Chapitre 3 : Calcul littéral.

A Développer, factoriser une expression.

La base du fait de développer ou de factoriser, c'est la distributivité : si on se donne des quantités a, b, c, d, on a :

$$(a+b)\times(c+d) = a\times c + a\times d + b\times c + b\times d.$$

Développer, c'est transformer un produit en somme. Dans l'égalité précédente, cela revient à passer du membre de gauche à celui de droite. La principale précaution à prendre est dans les parenthèses ou les signes. Après avoir distribué, on essaie de réduire l'expression en regroupant quand c'est possible certains termes ensemble (ce qui est le cas lorsqu'ils font apparaître **exactement** les mêmes lettres). Pour éviter les erreurs de calculs, on peut faire comme suit :

– quand on fait un produit : on traite séparément le problème du signe, des nombres et des lettres ;
– quand on peut le faire, on utilise une identité remarquable (pour limiter les étapes, donc le risque d'erreur).

Factoriser, c'est transformer une somme en produit. Dans l'égalité précédente, cela revient à passer du membre de droite à celui de gauche. C'est quelque chose qui n'est pas possible en général. Mais il faut être capable de le faire dans les deux cas suivants :

– quand il y a un facteur commun : si tous les termes de la somme ont un même facteur qui apparaît, on peut factoriser par cette quantité ;
– quand on reconnaît une identité remarquable : alors on peut identifier l'énoncé avec la formule du cours, pour factoriser.

Il existe une dernière manière de factoriser, mais il s'agit davantage de reconnaitre une factorisation que d'en trouver une : si, en développant une expression A on trouve une expression B, alors A est la forme factorisée de B.

Exercice 31 p.100
a) $3x(x+5) = 3x\times x + 3x\times 5 = 3x^2 + 15x$
c) $-3x(4-5x) = (-3x)\times 4 + (-3x)\times(-5x) = -12x + 15x^2$
d) $(1+x)(1+2x) = 1\times 1 + 1\times 2x + x\times 1 + x\times 2x = 1 + 2x + x + 2x^2 = 1 + 3x + 2x^2$

Exercice 33 p.100
a) $(x+12)^2 = x^2 + 2\times x\times 12 + 12^2 = x^2 + 24x + 144$
b) $(3x+1)(3x-1) = (3x)^2 - 1^2 = 9x^2 - 1$
c) $(6-x)^2 = 6^2 - 2\times 6\times x + x^2 = 36 - 12x + x^2$
d) $(x+1)^2 + (x-2)^2 = x^2 + 2\times x\times 1 + 1^2 + x^2 - 2\times x\times 2 + 2^2 = x^2 + 2x + 1 + x^2 - 4x + 4 = 2x^2 - 2x + 3$

Exercice 36 p.100
a) $3x - 15 = 3\times x - 3\times 5 = 3(x-5)$
b) $4x^2 - 7x = 4x\times x - 7\times x = x(4x-7)$
c) $3x^3 - 5x^2 + 8x = 3x^2\times x - 5x\times x + 8\times x = x(3x^2 - 5x + 8)$

Exercice 37 p.100
a) $(2x-3)(24x-3) + (2x-3)(-22x+5) = (2x-3)\left((24x-3) + (-22x+5)\right) = (2x-3)(2x+2)$
d) $(13t+5)(-5t+2) - (8t-15)(13t+5) = (13t+5)\left((-5t+2) - (8t-15)\right) = (13t+5)(-5t+2-8t+15) = (13t+5)(-13t+17)$

Exercice 38 p.100
a) $x^2 - 121 = x^2 - 11^2 = (x+11)(x-11)$
b) $9y^2 + 12y + 4 = (3y)^2 + 2\times 3y\times 2 + 2^2 = (3y+2)^2$

c) $x^2 + 169 - 26x = x^2 + 13^2 - 2 \times x \times 13 = (x - 13)^2$
d) $144x + 144x^2 + 36 = 2 \times 12x \times 6 + (12x)^2 + 6^2 = (12x + 6)^2$
e) $(3x + 1)^2 - (2x)^2 = (3x + 1 + 2x)(3x + 1 - 2x) = (5x + 1)(x + 1)$
f) $9t^2 - 24t + 16 = (3t)^2 - 2 \times 3t \times 4 + 4^2 = (3t - 4)^2$
g) $-22x + 121x^2 + 1 = -2 \times 11x \times 1 + (11x)^2 + 1^2 = (11x - 1)^2$
h) $(x + 1)^2 - 9 = (x + 1)^2 - 3^2 = (x + 1 + 3)(x + 1 - 3) = (x + 4)(x - 2)$

B Utiliser les identités remarquables.

Comme expliqué avant, il y a deux manières d'utiliser une identité remarquable :
– pour développer : dans ce cas, l'intérêt est surtout d'aller plus vite, et d'éviter les erreurs de calcul ;
– pour factoriser : quand il n'y a pas de facteur commun, c'est le seul moyen de factoriser.
Les exercices 33 et 38, corrigés avant, donnent les deux manières.

C Transformer des expressions fractionnaires simples.

Peu importe qu'on travaille avec des nombres ou avec des lettres, les règles de calculs avec les fractions sont toujours les mêmes :
– pour changer l'écriture d'une fraction, on peut multiplier ou diviser le numérateur et le dénominateur par une même quantité non nulle ;
– pour multiplier deux fractions, on multiplie les numérateurs et les dénominateurs ;
– pour additionner deux fractions, on les réduit au même dénominateur, puis on additionne les numérateurs (en gardant le dénominateur).
Le point le plus difficile est le dernier. Pour réduire au même dénominateur, on peut se contenter de prendre le produit des dénominateurs déjà présents. Et on cherchera toujours à simplifier la fraction obtenue à la fin (en divisant le numérateur et le dénominateur par une même quantité).

Exercice 40 p.101
a) $\dfrac{5t + 25}{5} = \dfrac{5(t + 5)}{5} = t + 5$
b) $\dfrac{5x^2}{2} \times \dfrac{3}{10x} = \dfrac{5x^2 \times 3}{2 \times 10x} = \dfrac{15x^2}{20x} = \dfrac{3x \times 5x}{4 \times 5x} = \dfrac{3x}{4}$
c) $\dfrac{4x^2 + 8x - 6}{2} = \dfrac{2(2x^2 + 4x - 3)}{2} = 2x^2 + 4x - 3$
d) $\dfrac{4a}{8a^2} = \dfrac{4a}{4a \times 2a} = \dfrac{1}{2a}$

Exercice 41 p.101
a) $\dfrac{3}{x + 8} + 5 = \dfrac{3}{x + 8} + \dfrac{5(x + 8)}{x + 8} = \dfrac{3 + 5(x + 8)}{x + 3} = \dfrac{3 + 5x + 40}{x + 3} = \dfrac{5x + 43}{x + 3}$
b) $\dfrac{x}{x + 1} - 3 = \dfrac{x}{x + 1} - \dfrac{3(x + 1)}{x + 1} = \dfrac{x - 3(x + 1)}{x + 1} = \dfrac{x - 3x - 3}{x + 1} = \dfrac{-2x - 3}{x + 1}$
c) $5 - \dfrac{2}{x^2 + 1} = \dfrac{5(x^2 + 1)}{x^2 + 1} - \dfrac{2}{x^2 + 1} = \dfrac{5(x^2 + 1) - 2}{x^2 + 1} = \dfrac{5x^2 + 5 - 3}{x^2 + 1} = \dfrac{5x^2 + 2}{x^2 + 1}$
d) $\dfrac{4x + 1}{x - 4} - \dfrac{3}{2} = \dfrac{2(4x + 1)}{2(x - 4)} - \dfrac{3(x - 4)}{2(x - 4)} = \dfrac{2(4x + 1) - 3(x - 4)}{2(x - 4)} = \dfrac{8x + 2 - 3x + 12}{2x - 8} = \dfrac{5x + 14}{2x - 8}$

D Résoudre une équation produit nul.

Un produit est nul à la seule condition qu'un de ses facteurs soit nul. Il y a deux manières d'utiliser ce résultat, étant donnée une équation :
– soit l'équation est déjà sous la bonne forme : on a par exemple une équation sous la forme $a \times b = 0$ (où a et b dépendent de l'inconnue) ; et on se ramène donc à résoudre les équations plus simples $a = 0$ et $b = 0$;

– soit l'équation n'est pas sous la bonne forme : on a par exemple une équation sous la forme $A = 0$; il faut alors dans un premier temps factoriser A, en écrivant par exemple $A = a \times b$, et on se retrouve dans le cas précédent ; c'est tout l'intérêt de savoir factoriser, donc de connaître ses identités remarquables.

Exercice 44 p.101
Ici les formes sont déjà factorisées, et on peut résoudre directement :
a) $(x+4)(x-7) = 0 \Leftrightarrow x+4 = 0$ ou $x-7 = 0 \Leftrightarrow x = -4$ ou $x = 7$
donc l'ensemble solution de l'équation est $\{-4; 7\}$.
c) $-x(5-4x) = 0 \Leftrightarrow -x = 0$ ou $5-4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 5/4$
donc l'ensemble solution de l'équation est $\{0; 5/4\}$.
e) $(2x-4)^2 = 0 \Leftrightarrow (2x-4) \times (2x-4) = 0 \Leftrightarrow 2x-4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$
donc l'ensemble solution de l'équation est $\{2\}$.

Exercice 46 p.101
Ici les formes ne sont pas factorisées, donc il faut d'abord les factoriser pour pouvoir résoudre :
a) $5x^2 - 6x = 5x \times x - 6 \times x = x(5x-6)$
donc : $5x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x(5x-6) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $5x-6 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 6/5$
donc l'ensemble solution est $\{0; 6/5\}$.
b) $(2x+1)(x+4) + (x+4)(3-5x) = (x+4)\left((2x+1)+(3-5x)\right) = (x+4)(-3x+4)$
donc : $(2x+1)(x+4)+(x+4)(3-5x) = 0 \Leftrightarrow (x+4)(-3x+4) = 0 \Leftrightarrow x+4 = 0$ ou $-3x+4 = 0 \Leftrightarrow x = -4$ ou $x = 4/3$
donc l'ensemble solution est $\{-4; 4/3\}$.
c) $(x-7)(3x-5) - (9x-4)(x-7) = (x-7)\left((3x-5)-(9x-4)\right) = (x-7)(-6x-1)$
donc : $(x-7)(3x-5)-(9x-4)(x-7) = 0 \Leftrightarrow (x-7)(-6x-1) = 0 \Leftrightarrow x-7 = 0$ ou $-6x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 7$ ou $x = -1/6$
donc l'ensemble solution est $\{-1/6; 7\}$.
d) $4x^2 + 8x + 4 = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 2 + 2^2 = (2x+2)^2$
donc : $4x^2 + 8x + 4 = 0 \Leftrightarrow (2x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow 2x+2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$
donc l'ensemble solution est $\{-1\}$.
e) $(4x-7)(9x+5) = (8x-3)(4x-7) \Leftrightarrow (4x-7)(9x+5) - (8x-3)(4x-7) = 0 \Leftrightarrow (4x-7)\left((9x+5)-(8x-3)\right)$
$\Leftrightarrow (4x-7)(x+8) = 0 \Leftrightarrow 4x-7 = 0$ ou $x+8 = 0 \Leftrightarrow x = 7/4$ ou $x = -8$
donc l'ensemble solution est : $\{-8 : 7/4\}$.

E Résoudre une équation quotient.

Un quotient est nul à la seule condition que son numérateur est nul, et que son dénominateur est non nul. Ainsi, étant donnée une équation sous la forme d'un quotient nul :
– on cherche les solutions possible : on détermine les valeurs de l'inconnue pour lesquelles le numérateur est nul ;
– on cherche les valeurs interdites : on détermine les valeurs de l'inconnue pour lesquelles le dénominateur est nul.
Et on synthétise tout cela en donnant l'ensemble solution : il de garder, parmi les solutions possibles, celles qui ne sont pas des valeurs interdites. Il se peut qu'aucune valeur interdite ne soit solution, mais il faut le faire apparaître. De même, il se peut que toutes les solutions soient des valeurs interdites : dans ce cas il n'y a pas de solution.

Exercice 50 p.101
a) $\dfrac{x-2}{x+9} = 0 \Leftrightarrow x-2 = 0$ et $x+9 \neq 0 \Leftrightarrow x = 2$ et $x \neq -9 \Leftrightarrow x = 2$
donc l'ensemble solution est : $\{2\}$.
c) $\dfrac{20-4x}{x-5} = 0 \Leftrightarrow 20-4x = 0$ et $x-5 \neq 0 \Leftrightarrow x = 5$ et $x \neq 5$
donc l'équation n'admet pas de solution.

Exercice 51 p.101
a) $\dfrac{2x-1}{x+6} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{2x-1}{x+6} - 1 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x-7}{x+6} = 0 \Leftrightarrow x-7 = 0$ et $x+6 \neq 0 \Leftrightarrow x = 7$ et $x \neq -6 \Leftrightarrow x = 7$

donc l'ensemble solution est : $\{7\}$.

F Résoudre des équations du type $x^2 = k$, $\sqrt{x} = k$, $\frac{1}{x} = k$.

Pour chacune de ces équations, l'idée est de voir, en fonction de la valeur de k, quelles sont les solutions. Il faudra donc transformer l'équation de départ en une équation de l'un des types ci-dessus pour ensuite la résoudre avec le résultat du cours.

Exercice 47 p.101
a) $x^2 = 81$: comme $81 > 0$, l'équation a pour solutions $\sqrt{81} = 9$ et $-\sqrt{81} = -9$, donc l'ensemble solution est : $\{-9; 9\}$.
b) $x^2 = -7$: comme $-7 < 0$, alors l'équation n'admet pas de solution.
c) $x^2 = 15$: comme $15 > 0$, l'équation a pour solutions $\sqrt{15}$ et $-\sqrt{15}$, donc l'ensemble solution est : $\{-\sqrt{15}; \sqrt{15}\}$.
d) $3x^2 = 48 \Leftrightarrow x^2 = 16$: comme $16 > 0$, l'équation a pour solutions $\sqrt{16} = 4$ et $-\sqrt{16} = -4$, donc l'ensemble solution est :$\{-4; 4\}$.
e) $2x^2 + 20 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = -20 \Leftrightarrow x^2 = -10$: comme $-10 < 0$, alors l'équation n'admet pas de solution.
f) $4x^2 - 2 = 1 \Leftrightarrow 4x^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 = 3/4$: comme $3/4 > 0$, l'équation a pour solutions $\sqrt{3/4} = \sqrt{3}/2$ et $-\sqrt{3/4} = \sqrt{3}/2$, donc l'ensemble solution est : $\{-\sqrt{3}/2; \sqrt{3}/2\}$.

Exercice 49 p.101
a) $\sqrt{x} = 12$: comme $12 \geq 0$, l'équation a pour solution $12^2 = 144$, donc l'ensemble solution est : $\{144\}$.
b) $\sqrt{x} = -2$: comme $-2 < 0$, alors l'équation n'admet pas de solution.
c) $\sqrt{x} = 11,5$: comme $11,5 \geq 0$, l'équation a pour solution $11,5^2 = 132,25$, donc l'ensemble solution est : $\{132,25\}$.
d) $3\sqrt{x} = 21 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 7$: comme $7 \geq 0$, l'équation a pour solution $7^2 = 49$, donc l'ensemble solution est : $\{49\}$.

Exercice 53 p.101
a) $\dfrac{1}{x} = 4$: comme $4 \neq 0$, l'équation a pour solution $x = \dfrac{1}{4} = 1/4$, donc l'ensemble solution est : $\{1/4\}$.
b) $\dfrac{1}{x} = -1$: comme $-1 \neq 0$, l'équation a pour solution $x = \dfrac{1}{-1} = -1$, donc l'ensemble solution est : $\{-1\}$.
c) $\dfrac{1}{x} = 10$: comme $10 \neq 0$, l'équation a pour solution $x = 1/10$, donc l'ensemble solution est : $\{1/10\}$.
d) $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{3}$: comme $\dfrac{1}{3} \neq 0$, l'équation a pour solution $x = \dfrac{1}{\frac{1}{3}} = 3$, donc l'ensemble solution est : $\{3\}$.
e) $\dfrac{1}{x} = 0$: l'équation n'a pas de solution.
f) $\dfrac{1}{x} = -\dfrac{1}{5}$: comme $-\dfrac{1}{5} \neq 0$, l'équation a pour solution $x = \dfrac{1}{-\frac{1}{5}} = -5$, donc l'ensemble solution est : $\{-5\}$.

G Résoudre algébriquement un problème associé à une équation.

Pour résoudre certains problèmes, il est parfois utile de le modéliser : pour cela, on associe les inconnues du problèmes à des lettres. Les conditions vérifiées par les inconnues donnent une équation.
Il faut ensuite transformer l'équation en une équation que l'on sait résoudre (l'une de celles expliquées ci-dessus). Et évidemment la résoudre ensuite.

Exercice 79 p.103
1. Si on regarde les différents bords de la boîte, on obtient :
– deux bords carrés : qui sont des carrés de côté x, donc d'aire x^2 ;
– quatre bords rectangulaires : qui sont des rectangles de côtés x et 2, donc d'aire $2x$.

La surface extérieur est donc de : $2 \times x^2 + 4 \times 2x = 2x^2 + 8x$.
Pour montrer qu'il s'agit bien de l'expression de l'énoncé, on développe cette dernière expression :

$$S(x) = 2(x+2)^2 - 8 = 2(x^2+4x+4) - 8 = 2x^2 + 8x + 8 - 8 = 2x^2 + 8x$$

Et donc la surface extérieur est bien donnée par la formule $S(x) = 2(x+2)^2 - 8$.
2. On veut résoudre l'équation $S(x) = 72$. On a :

$$S(x) = 72 \Leftrightarrow 2(x+2)^2 - 8 = 72 \Leftrightarrow 2(x+2)^2 = 80 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 40$$

À partir de la dernière équation, on a deux manières de résoudre :
– par une équation produit nul : on constate que $(x+2)^2 - 40 = (x+2)^2 - (2\sqrt{10})^2 = (x+2+2\sqrt{10})(2+2-2\sqrt{10})$
  Et ainsi : $(x+2)^2 = 40 \Leftrightarrow (x+2+2\sqrt{10})(2+2-2\sqrt{10}) = 0 \Leftrightarrow (x+2+2\sqrt{10}) = 0$ ou $(2+2-2\sqrt{10}) = 0 \Leftrightarrow$ $x = -2-2\sqrt{10}$ ou $x = -2+2\sqrt{10}$
– par une équation $x^2 = k$: comme $40 > 0$, alors : $(x+2)^2 = 40 \Leftrightarrow x+2 = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ ou $x+2 = -\sqrt{40} = -2\sqrt{10} \Leftrightarrow x = -2-2\sqrt{10}$ ou $x = -2+2\sqrt{10}$

On trouve dans chaque cas qu'il y a a priori deux solutions, à savoir : $-2-2\sqrt{10} \simeq -8,3$ et $-2+2\sqrt{10} \simeq 4,3$.
Mais, comme x modélise une longueur, on ne s'intéresse qu'aux solutions positives ou nulles.
Et finalement, la seule solution est : $-2+2\sqrt{10}$.

H Travailler sur des expressions ou des relations simples.

Certaines quantités s'expriment en fonction d'autres quantités. Par exemple, on peut directement exprimer l'aire d'un carré en fonction de la longueur de son côté, le volume d'une boule en fonction de son rayon, etc.
On peut chercher à inverser ces relations, c'est-à-dire à exprimer l'autre quantité en fonction de la première. Par exemple, on peut chercher à exprimer le côté d'un carré en fonction de son aire. Cela passe par des résolutions d'équations, avec quelques précautions : il faudra toujours se souvenir des natures des quantités manipulées, pour ne pas obtenir de résultats qui n'ont pas de sens.

Exercice 97 p.104
1. L'aire $\mathcal{S}$ d'un disque de rayon r est donnée par l'égalité : $\mathcal{S} = \pi r^2$.
Regardons cette dernière égalité comme une équation d'inconnue r. On a :

$$\mathcal{S} = \pi r^2 \Leftrightarrow r^2 = \frac{S}{\pi}.$$

On a une équation du type $x^2 = k$. Comme $\frac{\mathcal{S}}{\pi} > 0$ (car il s'agit d'une surface, qui est toujours positive, divisée par π, qui est positif aussi), on déduit que l'équation a deux solutions : $\sqrt{\frac{\mathcal{S}}{\pi}}$ ou $-\sqrt{\frac{\mathcal{S}}{\pi}}$.

Mais r est un rayon, donc est lui aussi toujours positif. La seule solution est donc $\sqrt{\frac{\mathcal{S}}{\pi}}$, et finalement :

$$r = \sqrt{\frac{\mathcal{S}}{\pi}}.$$

2. Si un disque a une aire de 25cm^2, alors sont rayon est de :

$$r = \sqrt{\frac{25}{\pi}}\text{cm} \simeq 2,8\text{cm}.$$