Chapitre 4 : Inégalités, intervalles, inéquations

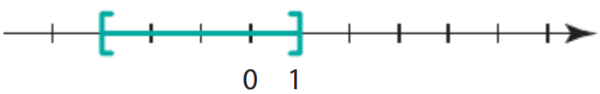
A Utiliser les intervalles.

Un intervalle, c'est l'ensemble des nombres situés entre deux bornes. Il y a différentes manières de construire les intervalles, selon que :
- les bornes sont finies ou infinies ;
- les bornes font parties ou non de l'intervalle.

Pour dire si les bornes font partie ou non de l'intervalle, on utilise en français les termes "inclus" ou "exclus". En mathématiques, selon si l'on représente un intervalle par des inégalités ou la notation avec des crochets, on fait apparaître qu'une borne :
- appartient à l'intervalle : avec des inégalités larges ($\leq$ et $\geq$) ou avec des crochets rentrant ([pour la borne la plus petite, et] pour la borne la plus grande) ;
- n'appartient pas à l'intervalle : avec des inégalités strictes ($<$ et $>$) ou avec des crochets rentrant (] pour la borne la plus petite, et [pour la borne la plus grande).

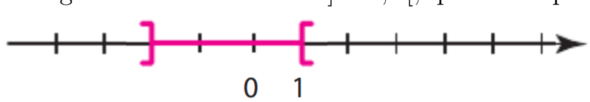
La difficulté est que chaque intervalle peut se représenter de trois manières : par des inégalités (ou des doubles inégalités) ; par la notation des intervalles ; ou par sa représentation sur une droite graduée. L'enjeu de cette capacité est de pouvoir passer d'une notation à l'autre, pour utiliser celle qui est la plus adaptée à la situation rencontrée.
Le dernier point difficile est la notion d'union et d'intersection d'intervalles. On rappelle que, si I et J sont des intervalles, on note $I \cap J$ l'intersection de I et J (c'est-à-dire les nombres qui sont à la fois dans I et dans J), et $I \cup J$ l'union de I et de J (c'est-à-dire les nombres qui sont dans I, dans J, ou dans les deux). La représentation sur une droite graduée permet de bien voir l'union et l'intersection, à la manière des diagrammes de Venn (ou diagramme patates).

Exercice 30 p.78
a) On considère la droite graduée sur la figure ci-dessous :



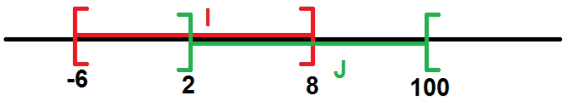
L'ensemble en bleu est donc l'ensemble des nombres entre -3 et 1, -3 inclus et 1 inclus (car les deux crochets sont rentrants). Il s'agit donc de l'intervalle $[-3; 1]$, qui est l'ensemble des nombres x satisfaisant la double inégalité : $-3 \leq x \leq 1$.

Exercice 31 p.78
b) On considère l'ensemble des nombres x satisfaisant la double inégalité : $-2 < x < 1$. C'est donc l'ensemble des nombres compris entre -2 et 1, -2 exclus et 1 exclus (car les inégalités sont strictes).
Il s'agit donc de l'intervalle $]-2; 1[$, que l'on représente comme ci-dessous sur une droite graduée :



Exercice 32 p.78
c) On considère l'intervalle $]-\infty; 2]$. C'est donc l'ensemble des nombres plus petits ou égaux à 2 (car le crochet est rentrant en 2 ; on rappelle au passage que le crochet est toujours sortant pour l'infini).
Il s'agit donc de l'ensemble des nombres x tels que $x \leq 2$ (il n'y a qu'une seule inégalité à écrire quand une borne est infinie), que l'on représente comme ci-dessous sur une droite graduée :

Exercice 36 p.78
Si $I = [-6; 8]$ et $J =]2, 100[$, on peut représenter les intervalles I et J sur la même droite graduée comme suit (on n'a pas pris des graduations régulières pour des raisons évidentes) :



On voit ainsi graphiquement que : $I \cap J =]2; 8]$ et $I \cup J = [-6; 100[$.
On déduit donc que :
- le seul nombre de l'énoncé appartenant à $I \cap J$ est : 0 ;
- les seuls nombres de l'énoncé appartenant à $I \cup J$ sont : $-6; -0.5; 2; 8, 1; 99, 9; 0$.

B Utiliser des inégalités.

Pour manipuler les inégalités, on peut faire les choses suivantes sans trop de soucis : développer, factoriser, ajouter une même quantité à chaque membre, multiplier chaque membre par une même quantité **strictement positive**.
On peut aussi multiplier chaque membre par une même quantité strictement négative, mais dans ce cas il faudra bien faire attention à changer le sens de l'inégalité.
Une première manière d'utiliser les inégalités est la suivante : on possède une inégalité, qu'il faut voir comme une information sur un nombre x ; et on peut en déduire des informations sur d'autres quantités liées à x.

Exercice 41 p.79 On considère un nombre réel x tel que $2 \leq x \leq 4$. L'idée est de transformer x en $x - 10$, $1,5x$, $x + 15$ ou $-4x$, et de faire les opérations adaptées sur tout l'inégalité précédente, pour en déduire une nouvelle inégalité :
a) En ajoutant -10 à chaque membre on obtient :

$$2 \leq x \leq 4 \quad \Leftrightarrow \quad -8 \leq x - 10 \leq -6$$

b) En multipliant chaque membre par $1,5$, qui est strictement positif, on obtient :

$$2 \leq x \leq 4 \quad \Leftrightarrow \quad 3 \leq 1,5x \leq 6$$

c) En ajoutant 15 à chaque membre on obtient :

$$2 \leq x \leq 4 \quad \Leftrightarrow \quad 17 \leq x + 15 \leq 19$$

d) En multipliant chaque membre par -4, qui est strictement négatif, on obtient :

$$2 \leq x \leq 4 \quad \Leftrightarrow \quad -8 \geq -4x \geq -16$$

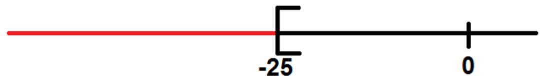
C Résoudre une inéquation du 1er degré.

Résoudre une inéquation du premier degré, c'est faire le travail inverse de précédemment : on a des quantités qui dépendent de x liées par une inégalité, et on veut en déduire une information sur x.
Une méthode qui fonctionne bien, et qui ressemble à ce que l'on fait pour les équations, consiste à : regrouper tous les termes en x d'un même côté du signe d'inégalité ; on regroupe les termes sans x de l'autre côté ; on divise par le nombre devant x pour avoir une inégalité la plus simple possible. Au passage, pour éviter de diviser par un nombre strictement négatif (ce qui inverse le sens des inégalités), il est parfois préférable de regrouper les termes en x du côté où il y en a le plus au début.

Exercice 50 p.79
On considère l'inéquation $-4x - 40 > 60$, d'inconnue x. On a :

$$-4x - 40 > 60$$
(en retirant -40 à chaque membre)
$$\Leftrightarrow -4x > 100$$
(en divisant par -4, qui est strictement négatif, donc on doit changer le sens de l'inégalité)
$$\Leftrightarrow x < -25$$

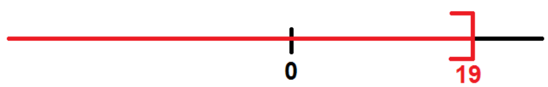
Donc l'ensemble solution est $]-\infty; -25[$, qu'on peut représenter sur une droite graduée comme suit :



Exercice 51 p.79
a) On considère l'inéquation $4x + 5 \leq -x + 100$, d'inconnue x. On a :

$$4x + 5 \leq -x + 100$$
(en ajoutant x à chaque membre)
$$\Leftrightarrow 5x + 5 \leq 100$$
(en retirant 5 à chaque membre)
$$\Leftrightarrow 5x \leq 95$$
(en divisant par 5, qui est strictement positif, donc on doit garder le sens de l'inégalité)
$$\Leftrightarrow x \leq 19$$

Donc l'ensemble solution est $]-\infty; 19]$, qu'on peut représenter sur une droite graduée comme suit :



D Comparer deux quantités en utilisant leur différence.

Étant données deux quantités, il y en a toujours une plus grande que l'autre. Une méthode pour déterminer quelle est la plus grande consiste à faire la différence entre ces deux quantités et à en étudier le signe. Ceci repose sur l'équivalence suivante (où le signe $\leq$ peut être remplacé par n'importe quel autre signe d'inégalité ou d'égalité) :

$$A \leq B \Leftrightarrow A - B \leq 0.$$

Dans le cas où les deux quantités à comparer font intervenir un nombre x, qui peut varier, il faut trouver en fonction de la valeur de x quelle quantité est la plus grande.

Exercice 56 p.79
On considère les quantités $A = 5 + 2x$ et $B = x + 9$, de sorte que :

$$A - B = (5 + 2x) - (x + 9) = 5 + 2x - x - 9 = x - 4$$

Ainsi, on a :

$$A - B \leq 0 \Leftrightarrow x - 4 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 4$$

(et pareil en changeant $\leq$ par un autre symbole d'inégalité ou d'égalité)
Et finalement, on déduit que :
- si $x < 4$: alors $5 + 2x < x + 9$;
- si $x = 4$: alors $5 + 2x = x + 9$;
- si $x > 4$: alors $5 + 2x > x + 9$.

On peut aussi, à la manière des résolutions d'inéquations, présenter le résultat sous formes d'intervalles (au lieu d'inégalités), ce qui donne :
- si $x \in]-\infty; 4[$: alors $5 + 2x < x + 9$;
- si $x = 4$: alors $5 + 2x = x + 9$;
- si $x \in]4; +\infty[$: alors $5 + 2x > x + 9$.

E Modéliser un problème par une inéquation.

À la manière des équations, les inéquations peuvent apparaître comme une manière de modéliser un problème concret (de géométrie, de calcul, etc.). L'idée est donc de traduire dans un premier temps le problème en une inéquation, qu'il faut ensuite résoudre.

Exercice 63 p.80
1. On note x le nombre de mois pendant lesquels Rémi touche les sous du loto. Si on note A et B les sous perçus suivant les deux situations, alors A et B s'expriment en fonction de x comme :

$$A = 100000 + 1400x \text{ et } B = 5000 + 2000x$$

La questions que se pose Rémi est de savoir pour quelles valeurs de x on a : $B \geq A$. On veut donc résoudre l'inéquation $B \geq A$, c'est-à-dire :

$$5000 + 2000x \geq 100000 + 1400x$$

2. On a ici :

$$\begin{aligned} B \geq A &\Leftrightarrow 5000 + 2000x \geq 100000 + 1400x \\ &\Leftrightarrow 5000 + 600x \geq 100000 \\ &\Leftrightarrow 600x \geq 95000 \\ &\Leftrightarrow x \geq \frac{475}{3} \end{aligned}$$

Suivant la manière dont Rémi recevrait son argent, les mois sont comptés un par un. Il n'y a pas de sens à parler ici de tiers de mois. Comme $475/3 = 158,33...$, on déduit que la deuxième offre devient plus intéressante à partir du 159-ème mois, c'est-à-dire au bout de 13 ans et trois mois.

F Calculer et interpréter des valeurs absolues.

Pour connaître la valeur absolue d'un réel a, il suffit de connaître son signe, puisque $|a| = a$ si $a \geq 0$ et $-a$ sinon. On en déduit par exemple que tout nombre a même valeur absolue que son opposé.
Une autre chose intéressante sur la valeur absolue est qu'elle représente une distance : $|a|$ représente la distance sur une droite graduée entre le point d'abscisse a et l'origine. Plus généralement, la quantité $|a - b|$ représente la distance entre le point d'abscisse a et celui d'abscisse b.

Exercice 65 p.80
a) On a $-4 < 0$, et donc : $|-4| = -(-4) = 4$.
b) On a $3,8 < 0$, et donc : $|3,8| = 3,8$.
c) On a $-100/3 < 0$, et donc : $\left|-\frac{100}{3}\right| = -\left(-\frac{100}{3}\right) = \frac{100}{3}$.
d) On a $5 - 6 = -1 < 0$, et donc : $|5 - 6| = -(5 - 6) = 6 - 5 = 1$.
e) La calculatrice donne que $\sqrt{17} - 2 \simeq 2,1$, et donc $\sqrt{17} - 2 > 0$, et ainsi : $|\sqrt{17} - 2| = \sqrt{17} - 2$.
f) La calculatrice donne que $2 - \sqrt{17} \simeq -2,1$, et donc $2 - \sqrt{17} < 0$, et ainsi : $|2 - \sqrt{17}| = -(2 - \sqrt{17}) = \sqrt{17} - 2$.

Exercice 70 p.80
a) $|x - 100|$ est la distance entre x et 100.
b) $|x - \frac{1}{3}|$ est la distance entre x et 1/3.
c) $|x + 5| = |x - (-5)|$ est la distance entre x et -5.
d) $|1,35 - x| = |x - 1,35|$ est la distance entre x et $1,35$.
e) $|-7 - x| = |x + 7| = |x - (-7)|$ est la distance entre x et -7.
f) $|\pi - x| = |x - \pi$ est la distance entre x et π.