 = 0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2 = 0 \\ ax+by+cz+d = 0 \end{cases}$$

4.6. Produit scalaire et orthogonalité. — Au lycée, vous avez d'abord défini la notion de repère orthonormé. Dans le plan, $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est un repère orthonormé si $\vec{\imath} = \overrightarrow{OI}$, $\vec{\jmath} = \overrightarrow{OJ}$ et OIJ est un triangle rectangle isocèle en 0 tel que $OI = 1$. On suppose donc que le plan affine est muni d'une distance et qu'on a une définition de droites perpendiculaires. À partir de ceci, on définit $||\vec{u}||$ par $||\vec{u}|| = OB$ si $\vec{u} = \overrightarrow{OB}$. Ainsi si $\vec{u}$ a pour coordonnées (x, y) dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, $||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$. La même définition est donnée dans l'espace affine.

Donnons une définition générale sans partir d'une base.

Définition 4.40

Soit E un espace vectoriel. Un *produit scalaire sur* E est une application de $E \times E$ dans $\mathbf{R}$ qui à $(\vec{u}, \vec{v})$ associe $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ayant les propriétés suivantes : pour tous $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ éléments de E, pour tout λ réel,

(PS1) $\vec{u} \cdot \vec{u} \in \mathbf{R}_+$

(PS2) $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$ si et seulement si $\vec{u} = \vec{0}$.

(PS3) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

(PS4) $\vec{u} \cdot \lambda\vec{v} = \lambda\vec{u} \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$

(PS5) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

Exemple 4.41. — Sur l'espace vectoriel $\mathbf{R}^n$ défini dans l'exemple 4.4 on peut définir un produit scalaire par la formule

$$(x_1, \dots, x_n) \cdot (y_1, \dots, y_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k,$$

pour tous $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbf{R}$. En effet le produit $(x_1, \dots, x_n) \cdot (x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2$ est positif. Il est nul si et seulement si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$. Cela prouve les deux premières conditions. Les autres se démontrent en faisant le calcul.

Exemple 4.42. — On se place dans le cas d'un espace vectoriel de dimension 3. Soit $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ une base de E. Soit $\vec{u}, \vec{v}$ des vecteurs de coordonnées respectives (x_u, y_u, z_u) et (x_v, y_v, z_v) dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Alors l'application qui à $(\vec{u}, \vec{v})$ associe $x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v$ est un produit scalaire. Si on le note $\vec{u} \cdot \vec{v}$, on a alors $\vec{u} \cdot \vec{u} = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2$. De plus, $\vec{\imath} \cdot \vec{\imath} = \vec{\jmath} \cdot \vec{\jmath} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$ et $\vec{\imath} \cdot \vec{\jmath} = \vec{\imath} \cdot \vec{k} = \vec{\jmath} \cdot \vec{k} = 0$.

On suppose maintenant l'espace E muni d'un produit scalaire noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Définition 4.43

On définit alors la *norme* d'un vecteur par
$$||\vec{u}|| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}.$$

Proposition 4.44

Pour tous $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de E, et tout $\lambda \in \mathbf{R}$, on a les relations

a) $||\vec{u}|| \in \mathbf{R}_+$;

b) $||\vec{u}|| = 0 \Leftrightarrow u = 0$;

c) $||\vec{u}+\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v}$;

d) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(||u||^2 + ||v||^2 - ||u-v||^2\right)$.

Le résultat suivant va nous être très utile par la suite.

Théorème 4.45 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de E.

$$|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leqslant ||\vec{u}||\,||\vec{v}||, \tag{52}$$

l'égalité ayant lieu si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Démonstration. — Si $\vec{u}=0$, les vecteurs sont colinéaires et $|\vec{u}\cdot\vec{v}| = 0 = ||\vec{u}||\,||\vec{v}||$, ce qui démontre le résultat dans ce cas. Dans la suite, on suppose $\vec{u}\neq 0$. On considère alors l'application $f : \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ definie par
$$f(t) = ||t\vec{u}+\vec{v}||^2$$
pour tout nombre réel t. Soit $t\in\mathbf{R}$. Calculons la valeur de $f(t)$ en utilisant la bilinéarité et la symétrie du produit scalaire :
$$(t\vec{u}+\vec{v})\cdot(t\vec{u}+\vec{v}) = t^2(\vec{u}\cdot\vec{u}) + 2t(\vec{u}\cdot\vec{v}) + (\vec{v}\cdot\vec{v}).$$
Cette expression montre que f est une application polynomiale du second degré. Mais en tout t, il prend une valeur positive ou nulle. Son discriminant ne peut pas être strictement positif, car

sinon le polynôme aurait deux racines réelles distinctes entre lesquelles il prendrait des valeurs strictement négatives. Écrire que le discriminant est négatif ou nul donne :

$$(\vec{u}\cdot\vec{v})^2 \leqslant (\vec{u}\cdot\vec{u})\,(\vec{v}\cdot\vec{v})\,,$$

soit

$$(\vec{u}\cdot\vec{v})^2 \leqslant ||\vec{u}||^2\,||\vec{v}||^2\,,$$

ce qui entraîne (52). L'égalité a lieu si et seulement si le trinôme admet une racine double t, valeur pour laquelle $t\vec{u}+\vec{v}$ est le vecteur nul. □

Corollaire 4.46 (Inégalité triangulaire)

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs de E. Alors

$$||\vec{u}+\vec{v}|| \leqslant ||\vec{u}|| + ||\vec{v}|| \tag{53}$$

avec égalité si et seulement si $\vec{u}=0$ ou il existe $\lambda \in \mathbf{R}_+$ tel que $\vec{v}=\lambda\vec{u}$.

Démonstration. — En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a les relations

$$||\vec{u}+\vec{v}||^2 = (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = ||\vec{u}||^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + ||\vec{v}||^2 \leqslant ||\vec{u}||^2 + 2||\vec{u}||\,||\vec{v}|| + ||\vec{v}||^2 = (||\vec{u}|| + ||\vec{v}||)^2.$$

L'égalité $||\vec{u}+\vec{v}|| = ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||$ implique l'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz et donc que les vecteurs sont colinéaires. Donc $\vec{u}=0$ ou il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $\vec{v}=\lambda\vec{u}$. Or, dans ce cas, on a $\vec{u}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}||\,||\vec{v}|| \geqslant 0$, ce qui donne $\lambda||\vec{u}||^2 \geqslant 0$ et donc $\lambda \geqslant 0$. □

Définition 4.47

Une base $(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)$ de E est dite *orthonormée* si, pour $i,j\in\{1,\dots,n\}$, on a

$$\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j = \begin{cases} 1 \text{ si } i=j \\ 0 \text{ sinon.}\end{cases}$$

Exemple 4.48. — On suppose que E est de dimension 3. Une base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ est orthonormée si elle satisfait :

$$\vec{\imath}\cdot\vec{\imath} = \vec{\jmath}\cdot\vec{\jmath} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1$$
$$\vec{\imath}\cdot\vec{\jmath} = \vec{\imath}\cdot\vec{k} = \vec{\jmath}\cdot\vec{k} = 0$$

On admet le fait que pour tout produit scalaire, il existe des bases orthonormées.

Proposition 4.49

On considère E muni d'un produit scalaire noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$. Soit $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ une base orthonormée. Soit $\vec{u},\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, (x_u,y_u,z_u), (x_v,y_v,z_v). On a alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=x_ux_v+y_uy_v+z_uz_v$.

Démonstration. — En utilisant la bilinéarité :

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v}&=\left(x_u\vec{\imath}+y_u\vec{\jmath}+z_u\vec{k}\right)\cdot\left(x_v\vec{\imath}+y_v\vec{\jmath}+z_v\vec{k}\right)\\&=x_ux_v\vec{\imath}\cdot\vec{\imath}+x_uy_v\vec{\imath}\cdot\vec{\jmath}+x_uz_v\vec{\imath}\cdot\vec{k}+y_ux_v\vec{\jmath}\cdot\vec{\imath}+y_uy_v\vec{\jmath}\cdot\vec{\jmath}\\&\quad+y_uz_v\vec{\jmath}\cdot\vec{k}+z_ux_v\vec{k}\cdot\vec{\imath}+z_uy_v\vec{k}\cdot\vec{\jmath}+z_uz_v\vec{k}\cdot\vec{k}\\&=x_ux_v+y_uy_v+z_uz_v,\end{aligned}$$

la base étant orthonormée. □

Vous avez défini au lycée la notion d'angle géométrique de deux vecteurs.

Définition 4.50

La mesure de l'angle géométrique de deux vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ est l'unique réel α appartenant à $[0,\pi]$ donné par

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=||u||\,||v||\cos(\alpha).$$

L'existence est justifiée par l'inégalité de Cauchy-Schwarz énoncée dans le théorème 4.45.

Soit $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ une base orthonormée du plan vectoriel euclidien et $(\vec{u},\vec{v})$ deux vecteurs non colinéaires de coordonnées respectives (x_u,y_u) et (x_v,y_v). Dans la définition 4.25, on a défini $\text{Dét}_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}(\vec{u},\vec{v})=x_uy_v-y_ux_v$. On remarque que $\text{Dét}_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}(\vec{u},\vec{v})=\vec{u}\cdot\vec{v}'$ où $\vec{v}'$ a pour coordonnées $(-y_v,x_v)$ dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Le vecteur $\vec{v}'$ est donc un des deux vecteurs de même norme que $\vec{v}$ et orthogonal à $\vec{v}$.

On déduit donc de la proposition (4.49) que la valeur absolue du déterminant est la même dans toute base orthonormée. Plus précisément, on a le résultat suivant :

Proposition 4.51

Soient $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et $(\vec{\imath}',\vec{\jmath}')$ deux bases orthonormées d'un plan vectoriel P. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de P. Alors

$$\mathrm{Dét}_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}(\vec{\imath}',\vec{\jmath}') \in \{-1,1\} \quad \text{et} \quad |\,\mathrm{Dét}_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}(\vec{u},\vec{v})| = |\,\mathrm{Dét}_{(\vec{\imath}',\vec{\jmath}')}(\vec{u},\vec{v})|$$

Nous allons déduire cette proposition du lemme suivant qui donne une formule un peu plus générale :

Lemme 4.52. — *Soit $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ une base orthonormée d'un plan vectoriel P. Soient $\vec{u},\vec{v}$ des vecteurs de P. Alors, on a la formule*

$$\det_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}(\vec{u},\vec{v})^2 = ||\vec{u}||^2||\vec{v}||^2 - (\vec{u}\cdot\vec{v})^2.$$

Démonstration. — Notons (a,b) les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et (c,d) celles de $\vec{v}$ dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Alors

$$\begin{aligned}\mathrm{Dét}_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}(\vec{u},\vec{v})^2 &= (ad-bc)^2 = a^2d^2 - 2adbc + b^2c^2\\ &= (a^2+b^2)(c^2+d^2) - (ac+bd)^2 = ||\vec{u}||^2||\vec{v}||^2 - (\vec{u}\cdot\vec{v})^2. \quad \square\end{aligned}$$

Preuve de la proposition 4.51. — Comme $(\vec{\imath}',\vec{\jmath}')$ est orthonormée, par le lemme

$$\mathrm{Dét}_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}(\vec{\imath}',\vec{\jmath}') = 1.$$

Le terme de droite dans le lemme ne dépend pas du choix de la base orthonormée ce qui entraîne la deuxième assertion. $\square$

Remarque 4.53. — Si $\alpha \in [0,\pi[$ est une mesure de l'angle géométrique $\widehat{\vec{u},\vec{v}}$, le lemme donne la relation

$$|\,\mathrm{Dét}_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}(\vec{u},\vec{v})| = \sqrt{||\vec{u}||\,||\vec{v}||(1-\cos(\alpha)^2)} = ||\vec{u}||\,||\vec{v}||\sin(\alpha).$$

4.7. Espace affine euclidien. — Dans la suite on se place dans un *espace affine euclidien* $\mathscr{E}$, c'est-à-dire un espace affine dont l'espace vectoriel associé E est muni d'un produit scalaire.

Définition 4.54

Soiet $A.B \in \mathscr{E}$, la *distance de A à B* est le nombre réel positif

$$AB = ||\overrightarrow{AB}||.$$

Un repère affine de l'espace euclidien est dit *orthonormé* si la base du repère est orthonormée.

Exemple 4.55. — Donnons-nous un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'un plan affine euclidien $\mathscr{P}$. Soit $\Omega \in \mathscr{P}$ et soir $R \in \mathbf{R}_+^*$. Le cercle $\mathscr{C}$ et de rayon R est l'ensemble

$$\mathscr{C} = \{ M \in \mathscr{P} \mid \Omega M = R \}.$$

Comme $R > 0$ et que les distances sont positives, on peut également le définir comme l'ensemble des points M du plan tels que $\Omega M^2 = R^2$.

Soient (x_Ω, y_Ω) les coordonnées du point Ω dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, Un point M de coordonnées (x, y) appartient donc au cercle $\mathscr{C}$ si et seulement s'il vérifie l'équation

$$(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2.$$

Remarque 4.56. — Si O, A, B sont trois points du plan affine non alignés, l'aire du parallélogramme de sommets $O, A, B, B + \overrightarrow{OA}$ est la valeur absolue du déterminant de $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ dans une base orthonormée (figure 21).

Figure 21. La valeur absolue du déterminant est l'aire du parallélogramme.

La *projection orthogonale* utilise le fait qu'il existe une seule perpendiculaire à une droite donnée passant par un point extérieur à cette droite (figure 22).

Définition 4.57

Soit $\mathscr{D}$ une droite et A un point du plan, n'appartenant pas à $\mathscr{D}$. on appelle *projection orthogonale* de A sur $\mathscr{D}$ le point d'intersection de $\mathscr{D}$ avec la droite orthogonale à $\mathscr{D}$ passant par A. On appelle *distance du point A à la droite $\mathscr{D}$* la distance du point à sa projection orthogonale sur la droite.

On étend cette définition de façon évidente aux points de $\mathscr{D}$: la projection orthogonale d'un point de $\mathscr{D}$ sur $\mathscr{D}$ est le point lui-même, et sa distance à $\mathscr{D}$ est nulle. Le théorème de Pythagore entraîne que la distance d'un point à une droite est la plus petite des distances de ce point à un point de la droite. Dans le cas où la droite est définie par une équation implicite, la distance d'un point à cette droite se calcule très simplement.

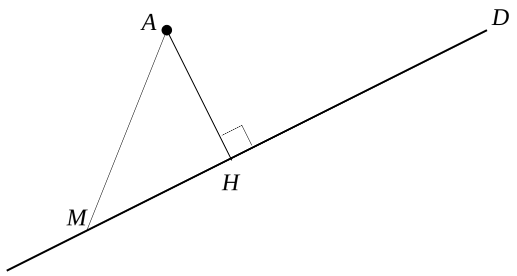


FIGURE 22. Projection orthogonale d'un point sur une droite.

Proposition 4.58

Considérons le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation implicite $ax+by+c=0$, et A le point de coordonnées (x_A,y_A). La distance du point A à la droite $\mathscr{D}$ est :

$$\frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}\,.$$

Démonstration. — Si $A\in\mathscr{D}$ la distance est nulle, et la formule est vraie. Supposons maintenant que le point A n'appartienne pas à la droite $\mathscr{D}$ (figure 22). Le vecteur de coordonnées (a,b), que nous noterons $\vec{n}$, est orthogonal au vecteur de coordonnées $(-b,a)$, qui est un vecteur directeur de la droite ($\vec{n}$ pour « normal » : un autre synonyme d'orthogonal). Notons H la projection orthogonale de A sur $\mathscr{D}$. Tout point M de la droite vérifie :

$$\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=(\overrightarrow{HM}-\overrightarrow{HA})\cdot\vec{n}=-\overrightarrow{HA}\cdot\vec{n}\,,$$

car $\overrightarrow{HM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux. Comme $\overrightarrow{HA}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires, la valeur absolue de leur produit scalaire est le produit des normes. On obtient donc :

$$|\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}|=\|\overrightarrow{HA}\|\,\|\vec{n}\|\,.$$

Par définition, $||\overrightarrow{HA}||$ est la distance de A à la droite, et $||\vec{n}|| = \sqrt{a^2+b^2}$. Il reste à évaluer le produit scalaire de $\overrightarrow{AM}$ par $\vec{n}$.

$$\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = a(x_M - x_A) + b(x_M - x_A) = -(ax_A + bx_A + c)\,,$$

car $ax_M + bx_M + c = 0$. D'où le résultat. □

Les notions de projection orthogonale et de distance sont définies de la même façon en dimension 3. Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, non colinéaires, et P le plan vectoriel qu'ils engendrent.

$$P = \{\lambda\vec{u} + \mu\vec{v},\ \lambda,\mu\in\mathbf{R}\}\,.$$

Nous avons introduit à la section précédente les trois coefficients :

$$a = y_u z_v - y_v z_u\,,\quad b = z_u x_v - z_v x_u\,,\quad c = x_u y_v - x_v y_u\,.$$

Puisque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, le lemme 4.29 entraîne que a, b, c ne sont pas tous les trois nuls. Les deux relations :

$$ax_u + by_u + cz_u = 0 \quad \text{et} \quad ax_v + by_v + cz_v = 0$$

montrent que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées (a,b,c) est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$ (voir lemme 4.29). La bilinéarité du produit scalaire entraîne que $\vec{n}$ est orthogonal à tout vecteur de P. Réciproquement, tout vecteur orthogonal à $\vec{n}$ est combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et donc appartient à P.

Proposition 4.59

Dans un espace affine de dimension 3 muni d'un produit scalaire, l'ensemble des points de coordonnées x, y, z dans une base orthonormée vérifiant :

$$ax + by + cz + d = 0\,,$$

est un plan affine, dont le plan vectoriel associé est l'ensemble des vecteurs orthogonaux au vecteur $\vec{n}$, de coordonnées (a,b,c).

Soit $\mathscr{P}$ un plan affine dans un espace de dimension 3, et A un point n'appartenant pas à $\mathscr{P}$. La projection orthogonale de A sur $\mathscr{P}$ est l'intersection avec $\mathscr{P}$ de la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{n}$ (la perpendiculaire à $\mathscr{P}$ passant par A). La distance d'un point à un plan défini par une équation implicite se calcule par une formule analogue à celle de la proposition 4.58.

Proposition 4.60

Considérons un espace affine $\mathscr{E}$ de dimension 3, muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Dans ce repère, soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation implicite $ax + by + cz + d = 0$, et A le point de coordonnées (x_A, y_A, z_A). La distance du point A au plan $\mathscr{P}$ est :

$$\frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

4.8. Produit vectoriel. — Pour définir le produit vectoriel de deux vecteurs de l'espace, on a besoin d'orienter l'espace, c'est à dire de définir des bases orthonormées directes, les autres seront alors indirectes.

Nous allons faire ceci avec les mains et utiliser la règle des trois doigts de la main droite. Ainsi $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est une base orthonormée directe si c'est une base orthonormée et si lorsque avec la main droite, on place le pouce sur $\vec{\imath}$, l'index sur $\vec{\jmath}$ alors le majeur se trouve sur $\vec{k}$ (figure 23).

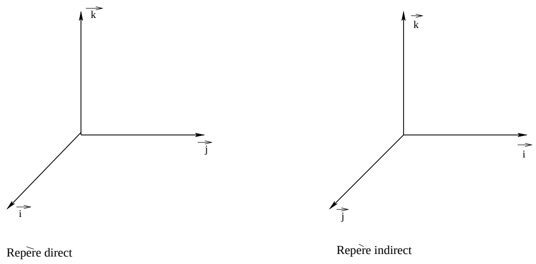


FIGURE 23. Repère orthonormé direct, indirect.

Proposition 4.61

Soit $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ une base orthonormée directe. Alors

1. $(\vec{k}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est une base orthonormée directe.
2. Soit $\theta \in \mathbf{R}$ et $\vec{i'} = cos\theta\vec{\imath} + \sin\theta\vec{\jmath}$, $\vec{j'} = -\sin\theta\vec{\imath} + \cos\theta\vec{\jmath}$. Alors $(\vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k})$ est une base orthonormée directe.
3. Soit $\theta \in \mathbf{R}$ et $\vec{i''} = cos\theta\vec{\imath} + \sin\theta\vec{\jmath}$, $\vec{j''} = \sin\theta\vec{\imath} - \cos\theta\vec{\jmath}$. Alors

$(\vec{i''}, \vec{j''}, \vec{k})$ est une base orthonormée indirecte.

Définition 4.62

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires et P le plan engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Soit $\vec{w}$ un vecteur orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tel que $\vec{w} \neq \vec{0}$. Soit $\vec{k} = \frac{\vec{w}}{||\vec{w}||}$.

$\vec{w}$ est directement orthogonal à $(\vec{u}, \vec{v})$ si pour toute base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de P telle que $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est une base orthonormée directe, on a $\text{Dét}_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}(\vec{u}, \vec{v}) > 0$.

Cette définition a bien un sens. En effet si $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est une base orthonormée directe et si $(\vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k})$ en est une autre, il existe alors $\theta \in \mathbf{R}$ tel que $\vec{i'} = \cos\theta\vec{\imath} + \sin\theta\vec{\jmath}$. On a alors deux choix possibles pour $\vec{j'}$, soit $-\sin\theta\vec{\imath} + \cos\theta\vec{\jmath}$, soit $\sin\theta\vec{\imath} - \cos\theta\vec{\jmath}$. Mais en utilisant la proposition précédente (4.61), seul le choix $\vec{j'} = -\sin\theta\vec{\imath} + \cos\theta\vec{\jmath}$ convient. On a alors $\text{Dét}_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}(\vec{i'}, \vec{j'}) = (\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1$. En utilisant alors la proposition (4.51), on en déduit que $\text{Dét}_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}(\vec{u}, \vec{v}) = \text{Dét}_{(\vec{i'},\vec{j'})}(\vec{u}, \vec{v})$. De plus si $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est une base orthormée de P telle que $\text{Dét}_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}(\vec{u}, \vec{v}) > 0$, $\text{Dét}_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}(\vec{u}, \vec{v}) = ||\vec{u}||||\vec{v}|| \sin\theta$ où θ est l'angle géométrique entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Proposition 4.63

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires. Soit $\vec{w}$ un vecteur directement orthogonal à $(\vec{u}, \vec{v})$. Alors $-\vec{w}$ est un vecteur directement orthogonal à $(\vec{v}, \vec{u})$. Soit $\lambda > 0$, $\vec{w}$ est un vecteur directement orthogonal à $(\vec{u}, \lambda\vec{v})$. Soit $\lambda < 0$, $-\vec{w}$ est un vecteur directement orthogonal à $(\vec{u}, \lambda\vec{v})$.

Définition 4.64

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On appelle *produit vectoriel* de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le vecteur noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ défini par :

1. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

2. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires, $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est le vecteur directement orthogonal à $(\vec{u}, \vec{v})$ de norme $||\vec{u}|| ||\vec{v}|| \sin(\alpha)$ où α est l'élément de $]0, \pi[$ mesure de l'angle géométrique $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$.

Si O, A, B sont trois points non alignés de l'espace affine, l'aire du parallélogramme de sommets $O, A, B, B + \overrightarrow{OA}$ est aussi donné par $||\overrightarrow{0A} \wedge \overrightarrow{OB}||$.

Proposition 4.65

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

1. $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
2. Supposons $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires. Soit $\vec{w}$ un vecteur non nul de l'espace.
   $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{0}$ et s'il existe une base orthonormée directe $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \frac{\vec{w}}{||\vec{w}||})$ telle que $||\vec{w}|| = \text{Dét}_{(\vec{\imath}, \vec{\jmath})}(\vec{u}, \vec{v})$.
3. $\vec{u} \wedge (\lambda\vec{v}) = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v})$ et $(\lambda\vec{u}) \wedge \vec{v} = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v})$.
4. $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$.
5. $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \lambda\vec{u}) = \vec{u} \wedge \vec{v}$.
6. $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$.

Démonstration. — Les points 1, 2, 3 et 4 découlent de la définition et de la proposition (4.63).

Démontrons le point 5. On remarque que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont liés si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v} + \lambda\vec{u}$ sont liés. En effet, en utilisant la proposition (proposition 4.27), on a

$$\text{Dét}_{(\vec{\imath}, \vec{\jmath})}(\vec{u}, \vec{v} + \lambda\vec{u}) = \text{Dét}_{(\vec{\imath}, \vec{\jmath})}(\vec{u}, \vec{v}) + \lambda\,\text{Dét}_{(\vec{\imath}, \vec{\jmath})}(\vec{u}, \vec{u}) = \text{Dét}_{(\vec{\imath}, \vec{\jmath})}(\vec{u}, \vec{v}).$$

Ceci démontre que $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est directement orthogonal à $(\vec{u}, \vec{v} + \lambda\vec{u})$ en utilisant le point 2.

Démontrons le point 6. En utilisant le point 3, on peut supposer que $||\vec{u}|| = 1$. En utilisant le point 5, on peut supposer que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. En effet, il suffit de remplacer $\vec{v}$ par $\vec{v'} = \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{u}$ car $\vec{v'} \cdot \vec{u} = 0$. En utilisant de nouveau le point 3, on peut supposer que $||\vec{v}|| = 1$. On s'est donc ramené au cas où $||\vec{u}|| = ||\vec{v}|| = 1$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Soit $\vec{k} = \vec{u} \wedge \vec{v}$. Ainsi $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$ est une base orthonormée directe. Déterminons $\vec{u} \wedge (\cos\theta\vec{v} + \sin\theta\vec{k})$. D'après la proposition (4.61), $(\vec{v}, \vec{k}, \vec{u})$ est une base orthonormée directe donc $(\cos\theta\vec{v} + \sin\theta\vec{k}, -\sin\theta\vec{v} + \cos\theta\vec{k}, \vec{u})$ en est une ausi et de même pour $(\vec{u}, \cos\theta\vec{v} + \sin\theta\vec{k}, -\sin\theta\vec{v} + \cos\theta\vec{k})$. Donc $\vec{u} \wedge (\cos\theta\vec{v} + \sin\theta\vec{k}) = -\sin\theta\vec{v} + \cos\theta\vec{k}$. On en déduit que pour tout $(y, z) \in \mathbf{R}^2$, $\vec{u} \wedge (y\vec{v} + z\vec{k}) = -z\vec{v} + y\vec{k}$. Il suffit de poser $y = r\cos\theta$ et $z = r\sin\theta$.

Soit maintenant $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{k}$. En utilisant ce qui précède, on a

$$\begin{aligned}
\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) &= \vec{u} \wedge (x\vec{u} + (y+1)\vec{v} + z\vec{k}) \\
&= \vec{u} \wedge ((y+1)\vec{v} + z\vec{k}) \\
&= -z\vec{v} + (y+1)\vec{k} \\
&= \vec{k} + (-z\vec{v} + y\vec{k}) \\
&= \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge (y\vec{v} + z\vec{k}] \\
&= \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge (x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{k}] \\
&= \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}
\end{aligned}$$

□

La proposition suivante permet de calculer les coordonnées du produit vectoriel de deux vecteurs dans une base orthonormée directe.

Proposition 4.66

Soit $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ une base orthonormée directe. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives données par (x_u, y_u, z_u) et (x_v, y_v, z_v). Les coordonnées (a, b, c) de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ sont alors :

$$a = y_u z_v - y_v z_u, \quad b = z_u x_v - z_v x_u, \quad c = x_u y_v - x_v y_u$$

Démonstration. — Il suffit d'utiliser les propriétés de la proposition (4.65) :

$$\begin{aligned}
\vec{u} \wedge \vec{v} \quad &= \quad \left(x_u\vec{\imath} + y_u\vec{\jmath} + z_u\vec{k}\right) \wedge \left(x_v\vec{\imath} + y_v\vec{\jmath} + z_v\vec{k}\right) \\
&= \quad x_u x_v \vec{\imath} \wedge \vec{\imath} + x_u y_v \vec{\imath} \wedge \vec{\jmath} + x_u z_v \vec{\imath} \wedge \vec{k} + y_u x_v \vec{\jmath} \wedge \vec{\imath} + y_u y_v \vec{\jmath} \wedge \vec{\jmath} \\
&\quad + \ y_u z_v \vec{\jmath} \wedge \vec{k} + z_u x_v \vec{k} \wedge \vec{\imath} + z_u y_v \vec{k} \wedge \vec{\jmath} + z_u z_v \vec{k} \wedge \vec{k} \\
&= \quad x_u y_v \vec{k} + x_u z_v(-\vec{\jmath}) + y_u x_v(-\vec{k}) + y_u z_v \vec{\imath} + z_u x_v \vec{\jmath} + z_u y_v(-\vec{\imath}), \\
&= \quad a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k},
\end{aligned}$$

□

On reconnait les coordonnées calculées dans le lemme (4.29) et la proposition (4.59).

Définition 4.67

Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs. Le produit mixte de $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est :

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$$

Notons que pour toute base orthonormée directe $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On a l'égalité

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \text{Dét}_{(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$$

Proposition 4.68

Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs. $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ est une famille liée si et seulement si $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$.

Démonstration. — Cela résulte de la proposition 4.32. □

On a une interprétation géométrique du produit mixte.

La valeur absolue du produit mixte de 3 vecteurs $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ est le volume du parallépipède de sommets $O, A, B, C, A + \overrightarrow{OB}, A + \overrightarrow{OC}, B + \overrightarrow{OC}, A + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ (figure 24). Le signe est positif si les 3 vecteurs sont orientés dans le sens direct (comme sur la figure 24), négatif s'il est orienté dans le sens indirect. Le signe du produit mixte permet donc d'orienter une base quelconque, par rapport à une base de référence.

En effet si $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est une base orthonormée directe et $(\vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'})$ une base orthonormée,

$$[\vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'}] = (\vec{i'} \wedge \vec{j'}) \cdot \vec{k'} = \begin{cases} 1 & \text{si } (\vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'}) \text{ est directe} \\ -1 & \text{si } (\vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'}) \text{ est indirecte} \end{cases}$$

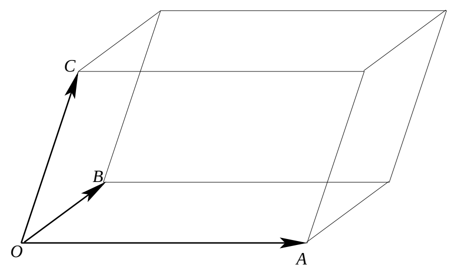


FIGURE 24. La valeur absolue du produit mixte est le volume du parallélépipède.

Si C' est le projeté orthogonal de C sur le plan défini par O, A, B, le volume du parallépipède est le produit de CC' par l'aire du parallélogramme défini par $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, d'où $CC'||\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}||$. Or $(\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OC} = (\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OC'}+\overrightarrow{C'C})$. Le vecteur $\overrightarrow{OC'}$ appartient au plan O, A, B donc $(\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{0}$. Le vecteur $\overrightarrow{C'C}$ est colinéaire à $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}$ donc

$$|(\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OC}| = ||\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}||CC'$$

4.8.1. *Distance d'un point à une droite dans l'espace.* — Soit une droite $\mathscr{D}$ donnée par un point A et un vecteur directeur $\vec{u}$. Pour tout point M n'appartenant pas à $\mathscr{D}$, il existe un unique point H de $\mathscr{D}$ tel que la droite (MH) est perpendiculaire à la droite $\mathscr{D}$. Le point H est le projeté orthogonal de M sur la droite $\mathscr{D}$. En effet soit $H \in \mathscr{D}$ tel que $\overrightarrow{AH} = \lambda\vec{u}$ avec $\lambda \in \mathbf{R}$. La droite (MH) est perpendiculaire à la droite $\mathscr{D}$ si $\overrightarrow{MH}\cdot\vec{u} = 0$. Or $\overrightarrow{MH}\cdot\vec{u} = (\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AM})\cdot\vec{u} = \lambda||\vec{u}||^2 - \overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}$. D'où le point H cherché défini par $\overrightarrow{AH} = \frac{\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}}{||\vec{u}||^2}\vec{u}$. La distance du point M à la droite $\mathscr{D}$ est alors MH. En effet grâce au théorème de Pythagore, pour tout point B de $\mathscr{D}$, $MB \geqslant MH$. Or $\overrightarrow{MA}\wedge\vec{u} = (\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HA})\wedge\vec{u} = \overrightarrow{MH}\wedge\vec{u}$. Les vecteurs $\overrightarrow{MH}$ et $\vec{u}$ étant orthogonaux, on a $||\overrightarrow{MH}\wedge\vec{u}|| = MH||\vec{u}||$. D'où la formule

$$d(M,\mathscr{D}) = MH = \frac{||\overrightarrow{MA}\wedge\vec{u}||}{||\vec{u}||}$$

.

4.8.2. *Vecteur directeur d'une droite donnée comme intersection de deux plans.* — Supposons que la droite $\mathscr{D}$ soit donnée comme l'intersection de deux plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$. Soit $\vec{n_1}$ (resp. $\vec{n_2}$) un vecteur normal au plan $\mathscr{P}_1$ (resp. $\mathscr{P}_2$). Alors un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ est donné par $\vec{n_1}\wedge\vec{n_2}$. En effet $\vec{u} \neq \vec{0}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ si et seulement si il appartient à la fois au plan vectoriel associé à $\mathscr{P}_1$ et au plan vectoriel associé à $\mathscr{P}_2$ donc si et seulement si il est orthogonal à $\vec{n_1}$ et à $\vec{n_2}$ donc si et seulement si il est colinéaire à $\vec{n_1}\wedge\vec{n_2}$.

Fiche de révision

4.1. Espaces vectoriels

Définition 4.69

Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel. Soit $n \in \mathbf{N}$ et soient $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$ des vecteurs de E. On appelle *combinaison linéaire* des vecteurs $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$ tout vecteur w qui peut s'écrire :

$$w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{u}_i = \lambda_1 \vec{u}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{u}_n,$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des nombres réels.

Définition 4.70

Soit $n \in \mathbf{N}$ et soient $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$ des vecteurs de E.

On dit que le n-uplet $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ est :

a) une *famille libre* si la seule combinaison linéaire nulle a tous ses coefficients nuls.

$$\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{u}_i = \vec{0} \implies (\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0);$$

b) une *famille liée* si elle n'est pas libre ;

c) une *famille génératrice* si tout vecteur de l'espace E est combinaison linéaires des vecteurs $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$.

d) une *base* si c'est une famille libre et génératrice.

Définition 4.71

Des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de E sont dit *colinéaires* s'il existe un nombre $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $\vec{v} = \lambda \vec{u}$ ou $\vec{u} = \lambda \vec{v}$.

Définition 4.72

Si $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ est une base de l'espace vectoriel E, alors n s'appelle la *dimension de E*

Définition 4.73

Si $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ est une base de E, les *coordonnées d'un vecteur $\vec{u} \in E$ dans la base $(\vec{a}_1, \ldots \vec{e}_n)$* est l'unique n-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n$ tel que

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_i \vec{e}_i = \vec{u}.$$

4.2. Dimension 2

Définition 4.74

Soit $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ une base du plan vectoriel. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, dont les coordonnées respectives dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ sont (x_u, y_u) et (x_v, y_v). On appelle *déterminant de $(\vec{u}, \vec{v})$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$*, la quantité notée $\text{Dét}_{(\vec{\imath}, \vec{\jmath})}(\vec{u}, \vec{v})$ définie par :

$$\text{Dét}_{(\vec{\imath}, \vec{\jmath})}(\vec{u}, \vec{v}) = x_u y_v - y_u x_v$$

Proposition 4.75

Soit $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ une base du plan vectoriel. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\text{Dét}_{(\vec{\imath}, \vec{\jmath})}(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

On munit le plan affine d'un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. L'équation *implicite* de la droite affine (AB) passant par deux points distincts A et B est donnée par

$$(x - x_A)(y_B - y_A) - (y - y_A)(x_B - x_A) = 0$$

où x et y désignent les inconnues, (x_A, y_A) les coordonnées de A et (x_B, y_B) celles de B.

L'équation *paramétrique* d'une droite affine passant par un point A de coordonnées (x_A, y_A) et de vecteur directeur $\vec{u}$ de coordonnées (x_u, y_u) sont données par

$$\begin{cases} x = x_A + \lambda x_u \\ y = y_A + \lambda y_u \,. \end{cases}$$

4.3. Espace affine de dimension 3

On fixe un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de l'espace. Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ des vecteurs de coordonnées respectives (x_u, y_u, z_u) et (x_v, y_v, z_v). Alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si les trois nombres

$$a(\vec{u}, \vec{v}) = y_u z_v - y_v z_u, \quad b(\vec{u}, \vec{v}) = z_u x_v - z_v x_u, \quad c(\vec{u}, \vec{v}) = x_u y_v - x_v y_u$$

sont tous les trois nuls.

Définition 4.76

Le déterminant de trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de coordonnées respectives (x_u, y_u, z_u), (x_v, y_v, z_v) et (x_w, y_w, z_w) est donné par

$$\text{Dét}_{(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = a(\vec{u}, \vec{v}) x_w + b(\vec{u}, \vec{v}) y_w + c(\vec{u}, \vec{v}) z_w$$

Proposition 4.77

Les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ forment une famille liée si et seulement si

$$\text{Dét}_{(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0.$$

L'équation implicite d'un plan passant par trois points non alignés A, B et C est donné par l'équation

$$a(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})(x - x_A) + b(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})(y - y_A) + c(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})(z - z_A) = 0$$

où (x_A, y_A, z_A) sont les coordonnées du point A.

Soit A un point de coordonnées (x_A, y_A, z_A). Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs non colinéaires de coordonnées respectives (x_u, y_u, z_u) et (x_v, y_v, z_v). Le plan $\mathscr{P}$ défini par A, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ a pour équations paramétriques

$$\{x = x_A + \lambda x_u + \mu x_v, y = y_A + \lambda y_u + \mu y_v, x = z_A + \lambda z_u + \mu z_v.$$

Soit A un point de coordonnées (x_A, y_A, z_A). Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul de coordonnées (x_u, y_u, z_u). La droite $\mathscr{D}$ passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ a pour équations paramétriques

$$\left\{x = x_A + \lambda x_u, y = y_A + \lambda y_u, x = z_A + \lambda z_u.\right.$$

(Moyen mémnotechnique : un plan est de dimension, il faut deux paramètres λ et μ pour le paramétrer. Une droite est de dimension 1, il suffit d'un paramètre.)

4.4. Plan euclidien

On fixe une repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan euclidien. Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives (x_u, y_u) et (x_v, y_v) est donné par

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_u x_v + y_u y_v.$$

Proposition 4.78

Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation implicite $ax + by + c = 0$, et A le point de coordonnées (x_A, y_A). La distance du point A à la droite $\mathscr{D}$ est :

$$\frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

4.5. Espace euclidien de dimension 3

Proposition 4.79

Soit $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ une base orthonormée directe. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives données par (x_u, y_u, z_u) et (x_v, y_v, z_v). Les coordonnées (a, b, c) de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ sont alors :

$$a = y_u z_v - y_v z_u, \quad b = z_u x_v - z_v x_u, \quad c = x_u y_v - x_v y_u$$

Entraînement

4.1. Vrai ou faux

Vrai-Faux 4.1. Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul dans un espace vectoriel et A un point d'un espace affine associé. On pose $B = A + \vec{u}$ et $C = A - \vec{u}$. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☐ Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont égaux.
2. ☒ Les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont égaux.
3. ☐ $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère affine.
4. ☒ $(A, \overrightarrow{AB})$ est un repère affine de la droite passant par B et C.
5. ☐ Le point B est le milieu du segment $[AC]$.
6. ☒ Le point A est le milieu de B et C.
7. ☐ $C = B + 2\vec{u}$.
8. ☒ $A = C + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.
9. ☒ $\overrightarrow{AB} = -\vec{u} + 2\overrightarrow{CA}$.

Vrai-Faux 4.2. Soient A, B, C trois points d'un plan affine $\mathscr{P}$. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☒ Si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ forment une famille libre, alors $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère de $\mathscr{P}$.
2. ☐ Si $B \neq C$ alors $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère de $\mathscr{P}$.
3. ☒ Si $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère de $\mathscr{P}$, alors $(C, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère de $\mathscr{P}$.
4. ☒ Si $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère de $\mathscr{P}$, alors $(C, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AB})$ est un repère de $\mathscr{P}$.
5. ☐ $(B, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA})$ est un repère de $\mathscr{P}$.
6. ☒ Si $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère de $\mathscr{P}$, alors $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ est un repère de $\mathscr{P}$.

Vrai-Faux 4.3. On note $\mathscr{F}$ l'ensemble des points M d'un espace affine $\mathscr{E}$ de dimension 3 dont les coordonnées (x, y, z) dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de $\mathscr{E}$ vérifient $x + 2y + 3 = 0$. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☐ $\mathscr{F}$ est une droite affine.
2. ☐ $\mathscr{F}$ contient le point O.

3. ☒ Si $\mathscr{F}$ contient un point M, alors il contient le point $M + \vec{k}$.
4. ☒ $\vec{k}$ appartient à l'espace vectoriel associé à $\mathscr{F}$.
5. ☐ $\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$ appartient au plan vectoriel associé à $\mathscr{F}$.
6. ☒ $2\vec{\imath} - \vec{\jmath} - 3\vec{k}$ appartient au plan vectoriel associé à $\mathscr{F}$.
7. ☒ $(2\vec{\imath} - \vec{\jmath}, 3\vec{k})$ est une base du plan vectoriel associé à $\mathscr{F}$.
8. ☐ $(2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 3\vec{k}, -4\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 6\vec{k})$ est une base du plan vectoriel associé à $\mathscr{F}$.

Vrai-Faux 4.4. On considère un espace vectoriel E, muni d'un repère orthonormé. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de E. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☐ Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, alors $(\vec{u}, \vec{v})$ est une famille libre dans E.
2. ☐ Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}||\,||\vec{v}||$.
3. ☒ Si $||\vec{u}|| = ||\vec{v}||$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}||^2$, alors $\vec{u} = \vec{v}$.
4. ☐ $\vec{u} \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2$
5. ☐ $(\vec{v} - \vec{u}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2$
6. ☒ $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2$
7. ☒ $\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{u} - \vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $||\vec{u}|| = ||\vec{v}||$.
8. ☐ Si $||\vec{u} - \vec{v}|| = 0$ alors $||\vec{u}|| = ||\vec{v}|| = 0$.
9. ☒ Si $||\vec{u} + \vec{v}|| = 0$ alors $||\vec{u}|| = ||\vec{v}||$.

Vrai-Faux 4.5. Dans un espace affine euclidien de dimension 3, que l'on munit d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on note $\mathscr{P}$ le plan d'équation implicite $2x + 2y + z + 3 = 0$, et H la projection orthogonale de O sur $\mathscr{P}$. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☐ $O \in \mathscr{P}$.
2. ☐ le vecteur de coordonnées $(2, 2, 1)$ appartient à l'espace vectoriel associé à $\mathscr{P}$.
3. ☒ Toute droite de vecteur directeur $(2, 2, 1)$ est perpendiculaire à $\mathscr{P}$.
4. ☐ H est le point de coordonnées $(2, 2, 1)$.
5. ☒ La distance de O à $\mathscr{P}$ est la norme du vecteur $\overrightarrow{OH}$.
6. ☒ La distance de O à $\mathscr{P}$ vaut 1.
7. ☒ Le vecteur de coordonnées $(1, 0, -2)$ appartient à l'espace vectoriel associé à $\mathscr{P}$.

8. ☐ La distance de O à la droite passant par H dont un vecteur directeur a pour coordonnées $(1,0,-2)$ est strictement supérieure à 1.
9. ☐ Il existe une droite dans $\mathscr{P}$ telle que la distance de O à cette droite soit strictement inférieure à 1.

Vrai-Faux 4.6. On considère deux plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ dans un espace affine de dimension 3. On note P_1 et P_2 les plans vectoriels associés. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☒ L'intersection de $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ est une droite affine si et seulement si P_1 et P_2 sont distincts.
2. ☒ Si $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 = \emptyset$, alors la distance à $\mathscr{P}_2$ d'un point M de $\mathscr{P}_1$ ne dépend pas de M.
3. ☐ Il se peut que tout vecteur de P_1 soit orthogonal à tout vecteur de P_2.
4. ☐ Si P_2 contient l'ensemble des vecteurs orthogonaux à P_1 alors $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont parallèles ou confondus.
5. ☒ Si P_2 contient l'ensemble des vecteurs orthogonaux à P_1 alors P_1 contient l'ensemble des vecteurs orthogonaux à P_2.
6. ☐ S'il existe deux droites perpendiculaires, une dans $\mathscr{P}_1$, l'autre dans $\mathscr{P}_2$, alors P_1 contient l'ensemble des vecteurs orthogonaux à P_2.
7. ☒ Si $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \neq \emptyset$, alors pour toute droite de $\mathscr{P}_1$, il existe une droite de $\mathscr{P}_2$, telle que ces deux droites sont perpendiculaires.

Vrai-Faux 4.7. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs quelconques dans un espace vectoriel de dimension 3. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☒ $\vec{u} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = 0$.
2. ☐ Si $(\vec{u} - \vec{v}) \wedge (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{0}$ alors $\vec{u} = \vec{v}$.
3. ☒ Si $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
4. ☒ Si $\vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v})$ est colinéaire à $\vec{v}$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
5. ☐ Si $\vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{0}$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
6. ☒ Si $\vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{0}$, alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.
7. ☐ Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$ alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u}\|\,\vec{v}$.
8. ☒ Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$ alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

4.2. Exercices

Exercice 4.1. Soient A, B, C trois points du plan affine.
Soient $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbf{R}^3$ tel que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.
Soit O un point du plan.

1. Soit M un point du plan.
   Montrer que $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$ si et seulement si $(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC}$.
   En déduire qu'il existe un unique point M du plan affine tel que $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$. On dit que M est le barycentre de $(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)$.
2. On suppose que M est le barycentre de $(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)$.
   Montrer que pour tout point du plan N, $(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{NM} = \alpha\overrightarrow{NA} + \beta\overrightarrow{NB} + \gamma\overrightarrow{NC}$.
3. Si $\alpha = \beta = \gamma$, on dit que M est l'isobarycentre de (A, B, C).
   Soit G l'isobarycentre de (A, B, C).
   Soit A' (resp. B', resp. C') le milieu de B, C, (resp. A, C, resp. A, B)
   Montrer que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$.
   En déduire que G appartient à l'intersection des médianes.
4. ABC est un triangle.
   On considère le barycentre G de $(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)$ dans les cas suivants. Construisez G.
   (a) $\alpha = 3, \beta = -1, \gamma = -1$. On introduira le milieu de BC.
   (b) $\alpha = \frac{1}{3}, \beta = -\frac{1}{2}, \gamma = \frac{5}{6}$. On remarquera que $-\frac{1}{2} + \frac{5}{6} = \alpha = \frac{1}{3}$.
   (c) $\alpha = -3, \beta = 2, \gamma = 5$.
   (d) $\alpha = \frac{1}{3}, \beta = \frac{1}{6}, \gamma = \frac{1}{2}$.

Exercice 4.2. Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base du plan vectoriel P.
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan donnés par leurs coordonnées dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$. On considérera les cas suivants :

$$\vec{u} : (1, 1) \quad \vec{v} : (1, -1)$$
$$\vec{u} : (2, 2) \quad \vec{v} : (-4, -4)$$
$$\vec{u} : (1, 2) \quad \vec{v} : (1, 1)$$

1. Calculer $\mathrm{Det}_{(\vec{i},\vec{j})}(\vec{u}, \vec{v})$ et en déduire si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

2. Dans le cas où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, déterminer les coordonnées dans la base $(\vec{u},\vec{v})$ du vecteur $3\vec{i}-\vec{j}$.

Exercice 4.3. Soit $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère affine d'un espace affine $\mathscr{E}$ de dimension 3 .

1. Dire dans chacun des cas suivants si les points A,B,C donnés par leurs coordonnées dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ sont alignés.

$$A\,:\,(1,1,0)\quad B\,:\,(1,-1,2)\quad C\,:\,(-1,0,3)$$

$$A\,:\,(1,1,0)\quad B\,:\,(1,-1,2)\quad C\,:\,(1,-2,3)$$

Donner selon les cas des équations implicites et paramétriques de la droite ou du plan qu'ils engendrent.

2. Dire dans chacun des cas suivants si les points A,B,C,D donnés par leurs coordonnées dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ sont coplanaires.

$$A\,:\,(1,1,0)\quad B\,:\,(1,-1,2)\quad C\,:\,(-1,0,3)\quad D\,:\,(2,1,6)$$

$$A\,:\,(1,1,0)\quad B\,:\,(1,-1,2)\quad C\,:\,(-1,0,3)\quad D\,:\,(2,3,-3)$$

Dans le cas où ils sont coplanaires, donner l'équation implicite et les équations paramétriques du plan qu'ils engendrent.

Exercice 4.4. Soient $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ deux droites dans le plan, données par leurs équations implicites ou paramétriques dans un repère affine. Déterminer si les droites sont sécantes, parallèles ou confondues. Dans le cas ou elles sont sécantes, donner les coordonnées de leur point d'intersection.

$$\mathscr{D}_1 : 3x+5y-2=0\,;\quad \mathscr{D}_2 : x-2y+3=0\,.$$

$$\mathscr{D}_1 : 2x-4y+1=0\,;\quad \mathscr{D}_2 : -5x+10y+3=0\,.$$

$$\mathscr{D}_1 : \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 3+4\lambda \\ y &=& 2-\lambda \end{array}\right.\;;\quad \mathscr{D}_2 : \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 5-\mu \\ y &=& 2+3\mu \end{array}\right.\,.$$

$$\mathscr{D}_1 : \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1+2\lambda \\ y &=& 2-3\lambda \end{array}\right.\;;\quad \mathscr{D}_2 : \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 3-4\mu \\ y &=& -1+6\mu \end{array}\right.\,.$$

$$\mathscr{D}_1 : x-2y+3=0\,;\quad \mathscr{D}_2 : \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 2+\mu \\ y &=& 3-2\mu \end{array}\right.\,.$$

$$\mathscr{D}_1 : 3x-2y+1=0\,;\quad \mathscr{D}_2 : \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1-4\mu \\ y &=& 2-6\mu \end{array}\right.\,.$$

Exercice 4.5. Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien. Soient A,B,C des points de $\mathscr{E}$.

1. Démontrer les inégalités triangulaires :
$$AC \leqslant AB + BC$$
et
$$|AB - AC| \leqslant BC.$$
2. On suppose que $AC = AB + BC$ que peut-on dire de la position des points A, B et C.

Exercice 4.6. Soit A un point du plan, donné par ses coordonnées dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul, déterminé par ses coordonnées dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On considérera les cas suivants.
$$A : (-1, 1)\,, \quad \vec{u} : (1, 0)\,.$$
$$A : (2, 1)\,, \quad \vec{u} : (-3, -1)\,.$$
$$A : (0, 1)\,, \quad \vec{u} : (1, 2)\,.$$
$$A : (-3, 1)\,, \quad \vec{u} : (1, -1)\,.$$

1. Donner des équations paramétriques et implicites de la droite $\mathscr{D}$ passant par A, admettant $\vec{u}$ comme vecteur directeur.
2. Donner des équations paramétriques et implicites de la droite $\mathscr{D}'$ passant par A, et perpendiculaire à $\mathscr{D}$.

Exercice 4.7. On considère trois points A, B, C non alignés d'un plan affine. On note $\mathscr{D}_1$ (respectivement $\mathscr{D}_2$, $\mathscr{D}_3$) la droite (B, C) (respectivement (A, C), (A, B)).

1. Montrer que $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère du plan.
2. Donner les équations des 3 droites $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$, $\mathscr{D}_3$, dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
3. Donner les équations des 3 médianes du triangle ABC dans le même repère.
4. Donner les coordonnées de l'isobarycentre de A, B, C dans le même repère, et vérifier qu'il est le point d'intersection des trois médianes.
5. Montrer que $(B, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ est un repère du plan et déterminer l'ensemble des points ayant les mêmes coordonnées dans les deux repères $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et $(B, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$.
6. Soit $\mathscr{D}$ une droite du plan affine, dont une équation implicite dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est $ax + by + c$. A quelles conditions portant sur les réels a, b, c la droite $\mathscr{D}$ est-elle sécante avec les trois droites $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ et $\mathscr{D}_3$?
On suppose ces conditions réalisées et on note I (respectivement J, K) le point d'intersection de $\mathscr{D}$ avec $\mathscr{D}_1$ (respectivement $\mathscr{D}_2$, $\mathscr{D}_3$).

7. On appelle « diagonales » les segments $[A,I]$, $[B,J]$, $[C,K]$. Donner les coordonnées des milieux des 3 diagonales dans le repère $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$, et vérifier que ces trois points sont alignés.

Exercice 4.8. Soient A, B, C trois points du plan affine, donnés par leurs coordonnées dans un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On considérera les cas suivants.

$$A:(0,0)\,,\quad B:(0,1)\,,\quad C:(1,0)\,.$$
$$A:(0,3)\,,\quad B:(-2,0)\,,\quad C:(0,2)\,.$$
$$A:(1,0)\,,\quad B:(-1,0)\,,\quad C:(2,3)\,.$$
$$A:(2,0)\,,\quad B:(-1,4)\,,\quad C:(-4,3)\,.$$

1. Donner des équations paramétriques et implicites des trois droites passant par (A,B), (A,C), (B,C).
2. Donner des équations paramétriques et implicites des trois médianes du triangle ABC et vérifier que l'isobarycentre G de A, B, C est leur point d'intersection.
3. Donner des équations paramétriques et implicites des trois hauteurs du triangle ABC. Vérifier qu'elles sont concourantes et donner les coordonnées de leur point d'intersection H.
4. Donner des équations paramétriques et implicites des trois médiatrices du triangle ABC. Vérifier qu'elles sont concourantes et donner les coordonnées de leur point d'intersection M.
5. Vérifier que les trois points G, H, M sont alignés et que $\overrightarrow{MH} = 3\overrightarrow{MG}$.

Exercice 4.9. Soient A, B, C, D quatre points d'un plan affine. Soient I, J, K, L, M, N les milieux respectifs des segments $[A,B]$, $[B,C]$, $[C,D]$, $[D,A]$, $[A,C]$, $[B,D]$.

1. Montrer que les segments $[I,K]$, $[J,L]$ et $[M,N]$ ont le même milieu.
2. Montrer que le quadrilatère de sommets I, J, K, L est un parallélogramme.

Exercice 4.10. Dans un plan affine, muni d'un repère orthonormé, on considère deux droites sécantes, $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$, données par leurs équations implicites :

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad \text{et} \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

1. Soit M un point équidistant des deux droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$. Quelle équation vérifient les coordonnées (x,y) de M ?
2. En déduire que l'ensemble des points équidistants de $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ est la réunion de deux droites Δ_1 et Δ_2, dont on donnera une équation implicite.
3. Vérifier que Δ_1 et Δ_2 sont orthogonales.

4. Pour $i = 1, 2$, soit $\vec{u}_i$ un vecteur directeur de D_i, $\vec{v}_i$ un vecteur directeur de Δ_i. On suppose que ces 4 vecteurs ont tous la même norme. Montrer que :
$$|\vec{u_1}\cdot\vec{v_1}| = |\vec{u_2}\cdot\vec{v_1}| \quad \text{et} \quad |\vec{u_1}\cdot\vec{v_2}| = |\vec{u_2}\cdot\vec{v_2}|$$
5. Donner des équations paramétriques et implicites des droites Δ_1 et Δ_2 dans les cas suivants.
$$\mathscr{D}_1 : x = 1\,; \quad \mathscr{D}_2 : y = 1\,.$$
$$\mathscr{D}_1 : x + y = 2\,; \quad \mathscr{D}_2 : x - y = 2\,.$$
$$\mathscr{D}_1 : x + y = 2\,; \quad \mathscr{D}_2 : y = 1\,.$$
$$\mathscr{D}_1 : 2x + y = 3\,; \quad \mathscr{D}_2 : x - 2y = -1\,.$$

Exercice 4.11. Soit a, b deux réels. Soit D_1 la droite d'équation $2x + ay - 1 = 0$ et D_2 la droite d'équations paramétriques $x = b - \lambda$, $y = \lambda$, $\lambda \in \mathbf{R}$. Discuter suivant les valeurs de a et b si D_1 et D_2 sont sécantes, parallèles ou confondues.

Exercice 4.12. On considère le triangle ABC dont les côtés ont pour équations $(AB) : x + 2y = 3$, $(AC) : x + y = 2$, $(BC) : 2x + 3y = 4$.

1. Donnez les coordonnées des points A, B, C.
2. Donnez les coordonnées des milieux A', B', C' de (BC), (AC) et (AB) respectivement.
3. Donnez une équation de chaque médiane et vérifiez qu'elles sont concourantes.

Exercice 4.13. Soit A un point donné par ses coordonnées dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul donné par ses coordonnées dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On considérera les cas suivants.
$$A : (1, 0, 0)\,, \quad \vec{u} : (1, 1, 1)\,.$$
$$A : (1, -1, 1)\,, \quad \vec{u} : (1, 1, 1)\,.$$
$$A : (1, 0, 0)\,, \quad \vec{u} : (1, -1, 1)\,.$$
$$A : (1, 2, 3)\,, \quad \vec{u} : (3, 2, 1)\,.$$

1. Donner des équations paramétriques et implicites pour la droite $\mathscr{D}$, de vecteur directeur $\vec{u}$, passant par A.
2. Donner des équations paramétriques et implicites pour le plan $\mathscr{P}$ passant par A et orthogonal à $\mathscr{D}$.
3. Calculer la distance de O à $\mathscr{P}$ et de O à $\mathscr{D}$.

Exercice 4.14. Soient A, B, C, D quatre points d'un espace affine de dimension 3, muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Les points sont donnés par leur coordonnées. On considérera les cas suivants.

$$A:(0,0,0)\,,\quad B:(1,0,0)\,,\quad C:(0,1,0)\,,\quad D:(0,0,1)\,.$$
$$A:(0,0,0)\,,\quad B:(1,0,0)\,,\quad C:(1,1,0)\,,\quad D:(1,1,1)\,.$$
$$A:(1,0,0)\,,\quad B:(1,2,-1)\,,\quad C:(-1,1,2)\,,\quad D:(2,-1,1)\,.$$
$$A:(1,2,3)\,,\quad B:(1,3,2)\,,\quad C:(3,1,2)\,,\quad D:(3,3,3)\,.$$

1. Vérifier que $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ est un repère.
2. On pose $A' = A + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$. Calculer les coordonnées de A'. Vérifier que $(A', \overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'C}, \overrightarrow{A'D})$ est un repère.
3. Donner les coordonnées de A' dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.
4. Déterminer des équations paramétriques et implicites des 3 plans, contenant respectivement (A, B, C), (A, B, D), (A, C, D), dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
5. Déterminer des équations paramétriques et implicites des 3 plans, contenant respectivement (A, B, C), (A, B, D), (A, C, D), dans le repère $(A', \overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'C}, \overrightarrow{A'D})$.
6. En supposant le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ orthonormé, calculer la distance de A' à chacun des trois plans de la question précédente.
7. Calculer la distance de A' à chacune des 3 droites, contenant respectivement (A, B), (A, C), (A, D).
8. Reprendre les questions 3 à 7 en échangeant les rôles de A et A'.

Exercice 4.15. Soient $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ deux plans non parallèles et A un point n'appartenant ni à $\mathscr{P}_1$ ni à $\mathscr{P}_2$ dans un espace de dimension 3, muni d'un repère orthonormé. Les deux plans sont donnés par des équations implicites et A par ses coordonnées. On note $\mathscr{D}$ la droite intersection de $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$. On considérera les cas suivants.

$$\mathscr{P}_1 : z = 0\,;\quad \mathscr{P}_2 : y = 0\,,\quad A:(1,1,1)\,.$$
$$\mathscr{P}_1 : x + y = 0\,;\quad \mathscr{P}_2 : x + z + 1 = 0\,,\quad A:(1,1,1)\,.$$
$$\mathscr{P}_1 : x + y + z + 2 = 0\,;\quad \mathscr{P}_2 : 2x - y + 3z - 4 = 0\,,\quad A:(2,1,0)\,.$$
$$\mathscr{P}_1 : 2x + y - z - 2 = 0\,;\quad \mathscr{P}_2 : x + 3y + 7z - 11 = 0\,,\quad A:(1,2,1)\,.$$
$$\mathscr{P}_1 : 2x - y + 1 = 0\,;\quad \mathscr{P}_2 : 3y - z - 2 = 0\,,\quad A:(3,-1,2)\,.$$
$$\mathscr{P}_1 : x + y + z - 1 = 0\,;\quad \mathscr{P}_2 : -x + y - z + 1 = 0\,,\quad A:(1,1,2)\,.$$

1. Vérifier que $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ ne sont pas parallèles.

2. Donner des équations paramétriques de $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.
3. Donner des équations paramétriques de $\mathscr{D}$.
4. Donner des équations paramétriques et implicites de la droite orthogonale à $\mathscr{P}_1$ passant par A.
5. Donner des équations paramétriques et implicites de la droite orthogonale à $\mathscr{P}_2$ passant par A.
6. Donner des équations paramétriques et implicites du plan orthogonal à $\mathscr{D}$ passant par A.
7. Calculer la distance de A à $\mathscr{P}_1$, puis à $\mathscr{P}_2$, puis à $\mathscr{D}$.

Exercice 4.16. Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, trois vecteurs déterminés par leurs coordonnées dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On considérera les cas suivants.

$$\vec{u} : (1,0,0)\,,\quad \vec{v} : (1,1,0)\,,\quad \vec{w} : (1,1,1)\,.$$
$$\vec{u} : (0,2,2)\,,\quad \vec{v} : (1,0,1)\,,\quad \vec{w} : (1,2,0)\,.$$
$$\vec{u} : (0,2,1)\,,\quad \vec{v} : (2,1,-1)\,,\quad \vec{w} : (-1,2,1)\,.$$
$$\vec{u} : (1,1,-2)\,,\quad \vec{v} : (1,-2,1)\,,\quad \vec{w} : (-2,1,1)\,.$$
$$\vec{u} : (1,2,3)\,,\quad \vec{v} : (4,5,6)\,,\quad \vec{w} : (7,8,9)\,.$$
$$\vec{u} : (1,-3,2)\,,\quad \vec{v} : (-5,3,4)\,,\quad \vec{w} : (-2,3,-1)\,.$$

1. Calculer les trois produits scalaires $\vec{u}\cdot\vec{v}$, $\vec{u}\cdot\vec{w}$, $\vec{v}\cdot\vec{w}$.
2. Calculer les trois produits vectoriels $\vec{u}\wedge\vec{v}$, $\vec{u}\wedge\vec{w}$, $\vec{v}\wedge\vec{w}$.
3. Calculer les trois produits scalaires $\vec{u}\cdot(\vec{v}\wedge\vec{w})$, $\vec{v}\cdot(\vec{w}\wedge\vec{u})$, $\vec{w}\cdot(\vec{u}\wedge\vec{v})$.

Exercice 4.17. *Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.* Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, trois vecteurs non coplanaires, donnés par leurs coordonnées dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On considérera les cas suivants.

$$\vec{u} : (1,0,0)\,,\quad \vec{v} : (1,1,0)\,,\quad \vec{w} : (1,1,1)\,.$$
$$\vec{u} : (0,2,2)\,,\quad \vec{v} : (1,0,1)\,,\quad \vec{w} : (1,2,0)\,.$$
$$\vec{u} : (0,2,1)\,,\quad \vec{v} : (2,1,-1)\,,\quad \vec{w} : (-1,2,1)\,.$$
$$\vec{u} : (1,-3,2)\,,\quad \vec{v} : (-5,3,4)\,,\quad \vec{w} : (-2,3,-1)\,.$$

1. Calculer $||\vec{u}||$. On pose $\vec{u}' = (1/||\vec{u}||)\vec{u}$. Calculer les coordonnées de $\vec{u}'$.
2. On pose :
$$\vec{v}_1 = \vec{v} - (\vec{u}'\cdot\vec{v})\vec{u}'\,,$$
puis $\vec{v}' = (1/||\vec{v}_1||)\vec{v}_1$. Calculer les coordonnées de $\vec{v}'$.

3. On pose :
$$\overrightarrow{w_1} = \vec{w} - (\vec{u}' \cdot \vec{w})\vec{u}' - (\vec{v}' \cdot \vec{w})\vec{v}',$$
puis $\vec{w}' = (1/\|\overrightarrow{w_1}\|)\overrightarrow{w_1}$. Calculer les coordonnées de $\vec{w}'$.
4. Vérifier que $(\vec{u}', \vec{v}', \vec{w}')$ est une base orthonormée.
5. Démontrer que si $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base quelconque de l'espace vectoriel, alors $(\vec{u}', \vec{v}', \vec{w}')$ est une base orthonormée.

Exercice 4.18. Soit $\mathscr{D}$ (resp. $\mathscr{P}$) une droite (resp. un plan) de l'espace donnée par leurs équations paramétriques ou implicites.

Déterminer l'intersection $\mathscr{P} \cap \mathscr{D}$ dans les quatre cas suivants :

1. $\mathscr{D} : \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ x - 2z = 5 \end{cases}$ $\qquad \mathscr{P} : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda - \mu \\ y = 3 - \lambda + 2\mu \\ z = 4 - 2\lambda - 3\mu \end{cases}$.
2. $\mathscr{D} : \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = 6 - \lambda \\ z = 7 + 2\lambda \end{cases}$ $\qquad \mathscr{P} : x - y - 2z = 3.$
3. $\mathscr{D} : \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = 6 - \lambda \\ z = 7 + 2\lambda \end{cases}$ $\qquad \mathscr{P} : \begin{cases} x = 4 + 2\lambda - \mu \\ y = 7 - \lambda + 3\mu \\ z = 6 - \lambda + \mu \end{cases}$.
4. $\mathscr{D} : \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ x - 2z = 5 \end{cases}$ $\qquad \mathscr{P} : x - 3y - 6z = 11.$

Exercice 4.19. *Perpendiculaire commune à deux droites*

Soit $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ deux droites non parallèles.
$\mathscr{D}_1$ est donnée par un point A_1 et un vecteur directeur $\vec{u_1}$.
$\mathscr{D}_2$ est donnée par un point A_2 et un vecteur directeur $\vec{u_2}$.
On note $\vec{v} = \vec{u_1} \wedge \vec{u_2}$.

1. Montrer que $\vec{v} \neq \vec{0}$.
2. On considère le plan $\mathscr{P}_1$ passant par A_1 et de direction $\vec{u_1}, \vec{v}$ et le plan $\mathscr{P}_2$ passant par A_2 et de direction $\vec{u_2}, \vec{v}$.

   Montrer que $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2$ est une droite de direction $\vec{v}$.

   On la notera Δ.
3. Montrer que $\mathscr{P}_1$ coupe $\mathscr{D}_2$ en un point qu'on notera H_2 et que $\mathscr{P}_2$ coupe $\mathscr{D}_1$ en un point qu'on notera H_1.

Montrer que $H_1 \in \mathscr{D}_1 \cap \Delta$ et $H_2 \in \mathscr{D}_2 \cap \Delta$.
La droite Δ est appelée la perpendiculaire commune à $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$.
Pourquoi cette appelation ?

4. Montrer que pour tout point M_1 de $\mathscr{D}_1$ et tout point M_2 de $\mathscr{D}_2$, $M_1M_2 \geqslant H_1H_2$.
   Montrer qu'on a égalité si et seulement si $M_1 = H_1$ et $M_2 = H_2$.
   Ainsi H_1H_2 est la distance entre les deux droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$.
5. Montrer en utilisant la relation $\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{A_1H_1} + \overrightarrow{H_2A_2} + \overrightarrow{H_1H_2}$ que
$$H_1H_2 = \frac{|[\vec{u_1}, \vec{u_2}, \overrightarrow{A_1A_2}]|}{||\vec{u_1} \wedge \vec{u_2}||}.$$

Exercice 4.20. Déterminer la perpendiculaire commune aux droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ si elle existe dans les deux cas suivants :

1. $\mathscr{D}_1$ est donnée par les équations paramétriques $\begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$
   $\mathscr{D}_2$ est donnée par les équations implicites $\begin{cases} 3x + 2y + 4z + 8 = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$
2. $\mathscr{D}_1$ est donnée par les équations implicites $\begin{cases} x + z = 2 \\ y = -1 \end{cases}$.
   $\mathscr{D}_2$ est donnée par les équations implicites $\begin{cases} y - z + 1 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$

Exercice 4.21*. *Deux formules*
Soient $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.
On veut montrer la formule

(54) $$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u}$$

1. Montrer que la formule est vraie si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
2. On suppose donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires.
   Ainsi $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base de l'espace.
   Expliquer pourquoi il suffit de montrer la fromule dans le cas où $\vec{w} = \vec{u}$.
   Soit $\vec{v'} = \vec{v} - \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{||\vec{u}||^2}\vec{u}$.
3. Montrer que $\vec{v'} \cdot \vec{u} = 0$ et que $\left(\frac{\vec{u}}{||\vec{u}||}, \frac{\vec{v'}}{||\vec{v'}||}, \frac{\vec{u} \wedge \vec{v'}}{||\vec{u}|| ||\vec{v'}||}\right)$ est une base orthonormale directe.

En déduire que $(\vec{u} \wedge \vec{v'}) \wedge \vec{u} = ||\vec{u}||^2 \vec{v'}$.
En déduire la formule (54) dans le cas où $\vec{w} = \vec{u}$.

4. Déduire de la formule (54), la formule suivante appelée formule de Jacobi :

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} + (\vec{w} \wedge \vec{u}) \wedge \vec{v} + (\vec{v} \wedge \vec{w}) \wedge \vec{u} = \vec{0}$$

Compléments

4.1. La géométrie du triangle. — Les Éléments d'Euclide, écrits au IIIe siècle avant notre ère, contenaient déjà de nombreux résultats sur la géométrie des triangles. Les formulations d'Euclide sont très différentes des nôtres, car il ne disposait pas des fonctions trigonométriques et raisonnait uniquement en termes de longueurs et d'aires. De plus il n'était pas question de traiter les quantités à ôter comme des quantités négatives à ajouter. Pour cette raison, les propositions 12 et 13 du livre II des Éléments, séparent le cas d'un triangle obtusangle (ayant un angle obtus) et celui d'un triangle acutangle (dont tous les angles sont aigus). La proposition 12 est énoncée comme suit. Avec un peu de réflexion, vous devriez pouvoir y reconnaître le théorème d'Al-Kashi.

Dans les triangles obtusangles, le carré du côté qui soutient l'angle obtus est plus grand que les carrés des deux autres côtés, de la quantité de deux fois le rectangle formé d'un des côtés contenant l'angle obtus, à savoir celui sur le prolongement duquel tombe la hauteur, et de la ligne prise en-dehors entre le pied de la hauteur et l'angle obtus.

L'astronome et mathématicien Al-Battani généralisa le résultat d'Euclide à la géométrie sphérique au début du Xe siècle, ce qui lui permit d'effectuer des calculs de distance angulaire entre étoiles. Ghiyath Al-Kashi, mathématicien de l'école de Samarcande, mit le théorème sous une forme utilisable pour la triangulation, au cours du XVe siècle.

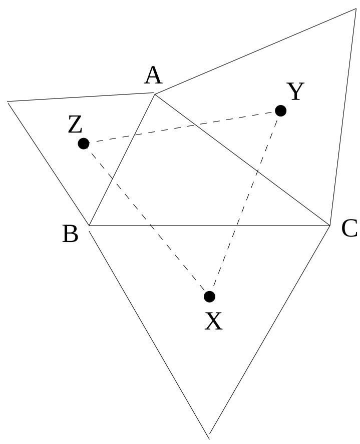


FIGURE 25. Le théorème de Napoléon.

Le théorème suivant, n'a été attribué (faussement) à Napoléon Bonaparte qu'au début du vingtième siècle. Il a été maintes fois redécouvert, et on ignore s'il était ou non connu des grecs.

Théorème 4.80

Soit ABC un triangle quelconque. Soient X, Y, Z les isobarycentres des 3 triangles équilatéraux extérieurs au triangle ABC, construits sur chacun des trois côtés. Le triangle XYZ est équilatéral (figure 25).

Il est connu que Napoléon se piquait de mathématiques, et qu'il a eu plusieurs conversations avec Laplace et Lagrange. Sur ses capacités réelles, les avis divergent, selon l'interprétation de ce que lui aurait dit Laplace, lors d'un dîner le 11 décembre 1797. Voici deux versions.

1. *H. Poincaré :* « Nous attendions tout de vous, Général, sauf des leçons de géométrie »
2. *H.S.M. Coxeter et S.L. Greitzer :* « The last thing we want from you, General, is a lesson in geometry »

Cette anecdote a été si souvent rapportée qu'il peut être utile d'écouter un témoin : Dubois-Aymé (1779–1846) [3].

> Entouré d'artistes et de savants, il [Bonaparte] en retira un éclat de savoir qui éblouit toujours la multitude. L'Institut, selon l'ancienne coutume de toutes les académies, d'appeler dans leur sein des hommes puissants pour s'en faire un appui, l'élut membre de la section de mécanique à la place de Carnot proscrit, et il tira habilement parti de cette couronne académique dont le faux éclat éblouit ses soldats et sembla l'élever au-dessus de tous les autres généraux, ses rivaux de gloire.
>
> Je me rappelle qu'à cette époque, Bonaparte, entretenant un jour le célèbre Laplace et quelques autres membres de l'Institut d'un nouvel ouvrage, intitulé *Geometria del compasso*, dont Mascheroni lui avait récemment, fait hommage à Milan, fit, à l'occasion d'une proposition tout à fait élémentaire, une figure sur le tableau avec de la craie pour mieux se faire comprendre, prétendit-il, et que Laplace, soit moquerie comme je le crus alors, soit flagornerie comme je l'ai cru depuis, lui dit « Je ne m'attendais pas, général, à recevoir une leçon de mathématiques de vous ». Les aides-de-camp de Bonaparte et ses flatteurs, il n'en manquait pas déjà, répétèrent à l'envi ce qu'ils appelaient l'aveu de Laplace lui-même de la supériorité de Napoléon sur lui en mathématiques, et la foule hébétée le répéta après eux. La vérité est que Bonaparte avait oublié depuis longtemps le peu de mathématiques dont il avait eu besoin pour entrer

3. Dubois-Aymé : Marie-Thérèse de Bouès. Pascal Beyls éd. Grenoble, p. 233 (2009).

> dans l'artillerie avant la Révolution, et que lorsqu'il fut reçu à l'Institut il n'eût certes pas pu être reçu à l'école polytechnique.

À vous de conclure ! En attendant, vous pouvez démontrer vous-même le « théorème de Napoléon », par exemple en utilisant le calcul dans le plan complexe.

Le magnifique théorème suivant, en revanche, ne prête pas à polémique. Il a bien été démontré par Frank Morley (1860-1937), en 1899.

Théorème 4.81

Soit ABC un triangle quelconque. Soient X, Y, Z les points d'intersection deux à deux des trissectrices adjacentes du triangle. Le triangle XYZ est équilatéral (figure 26).

Pourquoi les grecs ne l'avaient-ils pas trouvé ? Peut-être parce qu'il est impossible de construire les trissectrices d'un angle à la règle et au compas. . .

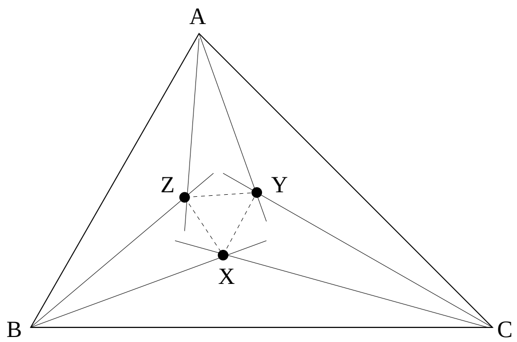


FIGURE 26. Le théorème de Morley.

4.2. La proposition XXXII. — Le père de Blaise Pascal avait peut-être acheté « Les quinze livres des éléments géométriques d'Euclide : plus le livre des donnez du mesme Euclide aussi traduict en françois par ledit Henrion, et imprimé de son vivant », en 1632. Voici ce qu'on y lit, page 54.

THEOR 22. PROP. XXXII

> En tout triangle, l'vn des costez estant prolongé, l'angle extérieur est égal aux deux opposez interieurs ; et de chacun triangle les trois angles interieurs sont egaux à deux droicts.

Pas de quoi s'émerveiller pensez-vous ? Commencez par vérifier que vous savez le démontrer, puis lisez la suite. La scène se passe en 1635 et c'est la sœur de Blaise qui raconte.

> Son génie pour la géométrie commença à paraître qu'il n'avait encore que douze ans, par une rencontre si extraordinaire, qu'il me semble qu'elle mérite bien d'être déduite en particulier.
>
> Mon père était savant dans les mathématiques, et il avait habitude par là avec tous les habiles gens en cette science, qui étaient souvent chez lui. Mais comme il avait dessein d'instruire mon frère dans les langues, et qu'il savait que la mathématique est une chose qui remplit et satisfait l'esprit, il ne voulut point que mon frère en eût aucune connaissance, de peur que cela ne le rendit négligent pour le latin et les autres langues dans lesquelles il voulait le perfectionner. Par cette raison il avait fermé tous les livres qui en traitent. Il s'abstenait d'en parler avec ses amis, en sa présence : mais cette précaution n'empêchait pas que la curiosité de cet enfant ne fût excitée, de sorte qu'il priait souvent mon père de lui apprendre les mathématiques. Mais il le lui refusait en lui proposant cela comme une récompense. Il lui promettait qu'aussitôt qu'il saurait le latin et le grec, il les lui apprendrait. Mon frère, voyant cette résistance, lui demanda un jour ce que c'était que cette science, et de quoi on y traitait ; mon père lui dit en général que c'était le moyen de faire des figures justes, et de trouver les proportions qu'elles ont entre elles, et en même temps lui défendit d'en parler davantage et d'y penser jamais. Mais cet esprit qui ne pouvait demeurer dans ces bornes, dès qu'il eut cette simple ouverture, que la mathématique donnait des moyens de faire des figures infailliblement justes, il se mit lui-même à rêver, et, à ses heures de récréation, étant venu dans une salle où il avait accoutumé de se divertir, il prenait du charbon et faisait des figures sur des carreaux, cherchant les moyens, par exemple, de faire un cercle parfaitement rond, un triangle dont les côtés et les angles fussent égaux, et d'autres choses semblables. Il trouvait tout cela lui seul sans peine ; ensuite il cherchait les proportions des figures entre elles. Mais comme le soin de mon père avait été si grand de lui cacher toutes ces choses qu'il n'en savait pas même les noms, il fut contraint lui-même de s'en faire. Il appelait un cercle un rond, une ligne une barre, ainsi des autres. Après ces noms il se fit des axiomes, et enfin des démonstrations parfaites ; et comme l'on va de l'un à l'autre dans ces choses, il passa et poussa sa recherche si avant, qu'il en vint jusqu'à la trente-deuxième proposition du premier livre d'Euclide. Comme il en était là-dessus, mon père entra par hasard dans le lieu où il était, sans que mon frère l'entendît ; il le trouva si fort appliqué, qu'il fut longtemps sans s'apercevoir de sa venue. On ne peut dire lequel fut le plus surpris ; ou le fils de voir son père, à cause de la défense expresse qu'il lui en avait faite, ou le père de voir son fils au milieu de toutes ces choses. Mais la surprise du père fut bien

plus grande lorsque lui ayant demandé ce qu'il faisait, il lui dit qu'il cherchait telle chose, qui était la trente-deuxième proposition du premier livre d'Euclide. Mon père lui demanda ce qui l'avait fait penser à cela. Il dit que c'était qu'il avait trouvé telle chose. Et sur cela, lui ayant fait encore la même question, il lui dit encore quelques démonstrations qu'il avait faites ; et enfin en rétrogradant et s'expliquant toujours par les noms de rond et de barre, il en vint à ses définitions et à ses axiomes.

Mon père fut si épouvanté de la grandeur et de la puissance de ce génie, que sans lui dire un mot il le quitta et alla chez M. Le Pailleur, qui était son ami intime, et qui était aussi très savant. Lorsqu'il y fut arrivé, il demeura immobile comme transporté. M. Le Pailleur, voyant cela, et voyant même qu'il versait quelques larmes, fut épouvanté, et le pria de ne lui pas celer plus longtemps la cause de son déplaisir. Mon père lui répondit : « Je ne pleure pas d'affliction, mais de joie ; vous savez le soin que j'ai pris pour ôter à mon fils la connaissance de la géométrie, de peur de le détourner de ses autres études : cependant voyez ce qu'il a fait. » Sur cela il lui montra même ce qu'il avait trouvé, par où l'on pouvait dire en quelque façon qu'il avait trouvé la mathématique.

M. Le Pailleur ne fut pas moins surpris que mon père l'avait été, et lui dit qu'il ne trouvait pas juste de captiver plus longtemps cet esprit, et de lui cacher encore cette connaissance ; qu'il fallait lui laisser voir les livres sans le retenir davantage.

Mon père, ayant trouvé cela à propos, lui donna les Éléments d'Euclide, pour les lire à ses heures de récréation. Il les vit et les entendit tout seul, sans avoir jamais eu besoin d'explication ; et pendant qu'il les voyait, il composait et allait si avant, qu'il se trouvait régulièrement aux conférences qui se faisaient toutes les semaines, où tous les habiles gens de Paris s'assemblaient pour porter leurs ouvrages, et pour examiner ceux des autres. Mon frère tenait fort bien son rang, tant pour l'examen que pour la production ; car il était de ceux qui y portaient le plus souvent des choses nouvelles. On voyait souvent aussi dans ces assemblées des propositions qui étaient envoyées d'Allemagne et d'autres pays étrangers, et on prenait son avis sur tout avec autant de soin que de pas un autre ; car il avait des lumières si vives, qu'il est arrivé qu'il a découvert des fautes dont les autres ne s'étaient point aperçus. Cependant il n'employait à cette étude que les heures de récréation ; car il apprenait le latin sur des règles que mon père lui avait faites exprès. Mais comme il trouvait dans cette science la vérité qu'il avait toujours cherchée si ardemment, il en était si satisfait, qu'il y mettait tout son esprit ; de sorte que, pour peu qu'il s'y occupât, il y avançait tellement, qu'à l'âge de seize ans il fit un Traité des Coniques qui passa pour un si grand effort d'esprit, qu'on disait que depuis Archimède on n'avait rien vu de cette force. Tous les habiles gens étaient d'avis qu'on l'imprimât dès lors, parce qu'ils disaient qu'encore que ce fût un ouvrage qui serait toujours admirable, néanmoins, si on l'imprimait dans le temps que celui qui l'avait inventé n'avait encore que seize ans, cette circonstance ajouterait beaucoup à sa beauté : mais comme mon frère n'a jamais eu de passion pour la réputation, il ne fit point de cas de cela ; et ainsi, cet ouvrage n'a jamais été imprimé.

4.3. Les Sangakus. — La bataille de Sekigahara s'est déroulée les 20 et 21 octobre 1600 sous une pluie battante. Elle allait décider de l'avenir du pays pour 2 siècles et demi. Le vainqueur, Ieyasu Tokugawa, s'empara du pouvoir et transféra la capitale dans une petite bourgade tranquille promise à un certain avenir : l'ancienne Edo devint finalement Tokyo. Sous l'ère Edo donc, les dirigeants successifs appliquèrent une stricte politique d'isolement qui permit de maintenir la paix. Commerçants chinois, missionnaires européens, tous ces fauteurs de troubles porteurs d'idées nouvelles n'étaient pas les bienvenus. Ceci engendra le développement de particularités culturelles originales dans tous les domaines, du théâtre à la poésie, en passant par la musique... et les mathématiques. Certains prirent l'habitude d'accrocher au fronton des temples des planches de bois décorées exposant des énigmes mathématiques, les *sangakus*. Exposés aux intempéries et à l'indifférence, beaucoup de ces sangakus du XVII^e^ au XIX^e^ siècle se sont perdus : environ 800 seulement ont été conservés. Les auteurs viennent de toutes les classes sociales, jeunes ou vieux, hommes ou femmes. Offrande aux Dieux, ex-voto, publicité, ostentation ou simple amusement ? Si le sens religieux ou mystique s'est perdu, en revanche l'intérêt esthétique et la signification mathématique restent parfaitement clairs. Jusque de nos jours, des passionnés affichent encore leurs énigmes, et il en est même qui en proposent sur le web. Ce sont en général des problèmes de géométrie euclidienne, à base de cercles, de carrés et de triangles.

Nous vous proposons celui de la figure 27. Dans un cercle de rayon R on trace 4 cercles dans chacun des quarts du cercle initial, tangents entre eux et au grand cercle. Entre ces 4 cercles, on considère le cercle tangent aux 4, concentrique au grand cercle. Soit r son rayon : quel est le rapport de r à R ? Essayez de jouer le jeu : pas de logiciel de calcul, pas d'équation algébrique, pas de nombres complexes... Après tout peu importe : faites comme vous voulez, mais trouvez $3-2\sqrt{2}$.

4.4. La règle de Sarrus. — Âgé de 17 ans, Pierre-Frédéric Sarrus[4], natif de Saint-Affrique dans l'Aveyron, descend à Montpellier pour y faire ses études. Nous sommes à la rentrée 1815, Napoléon vient d'être chassé du pouvoir, et il ne fait pas bon être à la fois protestant et bonapartiste. Sarrus, qui hésite encore entre mathématiques et médecine, va l'apprendre à ses dépens.

4. J.-B. Hirriart-Urruty et H. Caussinus : Sarrus, Borel, Deltheil. Le Rouergue et ses mathématiciens *Gazette de la SMF (104) p. 88–97 (2005)*

Figure 27. Sangaku du temple d'Isaniwa Jinjya, 107×77 cm (1937)

Pour exercer la médecine, il faut un « certificat de bonne vie et mœurs », qu'il demande au maire de Saint-Affrique. Voici la réponse.

> Le maire pense qu'un jeune homme auteur et propagateur de chansons séditieuses, outrageantes pour le roi et la famille royale, qui avant l'interrègne se permit d'arracher et de fouler aux pieds le ruban blanc que portait à la boutonnière un de ses camarades, et qui, dans une autre circonstance, lui prend la fleur de lys et fait semblant de la conspuer, ne peut être un bon citoyen, et ne mérite pas le certificat qu'il demande.

Ce sera donc les mathématiques. Il deviendra professeur et même doyen de la Faculté des Sciences de Strasbourg. Il est l'auteur de publications d'un nombre et d'un niveau tout à fait respectables, et il est quelque peu injuste qu'il soit surtout connu pour sa règle de calcul d'un déterminant d'ordre 3, qui n'est au fond qu'une astuce mnémotechnique, et qu'il n'a probablement pas publiée lui-même. Elle apparaît en 1846 dans les « Éléments d'Algèbre » de P.J.E. Finck, son collègue à l'Université de Strasbourg, à propos de la résolution des systèmes linéaires 3×3.

> Pour calculer, dans un exemple donné, les valeurs de x, y, et z, M. Sarrus a imaginé la méthode pratique suivante, qui est fort ingénieuse. D'abord on peut calculer le dénominateur, et à cet effet on écrit les coefficients des inconnues ainsi
>
> $$\begin{array}{rccc} & a & b & c \\ & a' & b' & c' \\ & a'' & b'' & c'' \\ \text{On répète les trois premiers} & a & b & c \\ \text{et les trois suivants} & a' & b' & c' \end{array}$$
>
> Alors partant de a, on prend diagonalement du haut en bas, en descendant à la fois d'un rang, et reculant d'autant à droite, $ab'c''$; on part de a' de même, et on a $a'b''c$;

de a'', et on trouve $a''bc'$; on a ainsi les trois termes positifs (c'est-à-dire à prendre avec leurs signes) du dénominateur. On commence ensuite par c et descendant de même vers la gauche on a $cb'a''$, $c'b''a$, $c''ba'$, ou les trois termes négatifs (ou plutôt les termes qu'il faut changer de signe).

4.5. Les géodésiens. — Si dans un triangle on connaît les longueurs de deux côtés et la valeur de l'angle entre ces deux côtés, alors on peut calculer l'autre côté et les deux autres angles, grâce au théorème d'Al-Kashi. De même si on connaît la longueur d'un côté et la valeur des deux angles à ses extrémités, alors on peut calculer les longueurs des deux autres côtés et l'angle restant. Connus au moins depuis Euclide, ces résultats ont été longtemps utilisés pour les calculs de longueur, tant en astronomie que pour les relevés terrestres. Il sont la base de la *triangulation*, seule méthode possible pour mesurer de grandes distances, avant le laser et les satellites.

Ses réflexions sur la gravitation universelle avaient conduit Newton à affirmer que la Terre est un ellipsoïde aplati aux pôles (Principia Naturalis, 1687). Depuis, l'Europe savante, et en particulier l'Académie Royale des Sciences se passionnait pour la vérification de cette affirmation. Les Cassini, père puis fils, avaient recueilli une masse impressionnante de données en triangulant le territoire français. Leurs conclusions semblaient infirmer celles de Newton. La polémique s'étend sur des centaines de pages dans les comptes-rendus de l'Académie pour les années 1720. Arguant de considérations géopolitiques autant que scientifiques, le secrétaire de l'Académie Maurepas, réussit à persuader le roi Louis XV de financer deux expéditions. L'une ira en Laponie mesurer un degré de méridien au voisinage du pôle, l'autre devra mesurer un degré de méridien à l'équateur. Si la Terre est bien aplatie, un degré de méridien au pôle doit être plus court qu'en France, et à l'équateur il doit être plus long.

Le 16 mai 1735, l'expédition de l'équateur, composée de dix scientifiques et ingénieurs s'embarque à La Rochelle, en direction du Pérou, une colonie espagnole qui recouvrait la plus grande partie de la Bolivie, de l'Equateur et du Pérou actuels. Il est impossible de décrire ici l'extraordinaire aventure scientifique et humaine que fut cette expédition [5]. Il y eut dans la dizaine d'années que dura cette épopée, deux meurtres, une dizaine de procès, d'innombrables maladies, un mort de fièvre jaune, un dans un accident d'échafaudage, un disparu dans la jungle, un mariage, des affaires de cœur, du trafic d'or et d'objets de luxe, une affaire d'espionnage.

Scientifiquement, rien ne semblait pourtant présenter de difficulté insurmontable. Pour mesurer un degré de méridien, il faut essentiellement trois étapes. La première consiste à mesurer, par arpentage direct sur le terrain, une base rectiligne. La seconde est la triangulation. On construit à partir de la base un maillage, composé de triangles dont on mesure tous les angles, et dont on calcule les longueurs des côtés. On en déduit, par projection orthogonale, la longueur d'un arc

5. F. Trsytram : Le procès des étoiles, *Seghers, Paris (1979)*

de méridien. Il reste ensuite à déterminer la différence des latitudes des deux extrémités de l'arc dont la longueur a été mesurée.

Suite aux difficultés du voyage, la mesure de la base ne put pas avoir lieu avant l'automne 1736. Une toise, spécialement amenée de Paris, sert d'étalon pour des perches en bois, que l'on met bout à bout pour mesurer, en deux équipes indépendantes, une étendue de terrain préalablement défriché, aplani et aménagé pour les mesures. Selon l'heure de la journée, il faut tenir compte des variations des longueurs des perches avec la température et l'humidité. Quand les deux équipes confrontent leurs résultats, la différence sur plus de 12 kilomètres est de l'ordre de la dizaine de centimètres !

Forts de ce succès, les savants se lancent dans une triangulation d'envergure : 43 triangles seront mesurés sur une longueur de 354 kilomètres. La région de Quito où se déroulent les mesures est montagneuse, et pour être bien visibles, les repères marquant les extrémités des triangles sont placés en altitude. Dès la première visée, les savants passent une nuit à 4600 mètres, sous une tempête de neige. Ce n'est que le début d'une épreuve de trois ans, passés pour l'essentiel sur des sentiers de montagne ou dans des campements de fortune, où ni les nombreuses maladies, ni les vols de matériel, ni la crainte des animaux sauvages ne les empêcheront de mesurer leurs triangles, toujours avec le souci de précision le plus extrême. Leur plan initial prévoyait trois équipes, mesurant chacune deux angles de chaque triangle, de manière à ce que tous les angles soient systématiquement mesurés deux fois. Même si les dissensions et les circonstances les empêcheront de s'en tenir à un programme aussi contraignant, c'est la satisfaction du travail bien fait qui domine fin 1739. Ils s'offrent même le luxe, nécessaire à leurs yeux, de mesurer une deuxième base à l'autre extrémité de leur triangulation, afin de vérifier leurs calculs en les reprenant à l'envers. Tous pensent que le plus facile reste à faire : déterminer la latitude des deux extrémités de l'arc. Il leur faudra encore des années de travail et de polémique pour parvenir à un résultat.

Non pas que l'enjeu scientifique soit bien grand : en 1737, une mauvaise nouvelle leur est parvenue. Fortement aidé par l'astuce et la puissance de calcul de Clairaut, Maupertuis, qui dirigeait l'expédition en Laponie, n'a mis que quelques mois à ramener le résultat qu'on attendait : la Terre est bien aplatie aux pôles. Maupertuis s'est déjà fait représenter en majesté pour la postérité, devant un globe terrestre exagérément aplati, la main négligemment posée sur un exemplaire des *Principia Naturalis* de Newton !

Longtemps après cette aventure, la triangulation de la terre devait occuper encore de nombreux mathématiciens. Enjeux scientifiques, mais aussi économiques et surtout militaires, les raisons pour établir des cartes précises, et donc mesurer des triangulations sur le terrain ne manquaient pas. Au cours des XVIII^e^ et XIX^e^ siècles, ces mesures furent souvent confiées à des militaires, qui devaient parfois se montrer aussi bons alpinistes que mathématiciens. Lors de la triangulation des Pyrénées en 1825, les officiers géodésiens Peytier et Hossard utilisèrent pour leurs calculs le sommet du Balaïtous (3144m). En 1865, C. Packes, pensant être le premier à réaliser l'ascension de ce pic, fut plutôt déçu d'y trouver le repère que Peytier et Hossard avaient édifié 40 ans plus tôt. Un sommet proche a été baptisé de leurs noms, et un autre s'appelle « pointe des géodésiens ». Dans les Alpes, la pointe Helbronner, la pointe Dufour, la pointe Durand portent aussi des noms de géodésiens.

4.6. Le cinquième postulat. — Les *Éléments* sont un traité mathématique et géométrique, constitué de 13 livres organisés thématiquement, probablement écrit par Euclide vers 300 avant J.-C. Il comprend une collection de définitions, axiomes, théorèmes et démonstrations sur la géométrie et les nombres.

C'est le plus ancien exemple connu d'un traitement axiomatique et systématique de la géométrie et son influence sur le développement de la science occidentale est fondamentale. Il s'agit du livre de mathématiques le plus lu au cours de l'histoire : les Éléments furent l'un des premiers livres imprimés et ont connu depuis plus de 1000 éditions. Pendant des siècles, vos prédecesseurs ont appris les mathématiques non pas dans des polycopiés, mais dans les Éléments.

Le livre I contient 5 postulats de géométrie plane.

1. Un segment de droite peut être tracé en joignant deux points quelconques.
2. Un segment de droite peut être prolongé indéfiniment en une ligne droite.
3. Etant donné un segment de droite quelconque, un cercle peut être tracé en prenant ce segment comme rayon et l'une de ses extrémités comme centre.
4. Tous les angles droits sont congruents
5. Si deux droites sont sécantes avec une troisième de telle façon que la somme des angles intérieurs d'un côte soit inférieure à deux angles droits, alors ces deux droites sont forcément sécantes de ce côté.

La contraposée du cinquième postulat est que si deux droites ne se coupent pas, alors la somme des angles intérieurs à toute sécante est égale à π. En conséquence, par un point donné, il ne peut passer qu'une parallèle à une droite donnée.

Pour cette raison, le cinquième postulat s'appelle le *postulat des parallèles*. Il a toujours semblé moins évident que les autres, et de nombreux mathématiciens ont pensé qu'il pouvait être démontré à partir des précédents. Pendant des siècles, toutes les tentatives échouèrent. La plupart d'entre elles étaient des essais de démonstration par l'absurde. Nombreux furent ceux qui conclurent à une contradiction devant ce qu'ils percevaient comme une impossibilité « évidente » mais qui n'était nullement une contradiction mathématique. Parmi ces courageux, Giovanni Saccheri (1667-1733) mérite une mention spéciale. En 1733, il publie « Euclides ab omni naevo vindicatus » (Euclide lavé de toute tache). Partant du postulat que par un point on peut faire passer une infinité de droites distinctes qui ne coupent pas une droite donnée, Saccheri démontre quantité de théorèmes, et devant leur évidente bizarrerie, conclut qu'il a démontré par l'absurde le cinquième postulat d'Euclide.

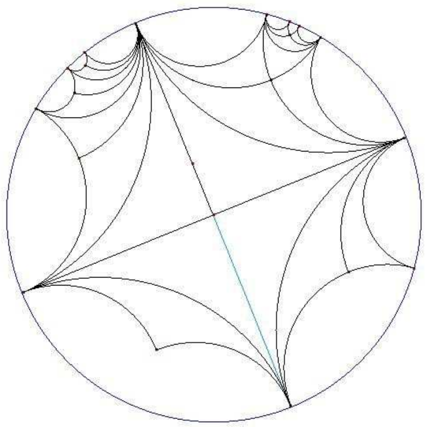


FIGURE 28. Le disque de Poincaré : modèle de la géométrie hyperbolique.

Pourtant, les résultats de Saccheri sont maintenant des théorèmes connus de la *géométrie hyperbolique*. Ce n'est qu'au XIXᵉ siècle que Lobachevski, Boliaï, et sans doute Gauss, reconnurent qu'il était impossible de démontrer le cinquième postulat d'Euclide : on obtient simplement des géométries différentes avec des postulats différents.

1. par un point ne passe aucune parallèle à une droite donnée : *géométrie sphérique*
2. par un point passe exactement une parallèle à une droite donnée : *géométrie euclidienne*
3. par un point passe une infinité de parallèles à une droite donnée : *géométrie hyperbolique*

Parmi les conséquences, la somme des angles d'un triangle, qui vaut π en géométrie euclidienne, est supérieure à π en géométrie sphérique, et inférieure à π en géométrie hyperbolique. Voici l'expression du théorème d'Al-Kashi **??** dans les trois géométries.

1. *géométrie sphérique :* $\cos(a) = \cos(b)\cos(c) + \sin(b)\sin(c)\cos(\alpha)$
2. *géométrie euclidienne :* $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$
3. *géométrie hyperbolique :* $\cosh(a) = \cosh(b)\cosh(c) - \sinh(b)\sinh(c)\cos(\alpha)$

La géométrie sphérique est facile à visualiser : sur une sphère en dimension 3, il suffit de baptiser « droite » tout cercle de rayon maximal (intersection de la sphère avec un plan passant par le centre). La géométrie hyperbolique est moins facile à imaginer. Henri Poincaré (1854-1912) a proposé deux modèles équivalents. Dans le premier, les points sont ceux d'un demi-plan de la géométrie euclidienne, mais on appelle « droite » les demi-cercles centrés sur l'axe des abscisses.

Dans le second, les points sont ceux d'un disque, et les « droites » sont les arcs de cercle qui coupent orthogonalement le cercle bordant le disque. La figure 28 montre des droites hyperboliques, soit orthogonales deux à deux, soit parallèles. Elles forment des « triangles » rectangles dont deux côtés sont infinis et deux angles nuls.

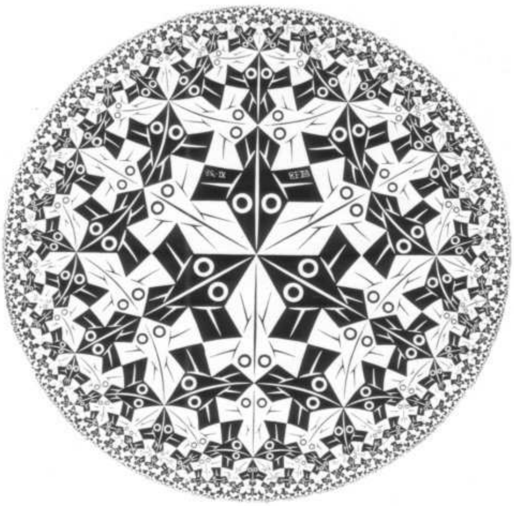


FIGURE 29. « Limite circulaire » de M.C. Escher.

Les triangles de la figure 28 constituent un pavage du plan hyperbolique. Les possibilités pour paver le plan hyperbolique sont beaucoup plus étendues qu'en géométrie euclidienne : on peut par exemple utiliser des pavés à 4 côtés dont deux angles opposés valent $\pi/3$, et les deux autres $\pi/2$: ce pavage est illustré par la figure 29. Le peintre hollandais M.C. Escher était fasciné par la symétrie et l'infini mais il ne connaissait pas les mathématiques quand il a réalisé cette gravure. Après avoir vu ses œuvres, le mathématicien H.S.M. Coxeter demanda à le rencontrer, et lui expliqua qu'il avait réinventé les pavages du plan hyperbolique.

Annales

Énoncé partiel 2016

Pour les exercices 2 à 6, justifiez succinctement chaque réponse donnée.

Dans cet énoncé, $\mathbf{R}$ *désigne l'ensemble des nombres réels et* $\mathbf{N}$ *l'ensemble des entiers positifs ou nuls.*

Question de cours. Donner la définition de la limite d'une fonction en un point.

Exercice 1. Représenter avec soin sur des dessins les ensembles qui suivent en utilisant au besoin des hachures de couleur ; préciser la nature des ensembles E, F et H.

1. $E = \{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1 \}$;
2. $F = \{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x - 2y = 1 \}$;
3. $G = \{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x - 2y \leqslant 1 \}$;
4. $H = \{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x+1)^2 + y^2 \leqslant 1 \}$;
5. $E \cup H$;
6. $E \cap G$;
7. $H - G$;

Exercice 2. On rappelle que $\mathbf{R}_+ = \{ x \in \mathbf{R} \mid x \geqslant 0 \}$. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$ l'application donnée par

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) = x^2.$$

et $g : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ l'application donnée par

$$\forall x \in \mathbf{R}_+, \quad g(x) = \sqrt{x}.$$

1. Déterminer $g \circ f$.
2. Déterminer $f \circ g \circ f$.
3. L'application f est-elle surjective ? Est-elle injective ?
4. L'applicaton g est-elle bijective ? Si c'est le cas, déterminer sa réciproque.

Exercice 3. Démontrer les assertions suivantes (on pourra faire une preuve par récurrence sur n) :

1. $\forall n \in \mathbf{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \left(k - \frac{1}{2}\right) = \frac{n^2 - 1}{2}$;
2. $\forall n \in \mathbf{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} k3^k = \frac{2n-1}{4} 3^{n+1} + \frac{3}{4}$.

Dans les exercices qui suivent, on pourra utiliser sans démonstration que, pour tout $a \in \mathbf{R}_+$,

$$\sqrt{x} \underset{x \to a}{\longrightarrow} \sqrt{a},$$

et, pour tout $a \in \mathbf{R}$,

$$|x| \underset{x \to a}{\longrightarrow} |a|.$$

Exercice 4. Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. On suppose que f admet la limite 2 en 1.

1. La fonction f^2 de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ donnée par $f^2 : x \mapsto (f(x))^2$ admet-elle toujours une limite en 1 ? Si c'est le cas, donner la valeur de la limite.
2. La fonction $1/f$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ donnée par $1/f : x \mapsto \frac{1}{f(x)}$ admet-elle toujours une limite en 1 ? Si c'est le cas, donner la valeur de la limite.
3. La fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ donnée par $x \mapsto \sqrt{f(1-x)}$ admet-elle toujours une limite en 1 ? Si c'est le cas, donner la valeur de la limite. Cette fonction admet-elle toujours une limite en 0 ? Si c'est le cas, donner la valeur de la limite.

Exercice 5. Déterminer l'existence et l'éventuelle valeur des limites suivantes :

1. $\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{|x|}}{x^2 + 2}$;
2. $\lim_{x \to -1} \frac{x+1}{x^2 - 1}$;
3. $\lim_{x \to -1} \frac{|x+1|}{x^2 - 1}$.

Exercice 6. Soit $a \in \mathbf{R}$.

1. Donner, sans la démontrer, la formule du binôme de Newton.
2. Justifier, pour tout $n \in \mathbf{N}$, la formule
$$\sum_{k=0}^{n} a^k \binom{n}{k} = (a+1)^n.$$
3. Développer, pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'expression $(a-1)^n$.

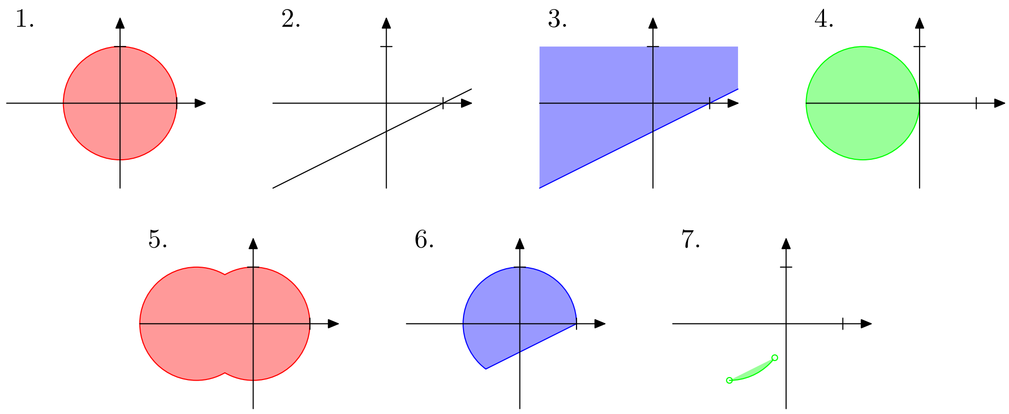
4. Soit $n \in \mathbf{N}$. Écrire la somme
$$\sum_{k=0}^{n} a^{2k} \binom{2n}{2k}$$
comme la somme de deux termes.

Corrigé partiel 2016

Question de cours. Soit f une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, soit $l \in \mathbf{R}$ et soit a un point adhérent au domaine de définition de f. La fonction f admet la limite l au point a si

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbf{R}_+^*, \forall x \in \mathscr{D}_f, \quad |x-a| < \eta \Longrightarrow |f(x)-l| < \varepsilon.$$

Exercice 1. L'ensemble E est le disque fermé de centre en $(0,0)$ et de rayon 1, F est la droite passant par les points $(0,-1/2)$ et $(1,0)$ et G un demi-plan dont le bord est F. Par le théorème de Pythagore, $(x+1)^2+y^2$ est le carré de la distance de (x,y) à $(-1,0)$, donc H est le disque fermé de centre $(-1,0)$. (On peut aussi voir cela en faisant un changement de coordonnées $x' = x+1$ et $y' = y$). Cela conduit aux dessins suivants :



Dans la figure 7, le segment de droite $F \cap H$ ne fait pas partie de la figure.

Exercice 2.

1. La fonction $g \circ f$ est l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}_+$ donnée par $g \circ f(x) = \sqrt{x^2} = |x|$ pour $x \in \mathbf{R}$.
2. La fonction $f \circ g \circ f$ est l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}_+$ donnée par $x \mapsto f(|x|) = |x|^2 = x^2$.
3. Pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, on a $x = \sqrt{x}^2 = f(\sqrt{x})$ donc l'application f est surjective. Par contre $f(-1) = 1 = f(1)$ donc f n'est pas injective.
4. Pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, on a $x = \sqrt{x^2} = g(x^2)$ donc g est surjective. Soient $x, y \in \mathbf{R}_+$ tels que $\sqrt{x} = \sqrt{y}$ alors $x = \sqrt{x}^2 = \sqrt{y}^2 = y$ donc g est injective. Elle est donc bijective. Comme

   $$\forall x \in \mathbf{R}_+, \quad x = g(x^2),$$

   la réciproque de g est l'application g^{-1} de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}_+$ donnée par $x \mapsto x^2$.

Exercice 3. 1. Si $n = 0$, on a

$$\sum_{k=0}^{0}\left(k-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} = \frac{0-1}{2}.$$

ce qui prouve l'égalité dans ce cas. Supposons la formule vérifiée pour un entier n.

$$\sum_{k=0}^{n+1}\left(k-\frac{1}{2}\right) = \left(\sum_{k=0}^{n}\left(k-\frac{1}{2}\right)\right) + (n+1) - \frac{1}{2}$$
$$= \frac{n^2-1}{2} + n + \frac{1}{2} = \frac{n^2-1+2n+1}{2} = \frac{(n+1)^2-1}{2}.$$

ce qui démontre l'égalité pour $n+1$. Par récurrence, l'égalité vaut pour tout $n \in \mathbf{N}$.

2. Pour $n = 0$, on a

$$\sum_{k=0}^{0} k3^k = 0 = -\frac{2\times 0-1}{4}3 + \frac{3}{4}.$$

Supposons la formule démontrée pour un entier n.

$$\sum_{k=0}^{n+1} k3^k = \left(\sum_{k=0}^{n} k3^k\right) + (n+1)3^{n+1} = \frac{2n-1}{4}3^{n+1} + (n+1)3^{n+1} + \frac{3}{4}$$
$$= \frac{2n-1+4n+4}{4}3^{n+1} + \frac{3}{4} = \frac{6n+3}{4}3^{n+1} + \frac{3}{4} = \frac{2(n+1)-1}{4}3^{n+2} + \frac{3}{4}$$

ce qui démontre le résultat pour $n+1$. Par récurrence, la formule vaut pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Exercice 4. 1. Par le résultat sur la limite d'un produit de fonctions

$$f(x)^2 \xrightarrow[x\to 1]{} 2^2 = 4\,.$$

2. Comme la limite de f en 1 est non nulle, on peut appliquer le résultat sur la limite d'un quotient de fonctions et

$$\frac{1}{f(x)} \xrightarrow[x\to 1]{} \frac{1}{2}\,.$$

3. Soit g l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ donnée par $x \mapsto 1-x$. Comme g est polynomiale, $g(x) \xrightarrow[x\to 1]{} g(1) = 0$ et $g(x) \xrightarrow[x\to 0]{} g(0) = 1$.

Pour démontrer que la fonction $x \mapsto \sqrt{f(1-x)}$ n'admet pas toujours de limite en 1, considérons par exemple l'application f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par $f(x) = 0$ si $x < 0$ et par $f(x) = 2$ si $x \geqslant 0$. Alors, cette application admet la limite 2 en 1, mais $\sqrt{f(1-x)} = 0$

si $x > 1$ et $\sqrt{f(1-x)} = \sqrt{2}$ si $x < 1$. En considérant les limites à droite et à gauche en 1, on obtient que l'application $x \mapsto \sqrt{f(1-x)}$ n'admet pas de limite pour ce choix de l'application f ce qui prouve que cette fonction n'admet pas toujours de limite en 1.

Revenons au cas général. En appliquant le théorème sur la composée de fonctions à f et g, on obtient que, pour toute application f telle que $f(x)$ tend vers 2 quand x tend vers 1,

$$f(1-x) \xrightarrow[x\to 0]{} 2\,.$$

et comme

$$\sqrt{x} \xrightarrow[x\to 2]{} \sqrt{2},$$

en appliquant à nouveau ce théorème, on en déduit que

$$\sqrt{f(1-x)} \xrightarrow[x\to 0]{} \sqrt{2}$$

Exercice 5.

1. En appliquant le théorème sur la composée d'application

$$\sqrt{|x|} \xrightarrow[x\to -1]{} 1\,.$$

L'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ donnée par $x \mapsto x^2+2$ est polynomiale, donc continue. Donc

$$x^2+2 \xrightarrow[x\to -1]{} 3\,.$$

Comme cette dernière limite est non nulle, on peut appliquer le résultat sur la limite du quotient

$$\frac{\sqrt{|x|}}{x^2+2} \xrightarrow[x\to -1]{} \frac{1}{3}\,.$$

2. $$\lim_{x\to -1} \frac{x+1}{x^2-1} = \lim_{x\to -1} \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} = \lim_{\substack{x\to -1\\ x\neq -1}} \frac{1}{x-1} = -\frac{1}{2},$$

où la dernière égalité résulte de la limite d'un quotient de fonctions.

3. En utilisant la limite obtenue à la question précédente, on obtient les formules suivantes :

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} \frac{|x+1|}{x^2-1} = \lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} \frac{-(x+1)}{x^2-1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \frac{|x+1|}{x^2-1} = \lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \frac{x+1}{x^2-1} = -\frac{1}{2}$$

Comme les limites à droite et à gauche en -1 diffèrent, la fonction considérée n'admet pas de limite en -1.

Exercice 6. 1. Pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tous $a, b \in \mathbf{C}$, la formule du binôme s'écrit

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

2. On applique la formule du binôme avec $b = 1$.
3. En appliquant la formule du binôme avec $b = -1$,

$$(a-1)^n = (-1)^n \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-a)^k.$$

4. En sommant les égalités des questions 1 et 2, on obtient

$$(a+1)^n + (1-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(a^k + (-a)^k\right)$$

La somme $a^k + (-a)^k$ est nulle si k est impair et vaut $2a^k$ si k est pair, c'est-à-dire de la forme $k = 2k'$. Dans le cas où $n = 2n'$, on obtient donc

$$\sum_{k'=0}^{2n'} 2a^{2k'} \binom{2n'}{2k'} = (a+1)^{2n'} + (1-a)^{2n'}.$$

Par conséquent,

$$\sum_{k=0}^{2n} a^{2k} \binom{2n}{2k} = \frac{1}{2}(a+1)^{2n} + \frac{1}{2}(a-1)^{2n}.$$

Énoncé première session 2016

Pour les exercices 1 à 6, justifiez succinctement chaque réponse donnée.

Dans cet énoncé, $\mathbf{C}$ *désigne l'ensemble des nombres complexes.*

Question de cours. Donner la définition de la limite d'une fonction en un point.

Exercice 1. Soient E et F des ensembles. Soit f une application de E dans F. Soient B et B' des parties de F.

1. Rappeler la définition de la partie $f^{-1}(B)$ de E.
2. Démontrer que si $B \subset B'$, alors $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$.
3. Démontrer l'egalité $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$.
4. Démontrer l'égalité $f^{-1}(F - B) = E - f^{-1}(B)$.

Exercice 2. Dans cet exercice, x et y désignent des nombres réels.

1. Soient p et q des entiers naturels tels que $p \leqslant q$. On suppose $x \neq 1$. Donner, sans démonstration, la valeur de la somme
$$\sum_{k=p}^{q} x^k.$$
2. Soit n un entier tel que $n > 1$. Calculer
$$\sum_{k=1}^{n-1} 3^k.$$
3. On suppose que le nombre réel y n'est pas nul et que $x \neq y$. Calculer
$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{x}{y}\right)^k$$
puis
$$\sum_{k=0}^{n} x^k y^{n-k}.$$
Quelles identités remarquables retrouve-t-on pour $n = 1$ et $n = 2$?

Exercice 3. Déterminer, en le justifiant, l'existence et l'éventuelle valeur des limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2}{x^2 + 3x + 2}$
2. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$
3. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x^2 - x}$

Exercice 4. Dans cet exercice, $\mathrm{i} \in \mathbf{C}$ vérifie $\mathrm{i}^2 = -1$.

1. Vérifier l'égalité
$$|5 + 12\mathrm{i}| = 13.$$
2. Déterminer les racines carrées du nombre complexe $5 + 12\mathrm{i}$.
3. En déduire les solutions complexes de l'équation
$$(1 + \mathrm{i})X^2 + X - 2 - \mathrm{i} = 0.$$

Exercice 5. Dans cet exercice, on se place dans un espace affine euclidien $\mathscr{E}$ de dimension 3 muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On note A le point de coordonnées $(1, 2, 3)$, B celui de coordonnées $(-1, 3, 4)$, C celui de coordonnées $(2, 2, 2)$ et D celui de coordonnées $(1, 0, 5)$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Calculer les coordonnées du produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont-ils colinéaires ?
3. Donner une équation implicite d'un plan $\mathscr{P}$ contenant les trois points A, B et C. Le point D appartient-il à $\mathscr{P}$? Que vaut le produit mixte $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]$?

Dans la suite de l'exercice, on considère l'ensemble
$$\mathscr{H} = \{ M \in \mathscr{E} \mid AM = BM \}.$$

4. En considérant le milieu I du segment $[A, B]$, donner les coordonnées d'un point de $\mathscr{H}$.
5. Soit M un point de $\mathscr{E}$, démontrer la formule
$$AM^2 - BM^2 = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IM}.$$
(Indication : on pourra considérer le produit scalaire $(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM}) \cdot (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM})$.)
6. Démontrer que l'ensemble $\mathscr{H}$ est un plan affine dont on donnera une équation implicite.

Corrigé première session 2016

Question de cours. Soit f une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, soit $l \in \mathbf{R}$ et soit a un point adhérent au domaine de définition de f. La fonction f admet la limite l au point a si

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbf{R}_+^*, \forall x \in \mathscr{D}_f, \quad |x-a| < \eta \Longrightarrow |f(x)-l| < \varepsilon.$$

Exercice 1.

1. Par définition,

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) = B\}$$

2. On suppose que $B \subset B'$. Soit $x \in f^{-1}(B)$. Par définition, $f(x) \in B$. Comme $B \subset B'$, cela implique $f(x) \in B'$. Donc $x \in f^{-1}(B')$. Ceci démontre l'inclusion $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$.
3. Soit $x \in E$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned} & x \in f^{-1}(B \cup B') \\ \Leftrightarrow\ & f(x) \in B \cup B' \\ \Leftrightarrow\ & f(x) \in B \text{ ou } f(x) \in B' \\ \Leftrightarrow\ & x \in f^{-1}(B) \text{ ou } x \in f^{-1}(B') \\ \Leftrightarrow\ & x \in f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B') \end{aligned}$$

Donc $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$.
4. Soit $x \in E$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned} & x \in f^{-1}(F - B) \\ \Leftrightarrow\ & f(x) \in F - B \\ \Leftrightarrow\ & \neg(f(x) \in B) \\ \Leftrightarrow\ & \neg(x \in f^{-1}(B)) \\ \Leftrightarrow\ & x \in E - f^{-1}(B) \end{aligned}$$

Donc $f^{-1}(F - B) = E - f^{-1}(B)$.

Exercice 2.

1. Par la formule pour la somme d'une série géométrique, comme $x \neq 1$,

$$\sum_{k=p}^{q} x^k = \frac{x^p - x^{q+1}}{1-x}.$$

2. De la formule précédente, on déduit les égalités :
$$\sum_{k=1}^{n-1} 3^k = \frac{3-3^n}{1-3} = \frac{3^n-3}{2}.$$

3. La formule de la question 1 donne également l'égalité
$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{x}{y}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{x}{y}\right)^{n+1}}{1-\frac{x}{y}}.$$
En multipliant les deux côtés de l'égalité précédente par y^n, on en déduit les formules,
$$\sum_{k=0}^{n} x^k y^{n-k} = y^n \left(\frac{1-\left(\frac{x}{y}\right)^{n+1}}{1-\frac{x}{y}}\right) = \frac{y^{n+1}-x^{n+1}}{y-x}.$$
Pour $n=1$ on retrouve la formule $y^2-x^2=(y-x)(y+x)$, et pour $n=2$ la formule
$$y^3-x^3=(y-x)(y^2+yx+x^2).$$

Exercice 3. 1. Comme une application polynomiale est continue,
$$x^2+3x+2 \xrightarrow[x\to 1]{} 6$$
et comme $6 \neq 0$, on peut appliquer la proposition sur la limite d'un quotient qui donne
$$\frac{x^2}{x^2+3x+2} \xrightarrow[x\to 1]{} \frac{1}{6}.$$

2. Pour $x \neq 1$ et $x \neq 2$, on a les égalités
$$\frac{x^2-1}{x^2-3x+2} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{x+1}{x-2}.$$
Donc
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2-3x+2} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x\neq 1}} \frac{x+1}{x-2} = \frac{2}{-1} = -2,$$
où l'avant-dernière égalité résulte de la proposition sur la limite d'un quotient.

3. Notons tout d'abord que pour tout $x \in \mathbf{R}$
$$\sqrt{x^2-2x+1} = \sqrt{(x-1)^2} = |x-1|.$$

Par conséquent, si $x \neq 1$ et $x \neq 0$,

$$\frac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x^2-x} = \begin{cases} \frac{1}{x} \text{ si } x > 1. \\ \frac{-1}{x} \text{ si } x < 1. \end{cases}$$

Il en résulte que les limites à gauche et à droite de la fonction considérée sont données par

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x^2-x} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x} = 1$$

et

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x^2-x} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-1}{x} = -1.$$

Comme les limites à droite et à gauche diffèrent, la fonction considérée n'admet pas de limite en 1.

Exercice 4. 1. La norme de $5+12\mathrm{i}$ est donnée par

$$|5+12i| = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13.$$

2. Si $\delta = x + y\mathrm{i}$, avec $x, y \in \mathbf{R}$ est une racine carrée de $5+12\mathrm{i}$, alors x et y vérifient le système d'équations

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 13 \\ x^2-y^2 = 5 \\ 2xy = 12. \end{cases}$$

Donc $x^2 = 9$, $y^2 = 4$ et $xy > 0$. Par conséquent $\delta = 3+2\mathrm{i}$ ou $\delta = -3-2\mathrm{i}$. Il en résulte que les racines carrées de $5+12\mathrm{i}$ sont $3+2\mathrm{i}$ et $-3-2\mathrm{i}$.

3. On calcule le discriminant de l'équation :

$$\Delta = 1+4(1+\mathrm{i})(2+\mathrm{i}) = 1+4(1+3\mathrm{i}) = 5+12\mathrm{i}.$$

les deux solutions de l'équation sont donc

$$z_1 = \frac{-1+3+2\mathrm{i}}{2(1+\mathrm{i})} = 1$$

et

$$z_2 = \frac{-1-3-2\mathrm{i}}{2(1+\mathrm{i})} = \frac{-1}{2}(2+\mathrm{i})(1-\mathrm{i}) = -\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}.$$

Exercice 5. 1. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(-2,1,1)$, et le vecteur $\overrightarrow{AC}$ pour coordonnées $(1,0,-1)$.

2. Les coordonnées du produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ sont
$$(-1, 1-(-2)\times(-1), -1) = (-1, -1, -1).$$
Comme ce produit est non nul, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.
3. Une équation implicite de l'unique plan $\mathscr{P}$ contenant A, B et C est
$$-(x-1)-(y-2)-(z-3) = 0$$
ou encore
$$x+y+z-6 = 0$$
Comme $1+0+5-6 = 0$, le point D appartient au plan $\mathscr{P}$. Il en résulte que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires. Donc
$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = 0.$$
4. Le point I, milieu du segment $[A, B]$ a pour coordonnées $(0, \frac{5}{2}, \frac{7}{2})$ et comme on a égalité des distances $AI = BI$, le point I appartient à $\mathscr{H}$.
5. Par la relation de Chasles,
$$\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}.$$
D'autre part, comme I est le milieu de $[A, B]$, $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} = 0$. Donc
$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} + 2\overrightarrow{IM} = 2\overrightarrow{IM}.$$
On a donc les égalités
$$AM^2 - BM^2 = (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM}) \cdot (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}) = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IM}$$
6. Comme les distances sont positives, $AM = BM$ si et seulement si $AM^2 = BM^2$. Par la question précédente, cela équivaut à dire que $\overrightarrow{IM}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{AB}$. Donc $\mathscr{H}$ est le plan orthogonal à la droite (AB) passant par I. Une équation implicite de $\mathscr{H}$ est donné par
$$-2(x-0) + (y-\frac{5}{2}) + (z-\frac{7}{2}) = 0$$
soit
$$-2x + y + z - 6 = 0.$$

Énoncé seconde session 2016

Pour les exercices 2 à 5, justifiez succinctement chaque réponse donnée.

Dans cet énoncé, $\mathbf{N}$ *désigne l'ensemble des entiers positifs ou nuls,* $\mathbf{R}$ *désigne l'ensemble des nombres réels,* $\mathbf{R}_+$ *l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls et* $\mathbf{R}_+^*$ *l'ensemble des nombres réels strictement positifs.*

Question de cours. Soit E un espace vectoriel. À quelle condition dit-on que des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ?

Exercice 1. Dans cet exercice, f désigne une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Pour chacune des assertions suivantes dire quelle propriété de l'application f est caractérisée par l'assertion donnée :

1. $\exists y \in \mathbf{R},\ \forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = y$;
2. $\forall y \in \mathbf{R},\ \exists x \in \mathbf{R},\ f(x) = y$;
3. $\forall x \in \mathbf{R},\ \forall x' \in \mathbf{R},\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$;
4. $\forall x \in \mathbf{R},\ \forall x' \in \mathbf{R},\ x' > x \Rightarrow f(x') > f(x)$;
5. $\forall a \in \mathbf{R},\ \forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*,\ \exists \eta \in \mathbf{R}_+^*,\ \forall x \in \mathbf{R},\ |x-a| < \eta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon$;
6. $\exists a \in \mathbf{R},\ \exists \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*,\ \forall \eta \in \mathbf{R}_+^*,\ \exists x \in \mathbf{R},\ |x-a| < \eta$ et $|f(x)-f(a)| \geqslant \varepsilon$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ l'application définie par $f(t) = t^2 - 2t + 2$ pour $t \in \mathbf{R}$.

1. Étudier les variations de f et tracer le graphe de l'application f.
2. Déterminer les ensembles suivants $f([0,1]), f([0,2]), f(\mathbf{R}_+)$.
3. Déterminer les ensembles suivants $f^{-1}([1,2]), f^{-1}([0,2]), f^{-1}(\mathbf{R}_+)$.
4. Déterminer $f^{-1}(f([1,2]))$.

Exercice 3. Pour tout entier $n \geqslant 0$ et tout nombre réel t, on définit

$$P_n(t) = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(t-k).$$

Par convention, $P_0(t) = 1$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.

1. Écrire $P_1(t)$ et $P_2(t)$ pour $t \in \mathbf{R}$, sans utiliser le signe $\prod$.
2. Calculer $P_n(m)$ pour $n \in \mathbf{N}$ et $m \in \{0, \dots, n-1\}$.
3. Calculer $P_n(n)$ pour $n \in \mathbf{N}$.
4. On suppose que $m > n$, écrire $P_n(m)$ en termes du coefficient binomial $\binom{m}{n}$.

5. Démontrer la formule

$$P_n(t+1) - P_n(t) = P_{n-1}(t) \tag{55}$$

pour tout $n \geqslant 1$ et tout $t \in \mathbf{R}$. Quelle formule concernant les coefficients binomiaux retrouve-t-on ainsi si t est un entier m ?

6. Déduire de la formule (55), en raisonnant par récurrence sur m, une démonstration de la formule

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{k(k-1)}{2} = \frac{(m-1)m(m+1)}{6}.$$

7. Démontrer, pour $m, n \in \mathbf{N}$, la formule

$$\sum_{k=0}^{m} P_n(k) = P_{n+1}(m+1).$$

Exercice 4. Dans cet exercice, la lettre x désigne un nombre réel.

1. En utilisant la formule de Moivre, écrire $\cos(4x)$ et $\sin(4x)$ en termes de $\sin(x)$ et de $\cos(x)$.
2. Écrire $\cos(4x)$ en termes de $\cos(x)$.

Exercice 5. Dans cet exercice, on se place dans un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On note A le point de coordonnées $(-1, 1)$, B celui de coordonnées $(1, 3)$ et C celui de coordonnées $(3, -3)$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ puis le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. Que peut-on dire de ces deux vecteurs ?
2. Calculer les distances AB et AC. En déduire la distance BC.
3. On note I le milieu du segment $[A, B]$, J celui de $[B, C]$ et K le milieu du segment $[A, C]$. Calculer les coordonnées de I, J et K.
4. Donner une équation implicite pour chacune des médianes du triangle ABC, c'est-à-dire des droites (AJ), (BK) et (CI).
5. Calculer les coordonnées du point G d'intersection des droites (AJ) et (BK). Vérifier que le point G appartient à la droite (CI).
6. Calculer le vecteur

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}.$$

Corrigé seconde session 2016

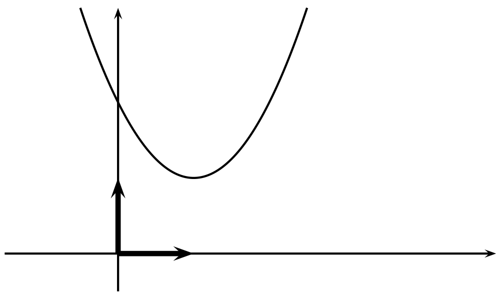
Question de cours. Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe un nombre réel λ tel que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ ou $\vec{v} = \lambda\vec{u}$.

Exercice 1.
1. L'application f est constante ;
2. l'application f est surjective ;
3. l'application f est injective ;
4. l'application f est strictement croissante ;
5. l'application f est continue ;
6. l'application f n'est pas continue.

Exercice 2.
1. Comme $f(t) = (t-1)^2 + 1$ et que l'application $x \mapsto x^2$ est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$, et qu'elle a pour image $\mathbf{R}+$ sur ces deux intervalles, les variations de f sont données par le tableau suivant :

t	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Le graphe a donc l'allure suivante



2. L'application f est décroissante sur l'intervalle $[0,1]$ donc $f([0,1]) \subset [f(1), f(0)] = [1,2]$. Pour tout $y \in [1,2]$, le nombre réel y a un unique antécédent par f dans $[0,1]$, à savoir $1 - \sqrt{y-1}$ donc $f([0,1]) = [1,2]$.

   L'application f est croissante sur $[1,2]$, donc $f([1,2]) \subset [f(1), f(2)] = [1,2]$. Pour tout $y \in [1,2]$, le nombre réel y a un unique antécédent par f dans $[1,2]$, à savoir $1 + \sqrt{y-1}$ donc $f([1,2]) = [1,2]$.

$$f([0,2]) = f([0,1] \cup [1,2]) = f([0,1]) \cup f([1,2]) = [1,2].$$

D'après le tableau de variation,

$$f(\mathbf{R}_+) = f([0,1]) \cup f([1,+\infty[) = [1,2] \cup [1,+\infty[= [1,+\infty[$$

3. Par le tableau de variations, comme $f(0) = f(2) = 2$,

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) \leqslant 2 \Longrightarrow x \in [0,2].$$

Donc $f^{-1}([1,2]) \subset [0,2]$. Inversement,par la question précédente, on a l'inclusion $f([0,2]) \subset [1,2]$ ce que implique que $f(x) \in [1,2]$ pour tout $x \in [0,2]$. Cela implique l'inclusion inverse.

Comme $f(\mathbf{R}) \subset [1,+\infty]$, on a les égalités :

$$f^{-1}([0,2]) = f^{-1}([1,2]) = [0,2].$$

De plus $f^{-1}(\mathbf{R}_+) = \mathbf{R}$.

4. On a vu que $f([1,2]) = [1,2]$. Donc

$$f^{-1}(f([1,2])) = f^{-1}([1,2]) = [0,2].$$

Exercice 3. 1. Par définition, $P_1(t) = \frac{1}{1}\prod_{k=0}^{0}(t-k) = t$ et

$$P_2(t) = \frac{t(t-1)}{2}.$$

2. Si $m \in \{0,\dots,n-1\}$, alors dans le produit $\prod_{k=0}^{n-1}(m-k)$, le terme correspondant à $k=m$ est nul, si bien que le produit est nul. Donc $P_n(m)$ vaut alors 0.

3. On a les égalités

$$P_n(n) = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n}(n-k) = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n}k = \frac{n!}{n!} = 1.$$

4. Si $m > n$, alors

$$P_n(m) = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} = \frac{m!}{n!(m-n)!} = \binom{m}{n}.$$

5. On écrit la différence :

$$\begin{aligned}
P_n(t+1)-P_n(t) &= \frac{1}{n!}\left(\prod_{k=0}^{n-1}(t+1-k)-\prod_{k=0}^{n-1}(t-k)\right)\\
&= \frac{1}{n!}\left((t+1)\prod_{k=1}^{n-1}(t-(k-1))-(t-n+1)\prod_{k=0}^{n-2}(t-k)\right)\\
&= \frac{1}{n!}\left((t+1)\prod_{k=0}^{n-2}(t-k)-(t-n+1)\prod_{k=0}^{n-2}(t-k)\right)\\
&= \frac{t+1-(t-n+1)}{n!}\prod_{k=0}^{n-2}(t-k)\\
&= \frac{n}{n!}\prod_{k=0}^{n-2}(t-k) = P_{n-1}(t).
\end{aligned}$$

En prenant pour t un entier m, on retrouve, à l'aide de la question 4, la formule du triangle de Pascal :

$$\binom{m+1}{n} = \binom{m}{n-1}+\binom{m}{n}.$$

6. Remarquons que $P_2(k) = \frac{k(k-1)}{2}$ et $P_3(m+1) = \frac{(m-1)m(m+1)}{6}$. La formule à démontrer est donc

$$\sum_{k=0}^{m} P_2(k) = P_3(m+1),$$

pour tout entier $m \geqslant 0$. Démontrons-la par récurrence.

Initialisation. Pour $m=0$,

$$\sum_{k=0}^{0} P_2(k) = P_2(0) = 0 = P_3(1).$$

Hérédité. Supposons la formule vraie pour m, c'est-à-dire

$$\sum_{k=0}^{m} P_2(k) = P_3(m+1).$$

Démontrons-la pour $m+1$. On a

$$\sum_{k=0}^{m+1} P_2(k) = \left(\sum_{k=0}^{m} P_2(k)\right) + P_2(m+1) = P_3(m+1)+P_2(m+1)$$

En appliquant la formule (55), on obtient que cette somme est égale à $P_3(m+2)$ ce qui démontre la formule pour $m+1$.

Par récurrence, la formule est donc vraie pour tout $m \in \mathbf{N}$.

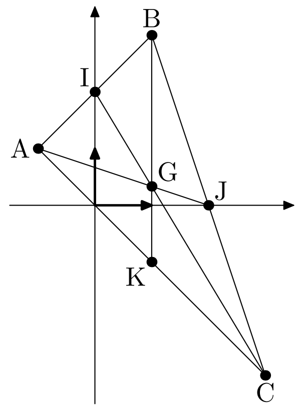
7. On fixe l'entier $n \in \mathbf{N}$ et on démontre la formule par récurrence sur l'entier m.
initialisation. Pour $m = 0$, d'après la question 2,
$$\sum_{k=0}^{0} P_n(k) = P_n(0) = 0 = P_{n+1}(1).$$
Hérédité. Supposons la formule vraie pour m, c'est-à-dire
$$\sum_{k=0}^{m} P_n(k) = P_{n+1}(m+1).$$
Démontrons-la pour $m+1$. On a
$$\sum_{k=0}^{m+1} P_n(k) = \left(\sum_{k=0}^{m} P_n(k)\right) + P_n(m+1) = P_{n+1}(m+1) + P_n(m+1)$$
En appliquant la formule (55), on obtient que cette somme est égale à $P_{n+1}(m+2)$ ce qui démontre la formule pour $m+1$.

Par récurrence, la formule est donc vraie pour tout $m \in \mathbf{N}$.

Exercice 4. 1. La formule de Moivre donne la relation
$$\cos(4x) + i\sin(4x) = e^{4ix} = (\cos(x) + i\sin(x))^4,$$
pour tout nombre réel x. Mais par la formule du binôme et le triangle de Pascal on a l'identité remarquable
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$
On a donc
$$\cos(4x) + i\sin(4x) = \cos(x)^4 + 4\cos(x)^3\sin(x)i - 6\cos(x)^2\sin(x)^2 - 4\cos(x)\sin(x)^3 i + \sin(x)^4.$$
En prenant les parties réelles et imaginaires, cela donne
$$\begin{cases} \cos(4x) = \cos(x)^4 - 6\cos(x)^2\sin(x)^2 + \sin(x)^4; \\ \sin(4x) = 4\cos(x)^3\sin(x) - 4\cos(x)\sin(x)^3, \end{cases}$$
pour tout nombre réel x.

2. En utilisant la relation $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$, valide pour tout $x \in \mathbf{R}$, on en déduit que
$$\cos(4x) = \cos(x)^4 - 6\cos(x)^2(1-\cos(x)^2) + (1-\cos(x)^2)^2 = 1 - 8\cos(x)^2 + 8\cos(x)^4.$$

Exercice 5. Traçons la figure correspondant aux points donnés



1. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(2,2)$, celles de $\overrightarrow{AC}$ sont $(4,-4)$. Le produit scalaire de ces deux vecteurs vaut
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times 4 + 2 \times (-4) = 0.$$
Ces deux vecteurs sont donc orthogonaux.
2. Les distances sont données par
$$AB = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$
$$AC = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$
En appliquant le théorème de Pythagore, on en déduit que
$$BC = \sqrt{8 + 32} = 2\sqrt{10}.$$

3. Les coordonnées des milieux sont données par
$$I = (\frac{1}{2}(-1+1), \frac{1}{2}(1+3)) = (0,2), \quad J = (2,0) \quad \text{et} \quad K = (-1,1).$$
4. Rappelons que l'équation implicite d'une droite passant par des points distincts A de coordonnées (x_A, y_A) et J de coordonnées (x_J, y_J) est donnée par
$$(y_J - y_A)(x - x_A) - (x_J - x_A)(y - y_A) = 0.$$
La droite (AJ) admet donc l'équation
$$(0-1)(x-(-1)) - (2-(-1))(y-1) = 0$$

qui équivaut à

$$x + 3y = 2.$$

La droite (BK) a pour équation

$$4(x - 1) + 0(y - 3) = 0$$

ou encore $x = 1$. La droite (CI) a pour équation

$$5(x - 3) + 3(y + 3) = 0$$

soit $5x + 3y = 6$.

5. Il nous faut résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} x + 3y & = 2 \\ x & = 1 \end{cases}$$

ce qui nous donne $x = 1$ et $y = \frac{1}{3}$. Le point G a donc les coordonnées $(1, \frac{1}{3})$. Comme $5 \times 1 + 3 \times \frac{1}{3} = 6$, le point G appartient également à la droite (CI).

6. Le vecteur $\overrightarrow{GA}$ a les coordonnées $(-2, \frac{2}{3})$, le vecteur $\overrightarrow{GB}$ les coordonnées $(0, \frac{8}{3})$ et le vecteur $\overrightarrow{GC}$ les coordonnées $(2, -\frac{10}{3})$. En faisant la somme, on obtient que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$ a pour coordonnées $(0, 0)$. C'est donc le vecteur nul.

Énoncé partiel 2017

Pour les exercices 2 à 3 et le problème, justifiez succinctement chaque réponse donnée.
Dans cet énoncé, $\mathbf{N}$ *désigne l'ensemble des entiers positifs ou nuls,* $\mathbf{R}$ *l'ensemble des nombres réels et* $\mathbf{R}_+^*$ *l'ensemble des nombres réels strictement positifs.*

Question de cours. Donner la définition de la surjectivité pour une application.

Exercice 1. Soient P, Q et R des assertions. À l'aide d'une table de vérité à huit lignes, montrer que l'implication

$$\big((P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow R)\big) \Longrightarrow (P \Longrightarrow R)$$

est une tautologie (c'est-à-dire toujours vraie).

Exercice 2. Soient A et B des parties d'un ensemble E. On rappelle que $E - B$ désigne le complémentaire de B dans E.

1. Représenter $A \cap (E - B)$ à l'aide d'un diagramme de Venn.
2. Démontrer l'équivalence

$$A \cap (E - B) = \emptyset \Longleftrightarrow A \subset B.$$

Exercice 3. Démontrer l'assertion suivante

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} (4k+1) = (2n+1)(n+1)$$

(on pourra faire une preuve par récurrence).

Problème. On note exp l'application exponentielle et ln le logarithme népérien. On rappelle que $\exp(\ln(x)) = x$ pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$ et que $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ pour tous $x, y \in \mathbf{R}$. Pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, on note $\sqrt[3]{x} = \exp\big(\frac{1}{3}\ln(x)\big)$. On pose également $\sqrt[3]{0} = 0$ et pour un nombre réel strictement négatif x, $\sqrt[3]{x} = -\sqrt[3]{-x}$.

On note f l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ donnée par $f(t) = t^3$ pour $t \in \mathbf{R}$.

1. (a) Avec les notations qui précèdent, calculer, pour $x \in \mathbf{R}$, $(\sqrt[3]{x})^3$ (on pourra faire une disjonction de cas).
   (b) Démontrer que f est surjective.
2. (a) Démontrer que f est strictement croissante.
   (b) Démontrer que f est bijective.
3. (a) Démontrer que l'application réciproque f^{-1} est strictement croissante.
   (b) Soient $x, y \in \mathbf{R}$. Exprimer $\sqrt[3]{xy}$ en termes de $\sqrt[3]{x}$ et de $\sqrt[3]{y}$.

4. (a) Soient u et v des nombres réels. Écrire la différence $u^3 - v^3$ comme le produit de deux termes.

   (b) Soient x et y des nombres réels strictement positifs. Démontrer la formule :
$$\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = \frac{x-y}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}}.$$

5. Soit $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$ un nombre réel strictement positif. Démontrer qu'il existe un nombre réel $C_\alpha > 0$ dépendant uniquement de α tel que
$$\forall x, y \in]\alpha, +\infty[, \quad |\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}| \leqslant C_\alpha |x-y|$$
(on pourra utiliser la question précédente).

6. En utilisant le fait que $\pi > 1$, combien de décimales de π suffit-il de connaître pour calculer $\sqrt[3]{\pi}$ avec une erreur $< 10^{-5}$?

7. Soit $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$. Démontrer, en utilisant la définition de la limite, que la restriction de f^{-1} à $]\alpha, +\infty[$ est continue.

8. Démontrer que, pour tout $a \in \mathbf{R}_+^*$, l'application f^{-1} admet une limite en a.

9. (a) Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$, trouver $\eta \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $\sqrt[3]{\eta} \leqslant \varepsilon$.

   (b) Démontrer que f^{-1} admet une limite en 0.

10. Existe-t-il une constante $C \in \mathbf{R}$ telle que
$$\forall x, y \in \mathbf{R}, \quad |\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}| \leqslant C|x-y| ?$$

11. L'application f^{-1} est-elle continue ?

Corrigé partiel 2017

Question de cours. Soient E et F des ensembles, une application $f : E \to F$ est surjective si

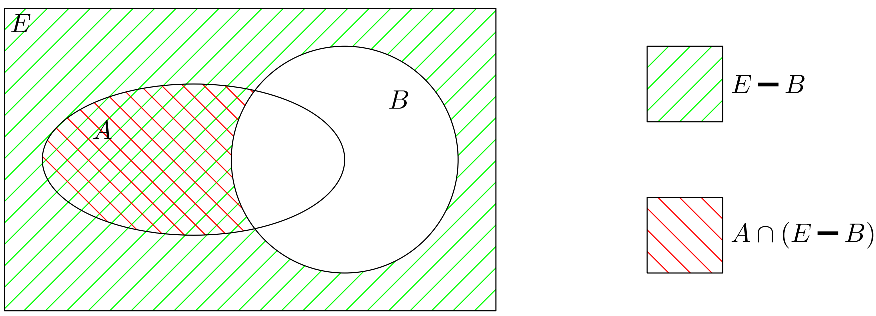
$$\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ y = f(x).$$

Exercice 1.

P	Q	R	$P\Rightarrow Q$	$Q\Rightarrow R$	$(P\Rightarrow Q)\wedge(Q\Rightarrow R)$	$P\Rightarrow R$	$((P\Rightarrow Q)\wedge(Q\Rightarrow R))\Rightarrow(P\Rightarrow R)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Donc l'assertion $\big((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)\big) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$ est une tautologie.

Exercice 2. 1.



2. Supposons que $A \cap (E - B) = \emptyset$. Soit $x \in A$. Si $x \in E - B$, alors $x \in A \cap (E - B)$ ce qui contredit l'hypothèse faite sur cette intersection. Donc $x \notin E - B$ et donc $x \in B$. On a prouvé l'inclusion $A \subset B$.

   Réciproquement, supposons que $A \subset B$. Alors

$$\forall x \in A, \quad x \in B.$$

   Donc

$$\forall x \in A, \quad x \notin E - B.$$

   Cela prouve que l'intersection $A \cap (E - B)$ est vide.

Exercice 3. *Première solution :*

$$\sum_{k=0}^{n}(4k+1) = 4\Big(\sum_{k=0}^{n} k\Big) + n + 1 = 4\frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = 2n(n+1) + n + 1 = (2n+1)(n+1),$$

où la deuxième inégalité résulte d'une formule du cours.

Deuxième solution : On démontre la formule par récurrence sur n :

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $\sum_{k=0}^{0}(4k+1) = (4\times 0+1) = 1 = (2\times 0+1)(0+1)$. La formule est donc vraie dans ce cas.

Hérédité : On suppose la formule vérifiée pour n, on a alors

$$\sum_{k=0}^{n+1}(4k+1) = \Big(\sum_{k=0}^{n}(4k+1)\Big) + 4(n+1) + 1 = (2n+1)(n+1) + 4(n+1) + 1 = 2n^2 + 7n + 6.$$

Or $(2n+3)(n+2) = 2n^2 + 7n + 6$. La formule est donc vraie pour $n+1$.

Par récurrence, on obtient

$$\forall n \in \mathbf{N},\quad \sum_{k=0}^{n}(4k+1) = (2n+1)(n+1).$$

Problème.

1. (a) Si $x > 0$, alors $(\sqrt[3]{x})^3 = \exp(\frac{1}{3}\ln(x))^3 = \exp(3\times\frac{1}{3}\ln(x)) = x$. Pour $x = 0$, $(\sqrt[3]{0})^3 = 0^3 = 0$. Enfin si $x < 0$, alors $-x > 0$ et $(\sqrt[3]{x})^3 = (-\sqrt[3]{-x})^3 = -(-x) = x$. On obtient donc
$$\forall x \in \mathbf{R},\quad (\sqrt[3]{x})^3 = x.$$
   (b) Tout nombre réel x admet un antécédent par f, à savoir $\sqrt[3]{x}$, donc f est surjective.

2. (a) Soient $x, y \in \mathbf{R}$ tels que $x < y$. Considérons la formule
$$y^3 - x^3 = (y-x)((x+\frac{1}{2}y)^2 + \frac{3}{4}y^2).$$
Comme y et x ne sont pas tous les deux nuls, il en de même de $x + \frac{1}{2}y$ et y. Donc les deux termes du produit sont strictement positifs. Donc $x^3 < y^3$.
   (b) Soient $x, y \in \mathbf{R}$ tels que $x \neq y$. On a alors $x < y$ ou $y < x$ D'après (a), dans les deux cas, $f(x) \neq f(y)$. Donc f est injective. D'après la question 1.(b), elle est surjective. Elle est donc bijective.

3. (a) Soient $x, y \in \mathbf{R}$ tels que $x < y$. Raisonnons par l'absurde : si $f^{-1}(y) \leqslant f^{-1}(x)$, par la question 2.(a), $y = f(f^{-1}(y)) \leqslant f(f^{-1}(x)) = x$, ce qui contredit l'hypothèse faite sur x et y. Donc $f^{-1}(y) > f^{-1}(x)$, ce qui prouve que f^{-1} est strictement croissante.

(b) On a les égalités :

$$f(\sqrt[3]{xy}) = xy = (\sqrt[3]{x})^3(\sqrt[3]{y})^3 = (\sqrt[3]{x}\,\sqrt[3]{y})^3 = f(\sqrt[3]{x}\,\sqrt[3]{y}).$$

Comme f est injective, cela prouve que

$$\sqrt[3]{xy} = \sqrt[3]{x}\,\sqrt[3]{y},$$

pour tous $x, y \in \mathbf{R}$.

4. (a)

$$u^3 - v^3 = (u-v)(u^2 + uv + v^2)$$

pour tous $u, v \in \mathbf{R}$.

(b) En appliquant (a) à $\sqrt[3]{x}$ et $\sqrt[3]{y}$, on obtient

$$x - y = (\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x}^2 + \sqrt[3]{x}\,\sqrt[3]{y} + + \sqrt[3]{y}^2)$$

La formule demandée s'obtient alors en appliquant 3.(b).

5. On pose $C_\alpha = \frac{1}{3\sqrt[3]{\alpha^2}}$. Comme f^{-1} est croissante, pour $x, y \in]\alpha, +\infty[$, on a

$$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2} > 3\sqrt[3]{\alpha^2}$$

Par la question 4.(b), il en résulte que

$$|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}| \leqslant C_\alpha |x-y|.$$

6. Pour $x > 1$, on déduit de la question précédente que

$$|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{\pi}| \leqslant \frac{1}{3}|x - \pi|$$

Il suffit donc de connaître 5 décimales de π.

7. Soit $a \in]\alpha, +\infty[$. Démontrons que $f^{-1}(x)$ tend vers $f^{-1}(a)$ quand x tend vers a. Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$. On pose $\eta = \min\left(|a-\alpha|, \frac{\varepsilon}{C_\alpha}\right)$. Soit $x \in \mathbf{R}$ tel que $|x-a| < \eta$. Alors $x > \alpha$. On peut donc appliquer la question précédente, qui nous donne

$$|f^{-1}(x) - f^{-1}(a)| \leqslant C_\alpha |x-a| < C_\alpha \eta \leqslant C_\alpha \frac{\varepsilon}{C_\alpha} = \varepsilon.$$

Donc

$$f^{-1}(x) \xrightarrow[x \to a]{} f^{-1}(a),$$

et la restriction de f^{-1} à $]\alpha, +\infty[$ est continue.

8. Soit $a \in \mathbf{R}_+^*$. Posons $\alpha = \frac{a}{2}$. Par la question précédente,
$$f^{-1}(x) \xrightarrow[x \to a]{} f^{-1}(a).$$

9. (a) Il suffit de prendre $\eta = \varepsilon^3$.

   (b) Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$. Posons $\eta = \varepsilon^3$ Pour $x \in \mathbf{R}$ tel que $|x - 0| < \eta$, on a, d'après la question 3.(a),
$$|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{0}| = |\sqrt[3]{x}| = \sqrt[3]{|x|} < \sqrt[3]{\eta} = \varepsilon.$$
   Donc
$$f^{-1}(x) \xrightarrow[x \to 0]{} f^{-1}(0).$$

10. Raisonnons par l'absurde en supposant qu'un tel C existe. Il est forcément positif. Posons $y = 0$ et $x = \frac{1}{(C+1)^3}$. Alors
$$|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}| = \frac{1}{C+1} \leqslant C|x - y| = \frac{C}{(C+1)^3}.$$
    On obtient $C + 1 \leqslant (C+1)^2 \leqslant C$ et donc $1 \leqslant 0$, ce qui est absurde.

11. Si $a < 0$, en utilisant la question 8, la formule $f^{-1}(x) = -f^{-1}(-x)$ et le théorème sur la limite de fonctions composées, on obtient que
$$f^{-1}(x) \xrightarrow[x \to a]{} f^{-1}(a).$$
    Par les questions 8 et 9.(b), cela vaut également pour $a \geqslant 0$, donc f^{-1} est continue.

Énoncé première session 2017

Pour les exercices 1 à 5, justifiez succinctement chaque réponse donnée.

Dans cet énoncé, $\mathbf{N}$ *désigne l'ensemble des entiers positifs ou nuls,* $\mathbf{R}$ *l'ensemble des nombres réels et* $\mathbf{R}_+$ *l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls.*

Question de cours. Soient E et F des ensembles et soit f une application de E dans F. Soit A une partie de E et B une partie de F. Donner la définition de l'image de A par f et de l'image réciproque de B par f.

Exercice 1. Soient E, F et G des ensembles et soient f une application de E dans F et g une application de F dans G.

1. On suppose que $g \circ f$ est injective. Démontrer que f est injective.
2. On suppose que $g \circ f$ est surjective. Démontrer que g est surjective.

Exercice 2. Démontrer, pour tout $n \in \mathbf{N}$, la formule suivante

$$\sum_{k=0}^{n} k5^k = \frac{4n-1}{16}5^{n+1} + \frac{5}{16}.$$

(On pourra raisonner par récurrence.)

Exercice 3. L'objectif de cet exercice est de démontrer la continuité de l'application sinus, c'est-à-dire de l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ donnée par $x \mapsto \sin(x)$. On pourra utiliser sans démonstration l'assertion suivante :

$$\forall x \in \mathbf{R}_+, \quad \sin(x) \leqslant x.$$

1. Démontrer l'assertion suivante :
$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad |\sin(x)| \leqslant |x|.$$
(On pourra distinguer les cas $x > 1$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $x < 0$).
2. En déduire que la fonction sinus admet une limite en 0.
3. (a) Pour $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, exprimer $\cos(x)$ en termes de $\sin(x)$.
   (b) Déduire des deux questions précédentes que la fonction cosinus admet une limite en 0 et donner sa valeur.
4. (a) En utilisant l'exponentielle complexe, retrouver l'expression de $\sin(\theta + \theta')$ en termes des cosinus et sinus de θ et de θ'.
   (b) À l'aide de la formule précédente, démontrer que la fonction sinus est continue.

Exercice 4. 1. Calculer les racines carrées du nombre complexe $-3-4i$.

2. Résoudre dans $\mathbf{C}$ l'équation

$$z^2 - 3z + 3 + i = 0.$$

Exercice 5. Dans cet exercice, on se place dans un espace affine euclidien de dimension 3 muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Toutes les coordonnées de l'exercice sont relatives à ce repère. On note A le point de coordonnées $(1, 1, 1)$, B celui de coordonnées $(3, 2, 1)$, C celui de coordonnées $(1, 1, 3)$ et D le point de coordonnées $(-1, 0, 3)$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Calculer les coordonnées du produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. Les points A, B et C sont-ils alignés ?
3. Calculer la distance du point C à la droite affine (AB).
4. Donner une équation implicite d'un plan affine $\mathscr{P}$ contenant les trois points A, B et C. Le point D appartient-il à $\mathscr{P}$?
5. Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DB} \wedge \overrightarrow{DC}$?
6. Soit $\mathscr{D}$ la droite affine donnée par le système d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 4 + 2\lambda \\ z = 1 - \lambda. \end{cases}$$

   Déterminer l'intersection de la droite $\mathscr{D}$ avec le plan $\mathscr{P}$.

Corrigé première session 2017

Question de cours. L'image de A par f est

$$f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A,\ y = f(x)\} = \{f(x),\ x \in A\}.$$

L'image réciproque de B par f est

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

Exercice 1.

1. Supposons $g \circ f$ injective, c'est-à-dire

$$\forall x, y \in E, \quad g \circ f(x) = g \circ f(y) \Rightarrow x = y.$$

Soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$. Alors on a l'égalité $g(f(x)) = g(f(y))$, c'est-à-dire $g \circ f(x) = g \circ f(y)$. Par hypothèse, cela implique $x = y$. Donc f est injective.

2. Supposons maintenant que $g \circ f$ est surjective, c'est-à-dire

$$\forall z \in G, \exists x \in E, \quad z = g \circ f(x).$$

Soit $z \in G$. Par hypothèse, il existe $x \in E$ tel que $z = g \circ f(x) = g(f(x))$. Posons $y = f(x)$ Alors $y \in F$ et $z = g(y)$. Donc g est surjective.

Exercice 2. Démontrons par récurrence sur n la validité pour $n \in \mathbf{N}$ de l'assertion

$$P(n): \qquad \sum_{k=0}^{n} k5^k = \frac{4n-1}{16}5^{n+1} + \frac{5}{16}.$$

Initialisation Pour $n = 0$, on a

$$\sum_{k=0}^{0} k5^k = 0 \times 5^0 = 0 = -\frac{5}{16} + \frac{5}{16} = \frac{4 \times 0 - 1}{16}5^{0+1} + \frac{5}{16}$$

ce qui démontre $P(0)$.
Hérédité Supposons $P(n)$. Alors

$$\sum_{k=0}^{n+1} k5^k = \left(\sum_{k=0}^{n} k5^k\right) + (n+1)5^{n+1}.$$

Par hypothèse de récurrence, cela est égal à

$$\begin{aligned}\frac{4n-1}{16}5^{n+1} + \frac{5}{16} + (n+1)5^{n+1} &= \frac{4n-1+16n+16}{16}5^{n+1} + \frac{5}{16}\\ &= \frac{20n+15}{16}5^{n+1} + \frac{5}{16} = \frac{4(n+1)-1}{16}5^{n+2} + \frac{5}{16}.\end{aligned}$$

Ce qui prouve P(n+1). Par récurrence on obtient que $P(n)$ vaut pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Exercice 3. 1. Si $x \in [0, 1]$, alors $0 \leqslant x \leqslant \pi$, donc $0 \leqslant \sin(x)$ Par conséquent l'inégalité $\sin(x) \leqslant x$ équivaut dans ce cas à l'inégalité $|\sin(x)| \leqslant |x|$.

Si $x \geqslant 1$ alors comme $\sin(x) \in [-1, 1]$, on a les inégalités $|\sin(x)| \leqslant 1 \leqslant |x|$.

Enfin, si $x \leqslant 0$, alors $-x \geqslant 0$ et les cas précédents donnent

$$|\sin(x)| = |-\sin(-x)| = |\sin(-x)| \leqslant |-x| = |x|.$$

Donc dans tous les cas, $|\sin(x)| \leqslant |x|$ ce qui prouve l'assertion demandée.

2. Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$. Posons $\eta = \varepsilon$, alors $\eta \in \mathbf{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$ tel que $|x - 0| < \eta$ on a, par la question 1, les inégalités

$$|\sin(x) - 0| \leqslant |x| < \eta = \varepsilon.$$

Donc la fonction sinus admet la limite $\sin(0) = 0$ en 0.

3. (a) Si $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, alors $\cos(x) \geqslant 0$. Par conséquent

$$\cos(x) = \sqrt{\cos(x)^2} = \sqrt{1 - \sin(x)^2}.$$

(b) L'application $x \mapsto 1 - x^2$ est polynomiale et donc continue. L'application $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue. Donc, par le théorème sur la limite d'applications composées et la question 2, $\cos(x)$ tend vers 1 lorsque x tend vers 0.

4. (a) La relation $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}$ s'écrit

$$\begin{aligned}
&\cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta') \\
&= (\cos(\theta) + i\sin(\theta))(\cos(\theta') + i\sin(\theta')) \\
&= (\cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta')) + i(\cos(\theta)\sin(\theta') + \sin(\theta)\cos(\theta'))
\end{aligned}$$

ce qui fournit, en considérant la partie imaginaire, l'égalité

$$\sin(\theta + \theta') = \cos(\theta)\sin(\theta') + \sin(\theta)\cos(\theta').$$

(b) Soit $a \in \mathbf{R}$. Par la question précédente, si $t \in \mathbf{R}$,

$$\sin(t) = \sin(a)\cos(t - a) + \cos(a)\sin(t - a).$$

Par la question 2, $\sin(t - a)$ tend vers 0 lorsque t tend vers a et par la question 3.(b), $\cos(t - a)$ tend vers 1 lorsque t tend vers a. Donc $\sin(t)$ tend vers $\sin(a)$ lorsque t tend vers a. Comme cela vaut pour tout $a \in \mathbf{R}$, l'application sinus est continue.

Exercice 4. 1. Le module de $-3-4i$ est donné par

$$|-3-4i| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

Donc si $x+iy$ est une racine carrée de $-3-4i$, alors les nombres réels x et y vérifient les conditions

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 5 \\ x^2-y^2 = -3 \\ xy < 0 \end{cases}$$

Ce qui équivaut à

$$\begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 4 \\ xy < 0 \end{cases}$$

Donc $(x,y) = (1,-2)$ ou $(x,y) = (-1,2)$. Les racines carrées de $-3-4i$ sont donc $1-2i$ et $-1+2i$.

2. Calculons le discriminant pour l'équation $z^2-3z+3+i = 0$. Il vaut

$$\Delta = 9-4(3+i) = -3-4i.$$

Donc les solutions de l'équation sont

$$z_1 = \frac{3-(-1+2i)}{2} = 2-i \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{3+(-1+2i)}{2} = 1+i$$

Exercice 5. 1. Les vecteurs ont pour coordonnées :

$$\overrightarrow{AB} : (3-1, 2-1, 1-1) = (2,1,0) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC} : (1-1, 1-1, 3-1) = (0,0,2).$$

2. On calcule les coordonnées du produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$:

$$(1\times 2-0\times 0, 0\times 0-2\times 2, 2\times 0-1\times 0) = (2,-4,0).$$

Comme $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq 0$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires ; les points A, B et C ne sont donc pas alignés.

3.

$$d(C,(AB)) = \frac{||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}||}{||\overrightarrow{AB}||} = \frac{\sqrt{4+16}}{\sqrt{4+1}} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = 2.$$

4. Le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est orthogonal au plan $\mathscr{P}$. Celui-ci admet donc une équation de la forme
$$2x - 4y + d = 0.$$
Comme A appartient à ce plan, on a $2 - 4 + d = 0$ et donc $d = 2$. Une équation implicite de $\mathscr{P}$ est donc $2x - 4y + 2 = 0$ ou encore $x - 2y + 1 = 0$. Comme $-1 - 2 \times 0 + 1 = 0$, le point D appartient au plan $\mathscr{P}$.
5. Comme les points A, B, C et D appartiennent au plan $\mathscr{P}$, les vecteurs $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DB} \wedge \overrightarrow{DC}$ sont tous les deux orthogonaux à ce plan. Ils sont donc colinéaires. En calculant les coordonnées de $\overrightarrow{DB} \wedge \overrightarrow{DC}$, on constate qu'il sont en fait égaux.
6. En remplaçant dans l'équation implicite de $\mathscr{P}$ les coordonnées données par les équations paramétriques de $\mathscr{D}$, on obtient l'équation
$$(1 + \lambda) - 2(4 + 2\lambda) + 1 = 0$$
Soit $\lambda = -2$. L'unique point d'intersection de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{P}$ a donc pour coordonnées
$$(1 - 2, 4 - 4, 1 - (-2)) = (-1, 0, 3),$$
c'est donc le point D.

Énoncé deuxième session 2017

Pour les exercices 1 à 5, justifiez succinctement chaque réponse donnée.

Dans cet énoncé, $\mathbf{N}$ *désigne l'ensemble des entiers positifs ou nuls,* $\mathbf{R}$ *l'ensemble des nombres réels et* $\mathbf{Z}$ *l'ensemble des nombres entiers relatifs. Si A et B sont des ensembles, on note $A - B$ l'ensemble*

$$A - B = \{a \in A \mid a \notin B\}.$$

Question de cours. Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel et soit $n \in \mathbf{N}$. On note $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$ des vecteurs de E. Donner la définition pour la famille $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ d'être une famille libre.

Exercice 1. On rappelle que, pour des entiers $m, n \in \mathbf{N}$, on dit que m divise n et on note $m \mid n$ si et seulement s'il existe un entier $k \in \mathbf{N}$ tel que $n = km$. On considère l'ensemble

$$\mathscr{P} = \{n \in \mathbf{N} - \{1\} \mid \forall m \in \mathbf{N},\ m \mid n \Rightarrow (m = 1 \text{ ou } m = n)\}.$$

1. Démontrer que si $n \in \mathbf{N} - \{0\}$ et si l'entier $m \in \mathbf{N}$ divise n alors $1 \leqslant m \leqslant n$.
2. (a) Donner la liste des éléments de l'ensemble $\{m \in \mathbf{N} \mid\ m \mid 2\}$.
   (b) L'entier 2 appartient-il à $\mathscr{P}$?
   (c) L'entier 3 appartient-il à $\mathscr{P}$?
   (d) L'entier 6 appartient-il à $\mathscr{P}$?
3. (a) Soit $p \in \mathscr{P}$. Quel est le cardinal de l'ensemble $\{m \in \mathbf{N} \mid\ m \mid p\}$?
   (b) Soit $p \in \mathbf{N}$. On suppose que le cardinal de l'ensemble $\{m \in \mathbf{N} \mid\ m \mid p\}$ vaut 2. Que peut-on dire de l'appartenance de p à $\mathscr{P}$?
4. Soit n un entier pair tel que $n \geqslant 3$. Que peut-on dire de l'appartenance de n à $\mathscr{P}$?
5. Supposons que l'ensemble $\mathscr{P}$ est fini. On note $p_1, \ldots, p_s$ les éléments de $\mathscr{P}$ et on pose

$$N = 1 + \prod_{i=1}^{s} p_i.$$

   (a) Démontrer que $N \geqslant 7$.
   (b) Démontrer que l'ensemble $\mathscr{D}_N = \{m \in \mathbf{N} - \{1\} \mid\ m \mid N\}$ n'est pas vide.
   (c) Soit d le plus petit élément de $\mathscr{D}_N$. Démontrer que $d \in \mathscr{P}$.
   (d) En déduire que $d \mid N$ et $d \mid N - 1$, puis que $d \mid 1$.
   (e) Conclure sur la finitude de $\mathscr{P}$.
6. Comment appelle-t-on les éléments de $\mathscr{P}$?

Exercice 2. On considère l'application $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = 1, \\ \cos(\frac{1}{x-1}) \text{ si } x \neq 1. \end{cases}$$

On rappelle que

$$\{\, t \in \mathbf{R} \mid \cos(t) = 0 \,\} = \{\, \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z} \}$$

et que

$$\{\, t \in \mathbf{R} \mid \cos(t) = 1 \,\} = \{\, 2k\pi, k \in \mathbf{Z} \}$$

1. Déterminer l'ensemble A des solutions de l'équation $f(x) = 0$.
2. Déterminer l'ensemble B des solutions de l'équation $f(x) = 1$.
3. (a) Le nombre 1 est-il adhérent à A ?
   (b) Le nombre 1 est-il adhérent à B ?
4. Démontrer en utilisant les questions précédentes que l'application f n'admet pas de limite en 1.

Exercice 3. Soient a, b et c des nombres réels. Soit n un entier strictement positif. Démontrer la formule

$$(a+b+c)^n = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{k} \frac{n!}{l!(k-l)!(n-k)!} a^l b^{k-l} c^{n-k}.$$

(On pourra utiliser une des formules du cours.)

Exercice 4. En utilisant l'exponentielle complexe, linéariser l'expression $(\cos(x))^5$. (On rappelle que *linéariser* signifie récrire l'expression comme somme de termes de la forme $a\cos(kx)$ ou $a\sin(kx)$ avec $a \in \mathbf{R}$ et $k \in \mathbf{Z}$).

Exercice 5. Dans cet exercice, on fixe un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan euclidien. Toutes les coordonnées de l'exercice sont relatives à ce repère. On note A le point de coordonnées $(-1, 0)$, B celui de coordonnées $(2, 1)$, C celui de coordonnées $(0, 3)$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}$.
2. On rappelle que deux droites sont dites *perpendiculaires* si un vecteur directeur de la première est orthogonal à un vecteur directeur de la seconde. On note Δ_A la droite passant par A et perpendiculaire à la droite (BC). On définit aussi la droite Δ_B passant par B et perpendiculaire à (CA) et la droite Δ_C passant par C et perpendiculaire à (AB). Donner une équation implicite pour chacune des droites Δ_A, Δ_B et Δ_C.
3. Démontrer que les droites Δ_A et Δ_B sont sécantes en un point H dont on déterminera les coordonnées.

4. Le point H appartient-il à Δ_C ?

Corrigé deuxième session 2017

Question de cours . La famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$ est libre si et seulement si elle vérifie la condition

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{u}_i = 0 \Longrightarrow (\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0).$$

Exercice 1. 1. Si $n \in \mathbf{N} - \{0\}$ et $m \mid n$, alors il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $n = km$. Comme $n \neq 0$, on obtient que $k \neq 0$ et $m \neq 0$. Par conséquent, $k \geqslant 1$ et $m \geqslant 1$. Donc $m = \frac{n}{k} \leqslant n$. Donc on a les inégalités $1 \leqslant m \leqslant n$.

2. (a) Par la question 1, on a l'inclusion
$$\{ m \in \mathbf{N} \mid m \mid 2 \} \subset \{1, 2\}.$$
Or $2 = 1 \times 2 = 2 \times 1$. Donc $1 \mid 2$ et $2 \mid 2$ On a donc égalité :
$$\{ m \in \mathbf{N} \mid m \mid 2 \} = \{1, 2\}.$$
(b) Par la question précédente, on obtient l'assertion
$$\forall m \in \mathbf{N}, \quad m \mid 2 \Longrightarrow (m = 1 \text{ ou } m = 2).$$
Donc $2 \in \mathscr{P}$.
(c) Par la question 1,
$$\{ m \in \mathbf{N} \mid m \mid 3 \} \subset \{1, 2, 3\}.$$
Or si $2 \mid 3$, alors $2 \mid 3 - 2 = 1$. Comme $2 > 1$ cela contredit la question 1. Donc
$$\{ m \in \mathbf{N} \mid m \mid 2 \} = \{1, 3\}.$$
Comme dans la question (b), on en déduit que $3 \in \mathscr{P}$.
(d) On a la relation $6 = 2 \times 3$, donc $3 \mid 6$ et $6 \notin \mathscr{P}$.

3. (a) Par définition, si $p \in \mathscr{P}$, l'ensemble $\{ m \in \mathbf{N} \mid m \mid p \}$ est contenu dans $\{1, p\}$. Inversement $1 \mid p$ et $p \mid p$, il y a donc égalité entre ces ensembles. Comme $p \neq 1$, l'ensemble $\{1, p\}$ est bien de cardinal 2.
(b) Soit $p \in \mathbf{N}$ tel que l'ensemble $\{ m \in \mathbf{N} \mid m \mid p \}$ soit de cardinal 2. Si $p = 1$ alors $\{ m \in \mathbf{N} \mid m \mid p \} = \{1\}$, ce qui contredit l'hypothèse. Donc $p \neq 1$. Comme $1 \mid p$ et $p \mid p$, l'ensemble $\{1, p\}$, qui est de cardinal 2 puisque $p \neq 1$, est contenu dans $\{ m \in \mathbf{N} \mid m \mid p \}$. Par égalité des cardinaux, les deux ensembles sont égaux. Il en résulte que $p \in \mathscr{P}$.

4. L'hypothèse que n est pair signifie que $2 \mid n$. Comme $n \geqslant 3$, on a que $2 \neq n$. Donc $n \notin \mathscr{P}$.

5. (a) Comme $2 \in \mathscr{P}$ et $3 \in \mathscr{P}$ et que pour tout $i \in \{1, \dots, s\}$, on a que $p_i \geqslant 1$, on obtient que
$$\prod_{i=1}^{s} p_i \geqslant 6$$
et $N \geqslant 7$.

(b) Comme $N \mid N$ et $N \neq 1$, l'entier N appartient à $\mathscr{D}_N$ et cet ensemble n'est pas vide.

(c) Par définition, de $\mathscr{D}_N$, on a que $d \neq 1$. D'autre part si $m \mid d$ avec $m \neq 1$, il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $d = km$. Or $d|N$, il existe donc $l \in \mathbf{N}$ tel que $N = ld$ donc $N - kld$, ce qui prouve que $m \mid N$ donc $m \in \mathscr{D}_N$ et, par définition de d comme plus petit élément de $\mathscr{D}_N$, on a l'inégalité $m \geqslant d$. Par la question 1, comme $m \mid d$, $m \leqslant d$. Donc $m = d$. Cela prouve l'assertion
$$\forall m \in \mathbf{N}, \quad m \mid d \Longrightarrow (m = 1 \text{ ou } m = d).$$
Donc $d \in \mathscr{P}$.

(d) Comme $d \in \mathscr{P}$, il existe un entier $i_0 \in \{1, \dots, s\}$ tel que $p_{i_0} = d$. Donc on a l'égalité
$$N - 1 = d \times \left(\prod_{i=1}^{i_0 - 1} p_i \right) \times \left(\prod_{i = i_0 + 1}^{s} p_i \right).$$
Donc $d \mid N - 1$. Or $d \in \mathscr{D}_N$ donc $d \mid N$. Il en résulte que $d \mid N - (N-1) = 1$.

(e) Comme $d > 1$, la conclusion de la dernière question contredit la question 1. Donc l'ensemble $\mathscr{P}$ est infini.

6. L'ensemble $\mathscr{P}$ est l'ensemble de nombres premiers.

Exercice 2. 1. Notons tout d'abord que $f(1) = 0$ par définition, donc
$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow \left(x = 1 \text{ ou } \left(x \neq 1 \text{ et } \cos\left(\frac{1}{x-1}\right) = 0 \right) \right)$$
Mais on a les égalités d'ensemble
$$\left\{ x \in \mathbf{R} - \{1\} \,\middle|\, \cos\left(\frac{1}{x-1}\right) = 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbf{R} - \{1\} \,\middle|\, \exists k \in \mathbf{Z},\ \frac{1}{x-1} = \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$$
$$= \left\{ \frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi} + 1, k \in \mathbf{Z} \right\}.$$
Donc
$$A = \{1\} \cup \left\{ \frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi} + 1, k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

2. Pour l'ensemble B, on a les égalités :

$$\begin{aligned} B &= \left\{ x \in \mathbf{R} - \{1\} \,\middle|\, \cos\left(\frac{1}{x-1}\right) = 1 \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbf{R} - \{1\} \,\middle|\, \exists k \in \mathbf{Z},\ \frac{1}{x-1} = 2k\pi \right\} \\ &= \left\{ \frac{1}{2k\pi} + 1, k \in \mathbf{Z} - \{0\} \right\}. \end{aligned}$$

3. (a) Comme $1 \in A$, le nombre réel 1 est adhérent à l'ensemble A.

   (b) Soit I un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$ contenant 1. Il existe $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[\subset I$. Soit $k \in \mathbf{Z}$. Soit $k \in \mathbf{Z}$. On a les équivalences

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2k\pi} \in]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[&\Longleftrightarrow \left| \frac{1}{2k\pi} \right| < \varepsilon \\ &\Longleftrightarrow k > \frac{2\pi}{\varepsilon} \text{ ou } k < -\frac{2\pi}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

   Soit N un entier tel que $N > \frac{2\pi}{\varepsilon}$. Par les équivalences qui précèdent, $\frac{1}{2N\pi} + 1 \in B \cap I$. Donc 1 est adhérent à B.

4. On raisonne par l'absurde en supposant que l'application f admet le limite l en 1. Alors, comme 1 est adhérent à A, la fonction restreinte $f_{|A}$ admet la limite l en 1. Mais l'application $f_{|A}$ est l'application constante nulle. Donc

$$f_{|A}(x) \xrightarrow[x \to 1]{} 0.$$

   Par unicité de la limite, $l = 0$. En raisonnant de même avec la partie B, on obtient que $l = 1$ et donc $0 = 1$, ce qui est absurde. Donc l'application f n'admet pas de limite en 1.

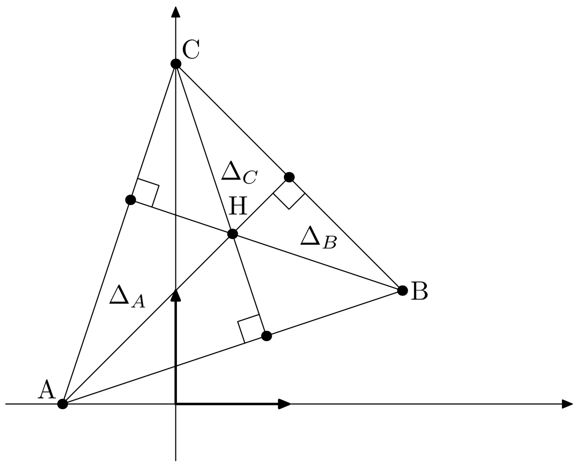
Exercice 3. On applique deux fois la formule du binôme de Newton qui nous donne les égalités

$$\begin{aligned} (a+b+c)^n = ((a+b)+c)^n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}(a+b)^k c^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \sum_{l=0}^{k} \frac{k!}{l!(k-l)!} a^l b^{k-l} c^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{k} \frac{n!}{l!(k-l)!(n-k)!} a^l b^{k-l} c^{n-k}. \end{aligned}$$

Exercice 4. En utilisant l'expression de $\cos(x)$ en termes de l'exponentielle complexe puis la formule du binôme de Newton, on obtient les égalités,

$$\begin{aligned}(\cos(x))^5 &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^5\\ &= \frac{1}{2^5}(e^{5ix}+5e^{3ix}+10e^{ix}+10e^{-ix}+5e^{-3ix}+e^{-5ix})\\ &= \frac{1}{16}\cos(5x)+\frac{5}{16}\cos(3x)+\frac{5}{8}\cos(x).\end{aligned}$$

Exercice 5. Les point considérés sont représentés sur la figure



1. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(2-(-1), 1-0) = (3, 0)$. De même, le vecteur $\overrightarrow{BC}$ a pour coordonnées $(-2, 2)$ et $\overrightarrow{CA}$ pour coordonnées $(-1, -3)$.
2. Un point M du plan appartient à la perpendiculaire à la droite (BC) passant par A si et seulement si
$$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AM} = 0,$$
ce qui nous donne pour Δ_A l'équation
$$-2(x+1)+2(y-0) = 0$$
c'est-à-dire
$$-2x+2y-2 = 0$$
qui équivaut à l'équation
$$x-y+1 = 0$$

Pour Δ_B on obtient

$$-(x-2)-3(y-1)=0$$

c'est-à-dire

$$x+3y-5=0.$$

Enfin, pour Δ_C cela donne

$$3(x-0)+(y-3)=0$$

soit

$$3x+y-3=0.$$

3. On doit résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} x-y+1 &= 0 \\ x+3y-5 &= 0 \end{cases}$$

qui équivaut à

$$\begin{cases} x-y+1 &= 0 \\ 4y &= 6 \end{cases}$$

ce qui donne $x=\frac{1}{2}$ et $y=\frac{3}{2}$. Donc les droites Δ_A et Δ_B sont sécantes en le point H de coordonnées $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$.

4. Comme $\frac{3}{2}+\frac{3}{2}-3=0$, le point H appartient également à Δ_C.

GLOSSAIRE

INDEX

V