Feuille d'exercices 10
La fonction exponentielle

1. Résoudre :

a) $\ln(\ln(\ln x)) > 0$ b) $6 + \ln x - \ln^2 x > 0$ c) $\ln(xy) = 7$ et $\ln \dfrac{x}{y} = 1$

2. Résoudre :

a) $\exp(x) = (\exp(a))^2$ b) $\exp\left(x^2\right) \leq \exp(1 - 2x)$ c) $\exp(3x) + \exp(-3x) \geq 3$

d) $e^{2x} - 3e^x + 2 \geq 0$ e) $e^x e^y = a^2$ et $xy = 1$ f) $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = -\dfrac{1}{3}$

3. Déterminer l'ensemble de définition et calculer la dérivée des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \sqrt{1 + e^x}$ b) $f(x) = \exp\left(-x^2 + 3x\right)$ $f(x) = \exp\left(\dfrac{1}{x}\right)$

d) $f(x) = 2^x$ e) $f(x) = \exp(\exp(x))$ f) $f(x) = (2 - \cos x)^{\sin x}$

4. Calculer les limites des fonctions suivantes en $+\infty$ et $-\infty$:

a) $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2 - x - 3}$ b) $f'x) = e^x - x^3 + 7x$ c) $f(x) = x^2 \exp\left(-\sqrt[3]{x}\right)$

d) $f(x) = e^{2x} - 3e^{(x^2)} + 5x$ e) $f(x) = \exp\left(\dfrac{x+1}{2x-3}\right)$ f) $f(x) = x \exp\left(\dfrac{1}{x}\right)$

g) $f(x) = x\left(\exp\left(\dfrac{1}{x}\right) - 1\right)$ h) $f(x) = x - \ln(1 + e^x)$ i) $f(x) = \dfrac{2e^{3x} + \sin x - x}{x^5 - 3e^{2x}}$

5. Calculer les limites des fonctions suivantes en 0 :

a) $f(x) = \dfrac{e^{2x} - \sqrt[5]{1+x}}{\tan 7x}$ b) $f(x) = \dfrac{e^{3x} - e^{-x} + x^5}{\sin x}$ c) $f(x) = \dfrac{1}{x} \exp\left(-\dfrac{1}{|x|}\right)$

d) $f(x) = x \exp\left(\dfrac{1}{x}\right)$ e) $f(x) = \dfrac{\exp\left(x^2 \ln |x|\right) - 1}{x}$

6. Calculer les limites des fonctions suivantes aux points indiqués :

a) $f(x) = \left(1 + \dfrac{a}{x}\right)^x$ en $+\infty$, $-\infty$, 0^+. b) $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{(x^2)}$ en $+\infty$, $-\infty$, 0^+.

c) $f(x) = x^{\left(\frac{1}{\ln(\ln x)}\right)}$ en $+\infty$. d) $f(x) = \left(x^3\right)^{\sqrt{x}}$ en 0^+.

7. Etudier les fonctions suivantes (ensemble de définition, limites aux extrémités de l'ensemble de définition, prolongement par continuité, asymptotes, branches paraboliques, dérivabilité, monotonie, concavité, convexité, graphe) :

a) $f(x) = \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$ b) $f(x) = xe^{-x}$ c) $f(x) = \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right)$

8. Déterminer (sur des intervalles que l'on précisera) toutes les solutions des équations différentielles suivantes, puis la solution vérifiant la condition initiale donnée :

a) $y'(x) = 2y(x), \ \ y(3) = 5.$

b) $y'(x) = \left(x^2 + x\right) y(x), \ \ y(1) = 1.$

c) $y'(x) = (\sin x)y(x), \ \ y(0) = 1.$

d) $y'(x) = \dfrac{1}{x} y(x)$

e) $y'(x) = -\dfrac{x}{x^2 - 1} y(x)$

9. Pour les équations différentielles suivantes, déterminer sur $\mathbb{R}$:

1. Les solutions de l'équation homogène associée.
2. Une solution particulière (que l'on pourra calculer directement).
3. L'ensemble des solutions.

a) $y'(x) = -y(x) + 1$

b) $y'(x) + 2y(x) = -1$

c) $y'(x) - 3y(x) = e^{2x}$

d) $y'(x) - 3y(x) = \sin x$

e) $y'(x) - 3y(x) = x^2 + 2x - 1$

f) $y'(x) - 3y(x) = 5e^{2x} - \sin x + 2x^2 + 4x - 2$

Exercice supplémentaire

10. On appelle sinus hyperbolique (sinh) et cosinus hyperbolique (cosh) les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

a) Etudier la parité des deux fonctions.
b) Montrer que $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
c) Calculer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ des deux fonctions.
d) Déterminer leurs dérivées. Dresser leurs tableaux de variations.
e) Etudier leur convexité, concavité.
f) Etudier leurs éventuelles asymptotes ou branches paraboliques.
g) Montrer qu'il existe une courbe $y = \varphi(x)$ asymptote à sinh et à cosh en $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} (\sinh x - \varphi(x)) = \lim_{x \to +\infty} (\cosh x - \varphi(x)) = 0$$

h) Tracer ensemble les graphes de sinh, cosh et φ.
i) Montrer que sinh est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle que l'on précisera.
Déterminer la fonction réciproque.
j) Montrer que cosh est une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle que l'on précisera.
Déterminer la fonction réciproque.