Chapitre 5 : Généralités sur les fonctions.

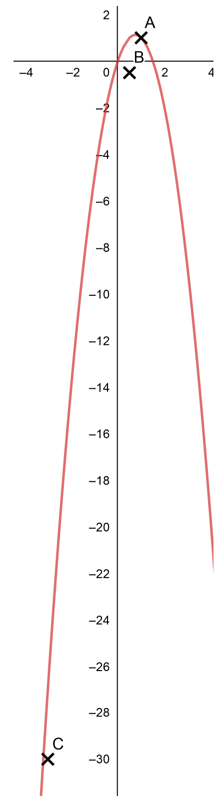
A Exploiter l'équation $y = f(x)$ d'une courbe représentative pour savoir si un point appartient à cette courbe.

Si on se donne une fonction f définie sur un ensemble $\mathcal{D}$, sa courbe représentative $\mathscr{C}$ est l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$, pour $x \in \mathcal{D}$. Si on considère le point M de coordonnées (a, b), on peut se demander s'il appartient ou non à $\mathscr{C}$:
- si $a \in \mathcal{D}$ et que $b = f(a)$: alors M est un point de $\mathscr{C}$ (c'est même l'unique point de $\mathscr{C}$ d'abscisse a) ;
- si $a \notin \mathcal{D}$ ou si $a \in \mathcal{D}$ mais que $b \neq f(a)$: alors M n'est pas sur $\mathscr{C}$. On peut même en dire un peu plus si $a \in \mathcal{D}$: si $b > f(a)$, alors M est au-dessus de $\mathscr{C}$; si $b < f(a)$, alors M est en-dessous de $\mathscr{C}$.

Cette méthode est rapide, mais possède l'inconvénient qu'il faut connaître une expression explicite de f pour pouvoir l'utiliser.

Exercice 35 p.201

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 3x$, de courbe $\mathscr{C}_f$.
1) La courbe $\mathscr{C}_f$ est la courbe d'équation $y = -2x^2 + 3x$.
2) Comme l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$ entier, on n'aura pas à se demander si l'abscisse d'un point de la courbe est ou non dans l'ensemble de définition pour savoir s'il appartient à $\mathscr{C}_f$:
a) $A(1; 1)$: comme $f(1) = -2 \times 1^2 + 3 \times 1 = -2 + 3 = 1$, alors $A \in \mathscr{C}_f$.
b) $B\left(\dfrac{1}{2}; -\dfrac{1}{2}\right)$: comme $f(1/2) = -2 \times (1/2)^2 + 3 \times 1/2 = -\dfrac{2}{4} + \dfrac{3}{2} = 1 \neq -\dfrac{1}{2}$, alors $B \notin \mathscr{C}_f$ (et même B est en dessous de $\mathscr{C}_f$).
c) $C(-3; -30)$: comme $f(-3) = -2 \times (-3)^2 + 3 \times (-3) = -18 - 9 = -27 \neq -30$, alors $C \notin \mathscr{C}_f$ (et même C est au-dessus de $\mathscr{C}_f$).
d) $D(-10^2; -170)$: comme $f(-10^2) = -2 \times (-10^2)^2 + 3 \times (-10^2) = -20000 - 300 = -20300 \neq -170$, alors $D \notin \mathscr{C}_f$ (et même D est en dessous de $\mathscr{C}_f$).
On donne ci-contre le tracé de $\mathscr{C}_f$ avec les points A, B et C (le point D étant un peu loin).



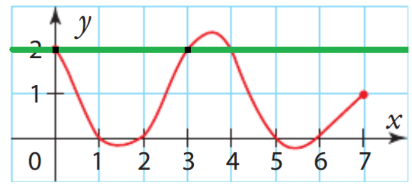
B Résoudre graphiquement des équations ou inéquation à l'aide de courbes représentatives.

La courbe représentative d'une fonction permet de visualiser certaines équations ou inéquations, et de les résoudre graphiquement. Le point le plus important est que l'on regarde certains points de la courbe de f, mais que ce sont seulement **les abscisses** de ces points qui nous intéressent. On a principalement deux situations :
- si on se donne f une fonction, et k un réel : on trace la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f, ainsi que la droite $\mathscr{D}$ horizontale passant par le point $(0, k)$, et :
  - les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et de $\mathscr{D}$ sont les solutions de l'équation "$f(x) = k$" ;
  - les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ en-dessous de $\mathscr{D}$ sont les solutions de l'inéquation "$f(x) < k$" ;
  - les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ au-dessus de $\mathscr{D}$ sont les solutions de l'inéquation "$f(x) > k$".
- si on se donne f et g deux fonctions : on trace les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ respectivement associées à f et g, et :
  - les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et de $\mathscr{C}_g$ sont les solutions de l'équation "$f(x) = g(x)$" ;

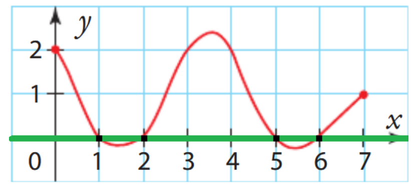
– les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ en-dessous de $\mathscr{C}_g$ sont les solutions de l'inéquation "$f(x) < g(x)$";
– les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ au-dessus de $\mathscr{D}_g$ sont les solutions de l'inéquation "$f(x) > g(x)$".

Exercice 38 p.201
Dans chaque cas, on trace (en vert) la droite horizontale permettant de résoudre l'équation considérée. Et on regarde les abscisses des points d'intersection (coloriés en noir) entre la droite verte et la courbe rouge.

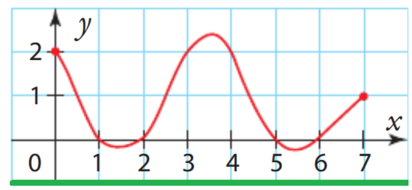
a) La courbe et la droite se coupent en les points de coordonnées $(0;2)$, $(3;2)$ et $(4;2)$. Donc l'équation $f(x) = 2$ admet pour ensemble solution : $\{0;3;4\}$.



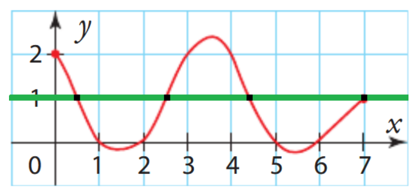
b) La courbe et la droite se coupent en les points de coordonnées $(1;0)$, $(2;0)$, $(5;0)$ et $(6;0)$. Donc l'équation $f(x) = 0$ admet pour ensemble solution : $\{1;2;5;6\}$.



c) La courbe et la droite ne se coupent pas. Donc l'équation $f(x) = -1$ n'admet pas de solution.

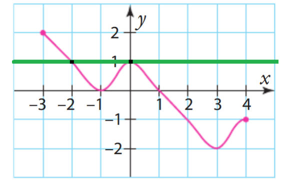


d) La courbe et la droite se coupent en les points de coordonnées $(1/2;1)$, $(5/2;1)$, $(9/2;1)$ et $(7;1)$. Donc l'équation $f(x) = 1$ admet pour ensemble solution : $\{1/2;5/2;9/2;7\}$.

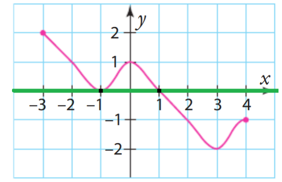


Exercice 40 p.201
Dans chaque cas, on trace (en vert) la droite horizontale permettant de résoudre l'équation ou l'inéquation considérée. Et on regarde les abscisses des points qui nous intéressent (coloriés en noir) :

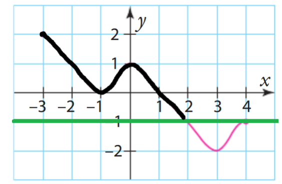
a) La courbe et la droite se coupent en les points de coordonnées $(-2;1)$ et $(0;1)$. Donc l'équation $k(x) = 1$ admet pour ensemble solution : $\{-2;0\}$.



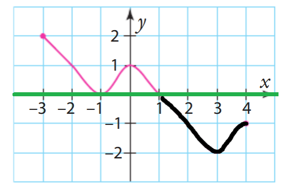
b) La courbe et la droite se coupent en les points de coordonnées $(-1; 0)$ et $(1; 0)$. Donc l'équation $k(x) = 0$ admet pour ensemble solution : $\{-1; 1\}$.



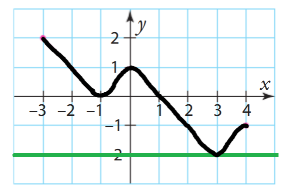
c) Les points de la courbe strictement au-dessus de la droite sont les points dont l'abscisse est dans $[-3; 2[$. Donc l'équation $k(x) > -1$ admet pour ensemble solution : $[-3; 2[$.



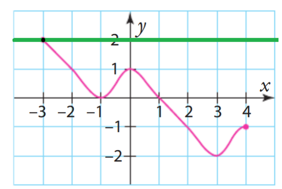
d) Les points de la courbe strictement en-dessous de la droite sont les points dont l'abscisse est dans $]1; 4]$. Donc l'équation $k(x) < 0$ admet pour ensemble solution : $]1; 4]$.



e) Les points de la courbe au-dessus de la droite sont les points dont l'abscisse est dans $[-3; 4]$ (ce sont tous les points de la courbe). Donc l'équation $k(x) \geq -2$ admet pour ensemble solution : $[-3; 4]$.

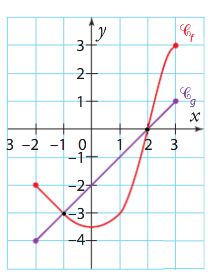


f) Il y a un seul point de la courbe en-dessous de la droite, à savoir le point $(-3; 2)$. Donc l'équation $k(x) \geq 2$ admet pour ensemble solution : $\{-3\}$.



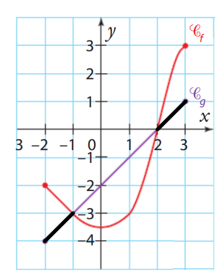
Exercice 42 p.201

Et on regarde les abscisses des points qui nous intéressent (coloriés en noir) :



a) On souhaite ici les abscisses des points qui sont à la fois sur $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$: ce sont les points $(-1; -3)$ et $(2, 0)$ (voir dessin de gauche). Donc l'équation $f(x) = g(x)$ admet pour ensemble solution : $\{-1; 2\}$.

b) On souhaite ici les abscisses des points de $\mathscr{C}_g$ qui sont en dessous de $\mathscr{C}_f$: ce sont les points dont l'abscisse est dans $[-2; -1] \cup [2; 3]$ (voir dessin de droite). Donc l'équation $g(x) \leq f(x)$ admet pour ensemble solution : $[-2; -1] \cup [2; 3]$.



C Modéliser une situation avec une fonction.

À la manière de ce qui a été fait aux chapitres 3 et 4, on peut modéliser une situation concrète (par exemple issue de la géométrie) à l'aide d'une expression algébrique.

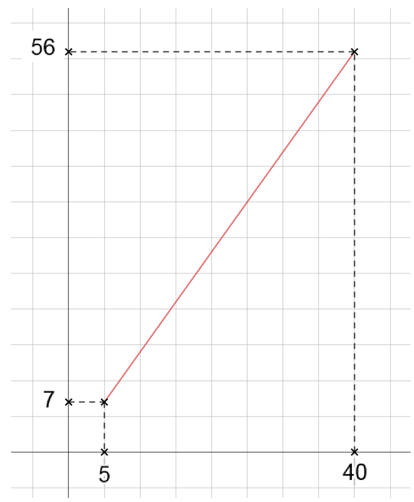
Au lieu de s'intéresser à des valeurs particulières (comme au chapitre 3 où on s'intéressait à un cas d'égalité, ou au chapitre 4 où on s'intéressait à une inégalité), on peut considérer toutes les valeurs qui apparaissent dans notre situation, qui est donc modélisée par une fonction. L'étude de la fonction obtenue (extremums, variation, etc.) permet alors d'en déduire des résultats sur la situation de départ.

Exercice 61 p.203
1. Comme x représente le nombre de litres que met Marius dans sa voiture :
– la station ne délivre pas moins de 5 litres, donc $x \geq 5$;
– son réservoir est vide, et peut contenir 40 litres, donc $x \leq 40$.
Et ainsi $5 \leq x \leq 40$, c'est-à-dire que $x \in [5; 40]$.
2. La fonction P qui à chaque valeur de x associe le prix payé a donc pour ensemble de définition : $[5; 40]$.
3. Comme un litre coute $1,40$ euros, on déduit que P est définie par :

$$P(x) = 1,40 \times x.$$

et on donne ci-dessous sa représentation graphique et son tableau de variations :

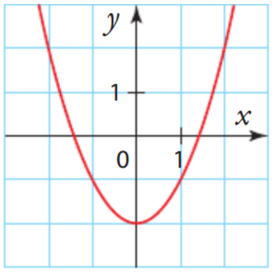
x	5	40
P		56
	7 ↗	

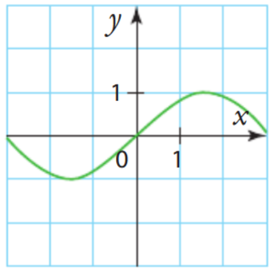


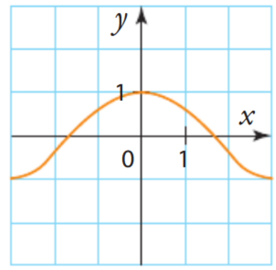
D Conjecturer la parité d'une fonction.

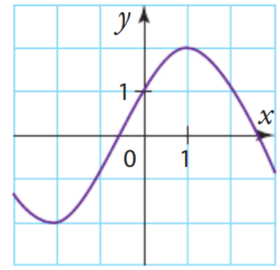
Pour montrer qu'une fonction est paire, il faut avoir accès à l'expression explicite de $f(x)$. L'idée est ensuite d'exprimer $f(-x)$ et de le comparer à $f(x)$:
– si pour tout x on a $f(-x) = f(x)$: alors f est paire ;
– si pour tout x on a $f(-x) = -f(x)$: alors f est impaire.
Ces calculs ne sont parfois pas faisables, ou parfois compliqués. Le tracé de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f permet d'avoir la parité, en regardant des éventuelles symétries :
– si $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées : alors f est paire ;
– si $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport au point d'origine du repère : alors f est impaire.
Le problème est que, sans calcul, on ne peut que **conjecturer** la parité d'une fonction : elle pourra sembler être paire ou impaire, mais on ne pourra pas l'affirmer de manière certaine.

Exercice 44 p.202
Ici, les graphes rouge et orange (les points a) et c)) semblent symétriques par rapport à l'axe des ordonnées, et devraient donc correspondre à des fonctions paires.
À l'inverse, le graphe vert (le point b)) semble symétriques par rapport au point d'origine du repère, et devrait donc correspondre à des fonctions impaires.
Enfin, le graphe violet (le point d)) ne semble présenter aucune symétrie : il correspond à une fonction qui n'est ni paire, ni impaire.









E Connaître des fonctions de référence (fonction carré, fonction inverse, ~~fonctions affines~~, fonction racine carrée, fonction cube)

Certaines fonctions reviennent souvent dans les calculs, et il faut savoir les reconnaitre, mais aussi utiliser leurs propriétés : valeurs, parités, variations, signes, etc. Dans ce chapitre, on ne traite pas des fonctions affines (qui seront étudiées dans un autre chapitre). Reste donc les fonctions carré, inverse, racine carrée et cube.
Il faut les voir comme des exemples importants, qui permettent de mettre en application des techniques, notamment l'utilisation des tableaux de variations pour la résolution d'équations ou d'inéquations. L'utilisation de ces fonctions est aussi rendu plus facile car on connaît leurs expressions explicites : on peut donc chercher les images ou des antécédents par des calculs, plutôt que par des résolutions graphiques.

Exercice 45 p.202
La fonction carré est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
a) $f(4) = 4^2 = 16$ donc l'image de 4 par la fonction carré est 16.
b) $f(-3) = (-3)^2 = 9$ donc l'image de -3 par la fonction carré est 9.
c) $f(10^3) = (10^3)^2 = 10^6 = 1000000$ donc l'image de 10^3 par la fonction carré est 10^6.
d) $f(1/2) = (1/2)^2 = 1/4$ donc l'image de $1/2$ par la fonction carré est $1/4$.

Exercice 46 p.202
Comme la fonction carré est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$, alors chercher les antécédents d'un réel a revient à résoudre l'équation $x^2 = a$.
a) Comme $6 > 0$, alors l'équation $x^2 = 6$ possède deux solutions, à savoir $\sqrt{6}$ et $-\sqrt{6}$, donc 6 possède deux antécédents par la fonctions carré, à savoir $\sqrt{6}$ et $-\sqrt{6}$.
b) Comme $64 > 0$, on trouve de même que 64 possède deux antécédents par la fonction carré, à savoir 8 et -8 (comme $\sqrt{64} = 8$).
c) Comme $-2 < 0$, alors -2 ne possède pas d'antécédent par la fonction carré.
d) Comme $10^6 > 0$, alors 10^6 possède deux antécédents par la fonction carré, à savoir 10^3 et -10^3 (comme $\sqrt{10^6} = 10^3$).

F Résoudre des équations et inéquations avec des fonctions de références.

Avec les fonctions de références, on a deux manières de résoudre une équation ou une inéquation :
- soit par l'expression explicite de la fonction : ce qui fonctionne seulement quand on tombe sur une des équations ou inéquations que l'on sait résoudre par du calcul littéral (comme aux chapitres 3 et 4) ;
- soit par les variations de la fonctions : et dans ce cas on utilise le tableau de variations pour trouver les ensembles solutions cherchés, ce qui s'apparente à une résolution graphique.

Exercice 52 p.202
a) et b) On rappelle le tableau de variations de la fonction carré, que l'on note f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Et ainsi :

- pour le a) : $f(-3) = f(3) = 9$, et f est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$. Ainsi, on trouve :
$$x^2 \geq 9 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -3] \text{ ou } x \in [3; +\infty[\Leftrightarrow x \in]-\infty; -3] \cup [3; +\infty[$$
donc l'ensemble solution est : $]-\infty; -3] \cup [3; +\infty[$.
- pour le b) : $f(-\sqrt{5}) = f(\sqrt{5}) = 5$, et f est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$. Ainsi, on trouve :
$$x^2 < 5 \Leftrightarrow x \in]-\sqrt{5}; \sqrt{5}[$$
donc l'ensemble solution est : $]-\sqrt{5}; \sqrt{5}[$.

c) et d) On rappelle le tableau de variations de la fonction inverse, que l'on note g :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g	0 $\searrow$ $-\infty$		$\|\|$		$+\infty$ $\searrow$ 0

Et ainsi :

- pour le c) : $g(1/5) = 5$, et g est décroissante sur $]0; +\infty[$. De plus, g ne prend que des valeurs négatives (donc inférieurs à 5) sur $]-\infty; 0[$. Ainsi, on trouve :
$$\frac{1}{x} < 5 \Leftrightarrow x \in]-\infty; 0[\text{ ou } x \in]1/5; +\infty[\Leftrightarrow x \in]-\infty; 0[\cup]1/5; +\infty[$$
donc l'ensemble solution est : $]-\infty; 0[\cup]1/5; +\infty[$.
- pour le d) : $f(-1/2) = -2$, et g est décroissante sur $]-\infty; 0]$. De plus, g ne prend que des valeurs positives (donc supérieurs ou égales à 2) sur $]0; +\infty[$. Ainsi, on trouve :
$$\frac{1}{x} \geq -2 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -1/2] \text{ ou } x \in]0; +\infty[\Leftrightarrow x \in]-\infty; -1/2] \cup]0; +\infty[$$
donc l'ensemble solution est : $]-\infty; -1/2] \cup]0; +\infty[$.

e) et f) On rappelle le tableau de variations de la fonction racine carrée, que l'on note h :

x	0		$+\infty$
h	0	$\nearrow$	$+\infty$

Et ainsi :

- pour le e) : $h(9) = 3$, et h est croissante sur $[0; +\infty[$. Ainsi, on trouve :
$$\sqrt{x} \leq 3 \Leftrightarrow x \in [0; 9]$$
donc l'ensemble solution est : $[0; 9]$.
- pour le f) : $h(81) = 9$, et h est croissante sur $[0; +\infty[$. Ainsi, on trouve :
$$\sqrt{x} > 9 \Leftrightarrow x \in]81; +\infty[$$
donc l'ensemble solution est : $]81; +\infty[$.

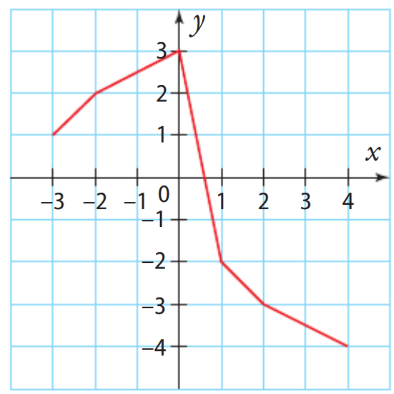
G Décrire les variations d'une fonction.

Les fonctions ne sont pas toujours croissantes ou décroissantes (par exemple la fonction carré est décroissante puis croissante). On peut alors chercher à regarder des ensembles plus petits sur lesquels la fonction que l'on souhaite est monotone, ce qui donne les variations de la fonction. Celles-ci se lisent bien sur la représentation graphique :
– si la courbe va vers le haut quand on se déplace vers la droite : alors la fonction est croissante ;
– si la courbe va vers le bas quand on se déplace vers la droite : alors la fonction est décroissante.
Il est en général impossible de “calculer” la monotonie d'une fonction, donc on se contentera souvent d'une méthode graphique.
On les regroupe alors dans le tableau de variations : on découpe l'ensemble de définition de la fonction en intervalles les plus grands possible sur lesquels la fonction est monotone, et on rajoute les valeurs aux bornes pour avoir le plus d'informations possibles.

Exercice 18 p.226

On considère la fonction f, donnée par la courbe représentative ci-contre.
Alors sur la courbe on peut voir que :
– f est croissante sur $[-3;0]$;
– f est décroissante sur $[0;4]$.
Il reste à trouver les valeurs que prend f aux bornes de ces intervalles, et on a : $f(-3) = 1$; $f(0) = 3$; $f(4) = -4$.
Ainsi, le tableau de variations de f est donné par :

x	-3		0		4
h			3		
	1	$\nearrow$		$\searrow$	-4



Exercice 20 p.227 Comme f est décroissante sur $]-\infty;4]$ et croissante sur $[4;+\infty[$, on a déjà le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		4		$+\infty$
f		$\searrow$		$\nearrow$	

Reste à compléter avec les images que l'on connait. Ici, on sait seulement que $f(4) = -3$. Donc on peut seulement compléter le tableau comme suit :

x	$-\infty$		4		$+\infty$
f		$\searrow$		$\nearrow$	
			3		

Au passage, on peut en déduire que f admet 3 pour minimum, et que ce minimum est atteint en 4.

H Comparer des images en utilisant un tableau de variations.

Les variations d'une fonction, données par son tableau de variation, permettent d'avoir une vision schématique de sa représentation graphique : on connaît les intervalles sur lesquels la fonction est monotone, avec les valeurs aux bornes de ces intervalles. Ceci permet d'ordonner les image de certains points dans deux situations :

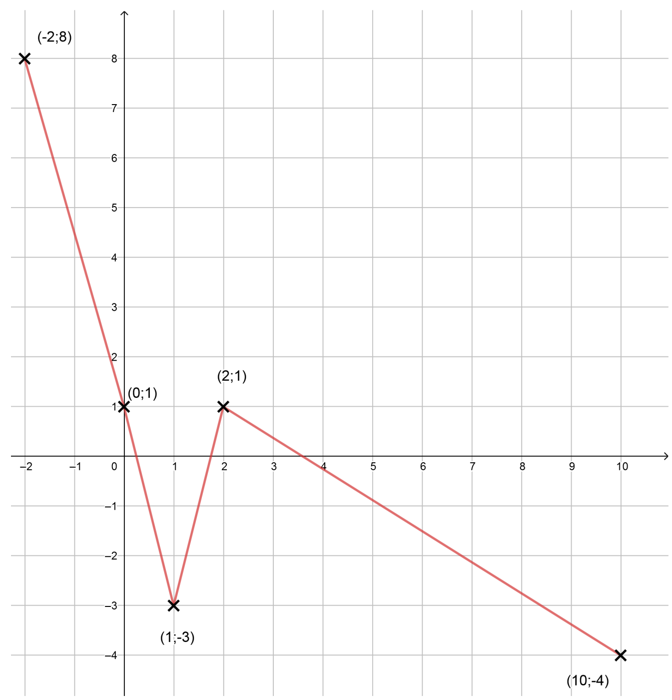
– si la fonction est monotone entre les deux points : les images sont dans le même ordre que les antécédents si la fonction est croissante, ou dans l'autre sens si elle est décroissante ;
– si on peut encadrer suffisamment précisément les images : on regarde les images des bornes des intervalles correspondant à nos points, ce qui donne des encadrement sur les images des points, qui sont parfois suffisantes.
La seconde situation est cependant plus subtile, et sera moins fréquente dans les exercices.
En pratique, on peut tracer la courbe d'une fonction qui aurait le bon tableau de variation, et utiliser la courbe obtenue pour déduire des résultats.

Exercice 22 p.227

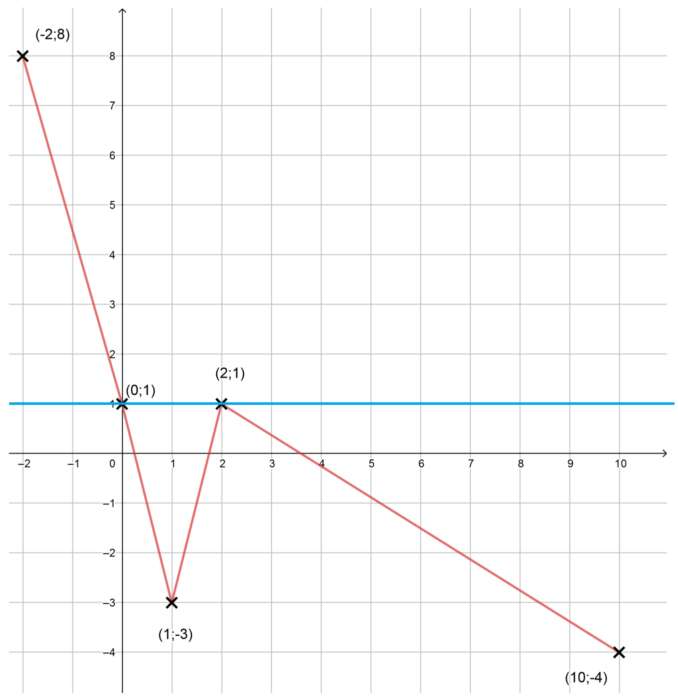
1. On considère la fonction g, dont le tableau de variation est le suivant :

x	-2		1		2		10
g	8	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	-4

On donne ci-contre, pour s'aider à comprendre, la courbe d'une fonction qui a le même tableau de variation, et qui pourrait donc très bien être g, en n'oubliant pas d'utiliser l'information que "$g(0) = 1$" donnée dans l'énoncé.



2. Pour résoudre l'inéquation "$g(x) \leq 1$", on raisonne sur les trois intervalles sur lesquels g est monotone :
– sur $[-2; 1]$: g est décroissante, avec $g(0) = 1$, on déduit que les solutions sur $[-2; 1]$ constituent l'intervalle $[0; 1]$;
– sur $[1; 2]$: g est croissante, avec $g(2) = 1$, on déduit que tous les réels x de $[1; 2]$ vérifient $g(x) \leq 1$, et sont donc solution de l'inéquation étudiée ;
– sur $[2; 10]$: g est décroissante, avec $g(2) = 1$, on déduit que tous les réels x de $[2; 10]$ vérifient $g(x) \leq 1$, et sont donc solution de l'inéquation étudiée.
Finalement, l'inéquation "$g(x) \leq 1$" admet pour ensemble solution l'union de ces intervalles, à savoir : $[0; 1] \cup [1; 2] \cup [2; 10] = [0; 10]$.
Au passage, on peut faire une résolution graphique en utilisant la fonction tracée précédemment. Cela revient à chercher l'abscisse des points de la courbe rouge située sous la droite horizontale passant par le point $(0; 1)$ (tracée en bleu ci-dessous), et on trouve le même résultat.



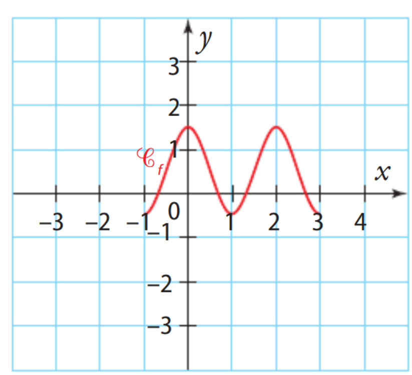
3. Comme 3 et 5 appartiennent à l'intervalle $[2; 10]$, que $3 < 5$, et que g est décroissante sur cet intervalle, alors on déduit que : $g(3) > g(5)$. C'est à nouveau ce que l'on voit sur la courbe tracée précédemment.

I Déterminer le minimum ou le maximum de fonctions à l'aide d'un tableau de variations ou d'une représentation graphique.

Si l'on connaît la représentation graphique d'une fonction, on peut facilement voir ses extremums : pour cela, on cherche sur la courbe les points qui ont la plus grande (pour le maximum) ou la plus petite (pour le minimum) ordonnée. Et on peut ensuite s'intéresser aux différentes antécédents de ces points.
On peut aussi se contenter du tableau de variations, puisque le tableau de variations donne, sur chaque intervalle où f est monotone, les images des bornes, ce qui correspond aux valeurs extrêmes des images. On peut aussi se ramener à la situation précédente, en traçant la courbe représentative d'une fonction qui aurait le bon tableau de variations.
On peut en dire un peu plus sur un lien entre extremums et variations :
- si une fonction est décroissante avant un nombre, et croissante ensuite, alors elle a un minimum en ce point ;
- si une fonction est croissante avant un nombre, et décroissante ensuite, alors elle a un maximum en ce point.

Il faut cependant prendre des précautions : les extremums dont on parle ci-dessus ne sont en fait que des extremums locaux (comme expliqué dans le cours), mais peut les voir comme des "bons candidats" pour les extremums que l'on cherche.
Exercice 35 p.228

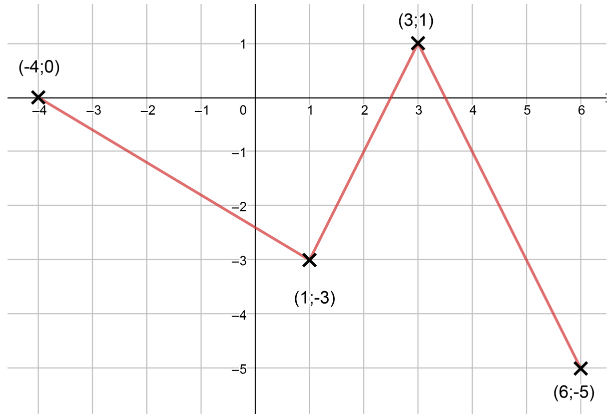
On considère la fonction f, donnée par la courbe représentative ci-contre.
1. Les points de la courbe $\mathscr{C}_f$ ont une abscisse comprise entre -1 et 3, et ainsi l'ensemble de définition de f est donné par : $\mathcal{D}_f = [-1; 3]$.
2. En regardant la courbe, on voit que la plus grande ordonnée vaut $1,5$, et correspond aux deux points : $(0; 1,5)$ et $(2; 1,5)$. Ainsi, la fonction f a $1,5$ comme maximum, atteint en 0 et en 2.
3. De même, on trouve que la plus petite ordonnée vaut $-0,5$, et correspond aux trois points : $(-1; 0,5)$, $(1; 0,5)$ et $(3; 0,5)$. Ainsi, la fonction f a $-0,5$ comme minimum, atteint en -1, 1 et 3.



Exercice 37 p.228

On considère la fonction f, dont le tableau de variation est le suivant :

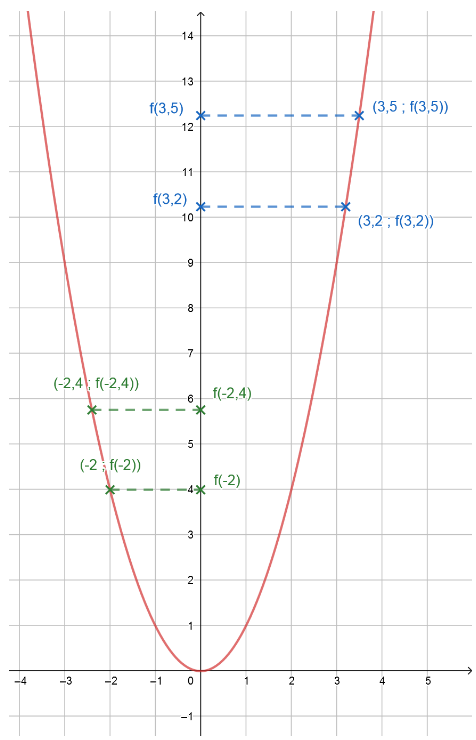
x	-4		1		3		6
f	0	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	-5



1. Comme les valeurs de x vont de -4 à 6 sur la première ligne du tableau, alors on déduit que l'ensemble de définition de f est donné par : $\mathcal{D}_f = [-4; 6]$.
2. La plus petite valeur que prend f est -5, donc -5 est le minimum de f, qui est atteint en 6.
3. La plus grande valeur que prend f est 0, donc 0 est le maximum de f, qui est atteint en -4.
On donne ci-contre la représentation graphique d'une fonction qui a même tableau de variation que f. On peut retrouver les résultats précédents sur le graphique.

J Utiliser les variations des fonctions carré, inverse, racine carrée et cube.

Les fonctions carré, inverse, racine carrée et cube sont à voir comme des exemples importants. On connaît bien leurs variations, ainsi qu'une expression explicite à chaque fois, ce qui fait qu'on peut les utiliser pour illustrer toutes les méthodes évoquées précédemment. De plus, à part la fonction cube, si f est l'une de ces fonctions, alors on sait résoudre l'équation "$f(x) = k$" (selon la valeur de k), ce qui permet de trouver les antécédents de tout nombre, et de résoudre différentes équations ou inéquations.
Selon ce que l'on veut faire, on pourra alors soit tracer la courbe de la fonction, soit rappeler son tableau de variations.
Exercice 27 p.227



1. On considère la fonction carré, dont on a représenté ci-contre la courbe (en rouge).
2.a) On a placé en bleu les points de la courbe d'abscisse $3,2$ et $3,5$: celui d'abscisse $3,2$ a la plus petite ordonnée, donc $3,2^2 < 3,5^2$.
b) On a placé en verts les points de la courbe d'abscisse (-2) et $(-2,4)$: celui d'abscisse -2 a la plus petite ordonnée, donc $(-2)^2 < (-2,4)^2$.

Exercice 28 p.227
1. La fonction inverse (que l'on note f) est décroissante sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$, et son tableau de variations est le suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f	0 $\searrow$	$-\infty$	$\|\|$	$+\infty$ $\searrow$	0

2.a) Comme 2 et 9 sont dans l'intervalle $]0;+\infty[$, avec $2 < 9$, et que f est décroissante sur $]0;+\infty[$, alors : $f(2) > f(9)$.
b) Comme -1 et $-0,5$ sont dans l'intervalle $]-\infty;0[$, avec $-1 < -0.5$, et que f est décroissante sur $]-\infty;0[$, alors : $f(-1) > f(-0.5)$.

K Résoudre des inéquations à l'aide des variations.

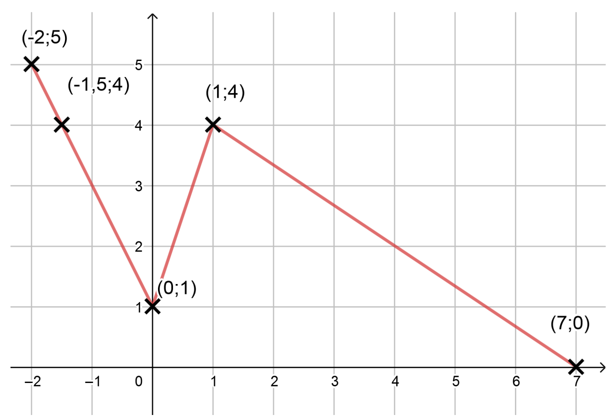
Le tableau de variations permet de comparer des images. Si l'on connaît les antécédents d'un nombre k, on peut donc résoudre l'équation $f(x) = k$, mais aussi les inéquations "$f(x) \leq k$", "$f(x) \geq k$", "$f(x) < k$", ou "$f(x) > k$", en utilisant les variations de la fonction.
Là encore, il suffit parfois de tracer la courbe d'une fonction qui aurait le bon tableau de variations pour s'aider dans les raisonnements.

Exercice 25 p.227

On considère la fonction f, dont le tableau de variation est le suivant :

x	-2	0	1	7
f	5 $\searrow$	1 $\nearrow$	4 $\searrow$	0

On donne ci-contre la courbe d'une fonction qui a le même tableau de variations que f pour s'aider dans les raisonnements.



1. a) Comme 2 et 4 sont dans l'intervalle $[1;7]$, et que f est décroissante sur cet intervalle, alors $f(2) > f(4)$.
b) Comme -2 et -1 sont dans l'intervalle $[-2;0]$, et que f est décroissante sur cet intervalle, alors $f(-2) > f(-1)$.
2. Pour résoudre l'inéquation "$f(x) \geq 0$", on raisonne sur les trois intervalles sur lesquels f est monotone :
– sur $[-2;0]$: f est décroissante, avec $f(0) = 1 \geq 0$, donc tout l'intervalle $[-2;0]$ est solution ;
– sur $[0;1]$: f est croissante, avec $f(0) = 1 \geq 0$, donc tout l'intervalle $[0;1]$ est solution ;
– sur $[1;7]$: f est décroissante, avec $f(7) = 0$, donc là encore tout l'intervalle $[1;7]$ est solution.
Finalement, l'inéquation "$f(x) \geq 0$" admet pour ensemble solution l'union de ces intervalles, à savoir : $[-2;0] \cup [0;1] \cup [1;7] = [-2;7]$.
En fait, l'intervalle $[-2:7]$ est l'ensemble de définition de f. C'est-à-dire que f ne prend que des valeurs positives ou nulles.
3. Pour l'inéquation $f(x) \leq 4$, on procède de même en étudiant f sur les trois intervalles sur lesquels elle est monotone :
– sur $[-2;0]$: f est décroissante, avec $f(-1,5) = 4$, donc les solutions de l'inéquation sur $[-2;0]$ constituent l'intervalle $[-1,5;0]$;
– sur $[0;1]$: f est croissante, avec $f(1) = 4$, donc tout l'intervalle $[0;1]$ est solution ;
– sur $[1;7]$: f est décroissante, avec $f(1) = 4$, donc là encore tout l'intervalle $[1;7]$ est solution.
Finalement, l'inéquation "$f(x) \leq 4$" admet pour ensemble solution l'union de ces intervalles, à savoir : $[-1,5;0] \cup [0;1] \cup [1;7] = [-1,5;7]$.
Pour l'inéquation "$f(x) > 4$", on peut procéder de deux manières :

– on peut faire comme ci-dessus : on étudie les solutions sur chaque intervalle où f est monotone. On trouve que les seules solutions sont sur l'intervalle $[-2;0]$, et finalement l'ensemble solution est $[-2;-1,5[$;
– on peut utiliser le résultat précédent : l'idée étant que, si x est un nombre de l'ensemble de définition de f (c'est-à-dire de $[-2;7]$), alors on a soit $f(x) \leq 4$, soit $f(x) > 4$, et jamais les deux. Ainsi, les solutions de l'inéquation "$f(x) > 4$" sont exactement les éléments de $[-2;7]$ qui ne sont pas des solutions de l'inéquation "$f(x) \leq 4$", autrement dit des éléments de $[-1,5;7]$. Et on trouve à nouveau que l'ensemble solution est $[-2;1,5[$.

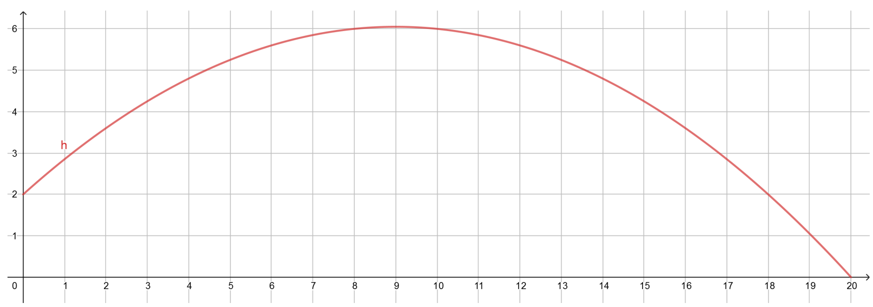
Pour aller plus loin, on pouvait aussi s'intéresser à l'inéquation "$f(x) \geq 4$", dont les solutions sont celles de l'inéquation "$f(x) > 4$", et les antécédents de 4. L'ensemble solution est un peu plus atypique, puisque l'on trouve : $[-2;1,5] \cup \{1\}$.

L Résoudre un problème d'optimisation.

Les fonctions interviennent dans de nombreux problèmes de modélisation, et permettent d'expliciter certaines quantités en fonctions d'autres.
Dans certaines situations, on est amené à vouloir rendre maximale ou minimale une quantité : du côté de la modélisation, c'est ce qu'on appelle un problème d'optimisation. L'idée est alors d'étudier la fonction, ou sa courbe représentative, pour en déduire ses extremums, et les points en lesquels ils sont atteints.

Exercice 104 p.235

On considère le lancer d'une balle de handball. Au bout de x mètres parcourus, la hauteur de la balle s'exprime grâce à la fonction h par la formule : $h(x) = -0,05x^2 + 0,9x + 2$. On représente ci-contre la fonction ainsi obtenue.



1. Après 20 mètres parcourus, la hauteur de la balle est de $h(20)$, qu'on peut calculer :

$$h(20) = -0,05 \times 20^2 + 0,9 \times 20 + 2 = -20 + 18 + 2 = 0$$

Cela veut dire que : au bout de 20 mètres, la balle touche le sol.
2. a) On développe l'expression proposée. On trouve :

$$\begin{aligned} -0,05(x-9)^2 + 6,05 &= -0,05 \times (x^2 - 18x + 81) + 6,05 \\ &= -0,05x^2 + 0,9x - 4,05 + 6,05 \\ &= -0,05x^2 + 0,9x + 2 = h(x) \end{aligned}$$

Et donc on trouve bien que : $h(x) = -0,05(x-9)^2 + 6,05$.
b) Comme un carré est positif, alors on déduit que l'on a toujours $(x-9)^2 \geq 0$
c) On manipule l'inégalité précédente pour essayer de revenir à l'expression de $h(x)$ de l'énoncé :

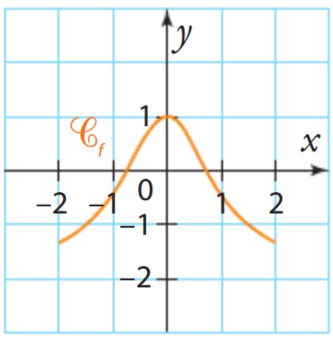
$$\begin{aligned} (x-9)^2 \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad -0,05(x-9)^2 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad -0,05(x-9)^2 + 6,05 \leq 6,05 \\ &\Leftrightarrow \quad h(x) \leq 6,05 \end{aligned}$$

où on a d'abord multiplié l'inégalité par $-0,05$ (qui est négatif, ce qui inverse les sens des inégalités), puis on a ajouté $6,05$.
On en déduit que la hauteur maximale possible est de $6,05$. Comme $h(9) = 6,05$, alors cette hauteur est atteinte au bout de 9 mètres.
Au passage, on peut même montrer que cette hauteur est seulement atteinte en 9. Pour cela, il suffit de voir que, si $x \neq 9$, alors $(x-9)^2 > 0$, et donc $h(x) < 6,05$ (avec les mêmes manipulations que précédemment).

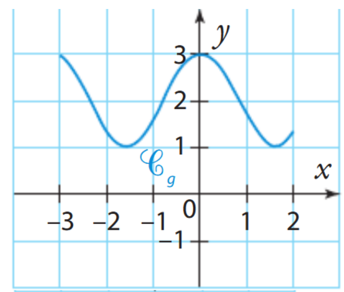
M Déterminer graphiquement le signe d'une fonction.

Déterminer le signe d'une fonction, c'est s'intéresser à l'équation "$f(x) = 0$" et aux inéquations "$f(x) < 0$" et "$f(x) > 0$". On regroupe ensuite les résultats dans le tableau de signes de la fonction.
Pour déterminer graphiquement le signe, on peut donc utiliser les mêmes méthodes graphiques que pour les inéquations, en utilisant soit la courbe représentative, soit le tableau de variation. Pour la courbe représentative, on s'intéresse à la position des points par rapport à l'axe des abscisses, tandis que pour le tableau de variation on a besoin des antécédents éventuels de 0.

Exercice 20 p.252



Pour la fonction f (donnée à gauche), on voit qu'elle est positive sur $]-2/3; 2/3[$, nulle en $-2/3$ et $2/3$, et négative sur $[-2; -2/3[\cup]2/3; 2]$.
Pour la fonction g (donnée à droite), elle est positive sur $[-3; 2]$.



On donne ci-dessous leurs tableaux de signes :

x	-2		$-2/3$		$2/3$		2
f		$-$	0	$+$	0	$-$	

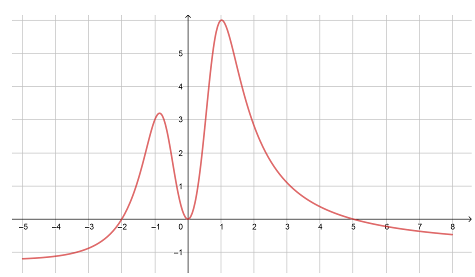
x	-3		2
g		$+$	

Exercice 21 p.252

Comme h est définie sur $[-5; 8]$, et positive seulement sur $[-2; 5]$, alors elle est négative sur $[-5; -2] \cup [5; 8]$. Elle s'annule en -2, 0 et 5, ce qui donne le tableau de signes :

x	-5		-2		0		5		8
h		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Et on donne ci-contre la courbe d'une fonction qui a le bon tableau de signes.



N Interpréter un tableau de signe.

Inversement, si l'on connaît le tableau de signes d'une fonction, on peut résoudre l'équation "$f(x) = 0$" et aux inéquations "$f(x) < 0$" et "$f(x) > 0$". On peut aussi déterminer le signe de l'image d'un point : il suffit pour cela de trouver où il se situe sur la première ligne du tableau, puis de lire son signe grâce à la deuxième ligne.

Exercice 42 p.254
On considère la fonction f, qui possède le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
f		$+$	0	$-$	

1. a) Comme 5 est plus grand que -3, alors $f(5) < 0$.
b) Comme -2 est plus grand que -3, alors $f(-2) < 0$.

c) Comme -7 est plus petit que -3, alors $f(-7) > 0$.
2. a)b)c) D'après le tableau :
– l'inéquation "$f(x) > 0$" a pour ensemble solution : $]-\infty;-3[$;
– l'inéquation "$f(x) \geq 0$" a pour ensemble solution : $]-\infty;-3]$;
– l'inéquation "$f(x) < 0$" a pour ensemble solution : $]-3;+\infty[$.
3. On donne ci-dessous une courbe pouvant représenter f :