Chapitre 9 : Probabilités.

Objectifs du chapitre :

Capacité	Acquisition
Modéliser une expérience aléatoire.	
Calculer des probabilités en utilisant : – une loi de probabilité – un tableau à double entrée – un arbre de dénombrement	
Utiliser les notions de réunion, d'intersection et de contraires d'événements.	
Simuler une expérience aléatoire ou un échantillon.	
Estimer une proportion ou un probabilité.	
Comparer fréquence observée et probabilité.	

Pour être sûr d'être au point avec les différentes notions, je me réfère à la page 310 du livre, où sont donnés les exercices associés.

I Expérience et événement

Définition I.1. *Une **expérience aléatoire** est une expérience qui peut avoir plusieurs issues possibles, et qu'on ne peut deviner à l'avance.*
*On appelle **univers** l'ensemble de ces issues, que l'on note Ω.*

Exemples I.2. • *le lancer d'une pièce : l'univers est $\Omega = \{Pile; Face\}$.*
• *le lancer d'un dé à 6 faces : $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.*

Définition I.3. *Un **événement** est un ensemble d'issues d'une expérience aléatoire. C'est donc un sous-ensemble de l'univers. On dit d'une issue qui appartient à un événement qu'elle **réalise** cet événement.*

Remarque I.4. *En tant qu'ensembles, les événements se comprennent bien avec des diagrammes de Venn (les "diagrammes patates").*

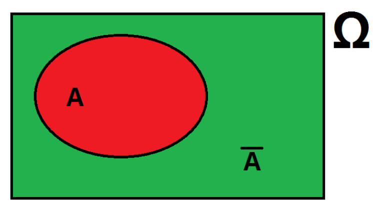
Exemple I.5. • *Pour le lancer d'une pièce, il y a seulement 4 événements possibles, qu'on peut décrire par des phrases ou par des sous-ensembles de $\Omega = \{Pile; Face\}$:*
- *il ne tombe ni sur Pile ni sur Face : $\emptyset$;*
- *la pièce tombe sur Face : $\{Face\}$;*
- *la pièce tombe sur Pile : $\{Pile\}$;*
- *la pièce tombe sur Pile ou sur Face : $\{Pile; Face\}$.*

• *Pour le lancer d'un dé à 6 faces :*
- *l'événement "on fait au moins un 3" correspond à l'ensemble : $\{3; 4; 5; 6\}$;*
- *l'événement "on tombe sur un nombre pair" correspond à l'ensemble : $\{2; 4; 6\}$.*

Remarque I.6. *Deux événements jouent des rôles particuliers :*
- *l'événement **impossble**, qui correspond à l'ensemble $\emptyset$, et qui ne se produit jamais ;*
- *l'événement **certain**, qui correspond à l'ensemble Ω tout entier, et qui se produit toujours.*

Définition I.7. *Pour une expérience d'univers Ω, si A est un événement, on définit l'événement **contraire**, note $\overline{A}$, comme l'ensemble des issues qui ne réalisent pas A.*

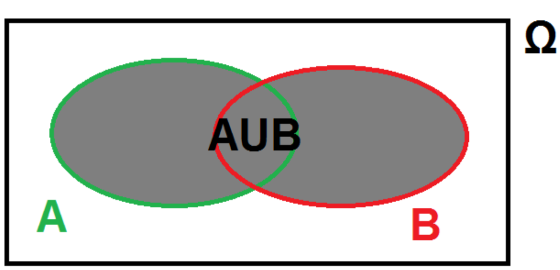
Remarque I.8.
L'événement $\overline{A}$ est réalisé si, et seulement si, l'événement A ne l'est pas. En terme de diagramme de Venn, cela revient à prendre tout ce qui est à l'extérieur de A dans Ω. Dans le diagramme ci-contre, l'événement A correspond à la surface rouge, et l'événement $\overline{A}$ à la surface verte.

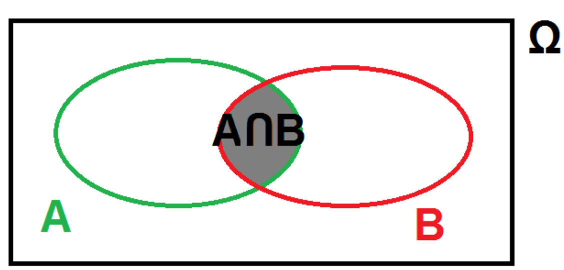


Exemple I.9. *Si on reprend l'exemple du dé :*
- *le contraire l'événement "on fait au moins un 3" est "on fait au plus un 2";*
- *le contraire de l'événement "on tombe sur un nombre pair" est "on tombe sur un nombre impair".*

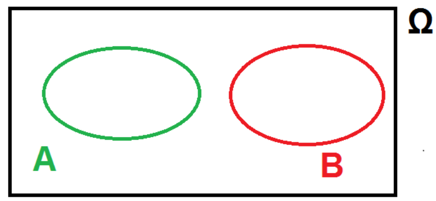
Remarque I.10. *Faire le "contraire du contraire" revient à reprendre l'événement de départ : $\overline{\overline{A}} = A$.*

Définition I.11. *Si A et B sont deux événements, on définit :*
- *l'événement $A \cup B$, appelé la **réunion** de A et B, comme l'ensemble des issues qui réalisent A **ou** B (et possiblement les deux à la fois) ;*
- *l'événement $A \cap B$, appelé l'**intersection** de A et B, comme l'ensemble des issues qui réalisent à la fois A **et** B.*





Remarque I.12. *On dit que des événements A et B sont **incompatibles** si :* $A \cap B = \emptyset$.



Exemple I.13. *Si on reprend l'exemple du dé, avec A et B les événements "on fait au mois un 3" et "on tombe sur un nombre pair", alors :*
- $A \cup B = \{2; 3; 4; 5; 6\}$ *(c'est-à-dire "on fait au moins un 2") ;*
- $A \cap B = \{4; 6\}$ *(c'est-à-dire "on fait 4 ou 6").*

II Probabilité et modélisation

A Loi de probabilité

Définition II.1. *La **loi de probabilité** d'une expérience est la donnée, pour chaque issue, d'un nombre appelé **probabilité** : ce sont des nombres compris entre 0 et 1, dont la somme fait 1.*
On les représente sous forme d'un tableau. Si $\Omega = \{e_1, \dots, e_n\}$, avec comme probabilités associées $p_1, \dots, p_n$, de telle sorte que $p_1 + \dots + p_n = 1$, la loi correspondante se lit sur le tableau suivant :

Issues	e_1	e_2	$\dots$	e_n
Probabilités	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Exemple II.2. *Pour le lancer d'une pièce équilibrée ou d'un dé à 6 faces non truqué, les lois de probabilités sont données par les tableaux :*

Issues (pièce)	*Pile*	*Face*
Probabilités	1/2	1/2

Issues (dé)	1	2	3	4	5	6
Probabilités	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

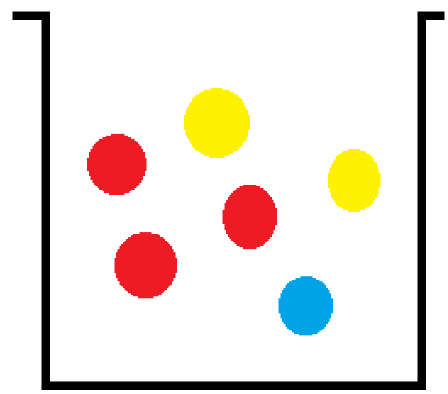
Définition II.3. *On dit qu'une loi de probabilité est **équirépartie** lorsque toutes les issues ont la même probabilité.*
Dans ce cas, s'il y a n issues différentes, alors chacune a pour probabilité : $\frac{1}{n}$.

Exemple II.4. *Les lancers de pièce ou de dé précédents ont des lois équiréparties. C'est pour cela qu'on parlait de "pièce équilibrée" ou de "dé non truqué".*

Remarque II.5.

Il existe des lois non équiréparties. Par exemple, on peut considérer une urne contenant 6 boules : 3 boules rouges, 2 boules jaunes et une boule bleue. On fait l'expérience de tirer au hasard une boule
On trouve alors $\Omega = \{Rouge; Jaune; Bleu\}$. Si l'on considère que la probabilité de tomber sur une couleur est proportionnelle au nombre de boules de cette couleur, alors on trouve la loi de probabilité suivante :

Issues (urne)	*Rouge*	*Jaune*	*Bleu*
Probabilités	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$



B Probabilité d'un événement

Définition II.6. *La probabilité d'un événement A, notée $p(A)$, est égale à la somme des probabilité des issues qui le réalisent.*

Remarque II.7. *– l'événement impossible a toujours une probabilité égale à 0 ;*
– l'événement certain a toujours une probabilité égale à 1 ;
– peu importe l'événement A choisi, on aura toujours la double inégalité : $0 \leq p(A) \leq 1$.

Exemple II.8. *On considère un dé truqué à 6 face, dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :*

Issues	1	2	3	4	5	6
Probabilités	1/12	1/4	1/12	1/4	1/6	1/6

Alors :
– l'événement "on fait au moins 3" a pour probabilité : $\frac{1}{12} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$;
– l'événement "on tombe sur un nombre pair" a pour probabilité : $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$.

Propriété II.9. *Dans un cas d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement A est donnée par :*

$$p(A) = \frac{\textit{nombre d'issues qui réalisent } A}{\textit{nombre total d'issues}}.$$

S'il y a en tout n issues, et qu'un événement A est réalisé par k issues, alors : $p(A) = \frac{k}{n}$.

Exemple II.10. *Si on considère un dé équilibré à 20 faces, on a une équiprobabilité avec 20 issues.*
L'événement A "obtenir un nombre premier" correspond à l'ensemble des nombres premiers plus petits que 20, donc : $A = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19\}$, *et A est réalisé par 8 issues.*
Et donc : $p(A) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$.

Propriété II.11. *Si A et B sont deux événements :*
- $p\left(\overline{A}\right) = 1 - p(A)$;
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

Remarque II.12. *La dernière égalité donne que, si $A \cap B = \emptyset$, alors :* $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

Exemple II.13. *On reprend l'exemple du dé équilibré à 6 faces, avec A et B les événements "on fait au mois un 3" et "on tombe sur un nombre pair". On avait :* $A \cup B = \{2; 3; 4; 5; 6\}$ *et* $A \cap B = \{4; 6\}$.
On trouve donc les probabilités :

$$p(A) = \frac{2}{3}\ ;\ p(B) = \frac{1}{2}\ ;\ p(A \cup B) = \frac{5}{6}\ ;\ p(A \cap B) = \frac{1}{3}.$$

Et on a bien : $\frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$.

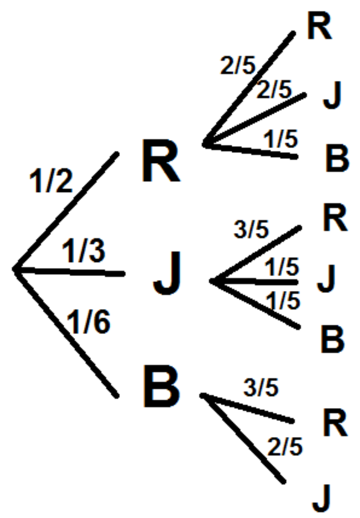
C Modélisation par des arbres

Définition II.14. *Un **arbre de probabilité** est un schéma qui permet de donner les issues d'une expérience ainsi que les probabilités associées.*
On modélise une issue par un chemin où, à chaque embranchement, on donne sur chaque branche la probabilité de la prendre.

Remarque II.15. *Les embranchements correspondent à une nouvelle étape de l'expérience : les arbres sont plutôt adaptés quand il y a plusieurs étapes.*

Exemple II.16. *On reprend l'urne avec les 3 boules rouges, les 2 boules jaunes et la boule bleue. Mais cette fois-ci, on en tire 2. Les étapes sont le tirage de la première boule, puis le tirage de la seconde.*
Pour la première boule, on a trois choix : une boule rouge (avec probabilité $1/2$), une boule jaune (avec probabilité $1/3$) ou une boule bleue (avec probabilité $1/6$).
Pour la seconde, il faut distinguer les cas :
- *si on a tiré la boule rouge en premier : il reste 2 boules rouges, 2 boules jaunes et 1 boule bleue ; donc on peut tirer une boule rouge (avec probabilité $2/5$), une boule jaune (avec probabilité $2/5$) ou une boule bleue (avec probabilité $1/5$) ;*
- *si on a tiré la boule jaune en premier : il reste 3 boules rouges, 1 boule jaunes et 1 boule bleue ; donc on peut tirer une boule rouge (avec probabilité $3/5$), une boule jaune (avec probabilité $1/5$) ou une boule bleue (avec probabilité $1/5$) ;*
- *si on a tiré la boule bleue en premier : il reste 3 boules rouges, 2 boules jaunes et aucune boule bleue ; donc on peut tirer une boule rouge (avec probabilité $3/5$) ou une boule jaune (avec probabilité $2/5$).*

Ceci correspond à l'arbre suivant :



Propriété II.17. *Dans un arbre, la probabilité d'une issue est égale aux produit des probabilités des branches du chemin correspondant.*

Exemple II.18. *On reprend la situation précédente. Alors :*

- *si A est l'événement "tirer une boule rouge puis une boule bleue" : il y a une seule issue qui réalise A, et le chemin correspondant est celui en rouge ci-dessous. La probabilité de cette issue est :* $\frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$, *et donc* $p(A) = \frac{1}{10}$ *;*
- *si B est l'événement "tirer exactement une boule jaune" : il faut soit commencer par tirer une boule jaune puis tirer une autre couleur, soit tirer une autre couleur d'abord et une boule jaune en deuxième ; on a colorié tous les chemines correspondants ci-dessous en jaune. On trouve alors :* $p(B) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{8}{15}$.