Chapitre 8 : Proportions et évolutions.

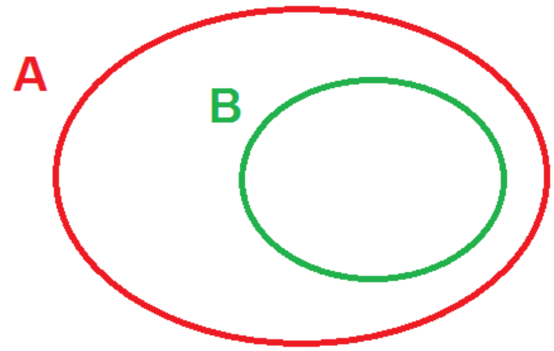
Objectifs du chapitre :

Capacité	Acquisition
Déterminer une proportion de proportion (ensembles emboîtés).	
Traduire une évolution en pourcentage par un coefficient multiplicateur et réciproquement.	
Déterminer un taux d'évolution global à la suite de plusieurs évolutions successives.	
Déterminer un taux d'évolution réciproque.	

Pour être sûr d'être au point avec les différentes notions, je me réfère à la page 268 du livre, où sont donnés les exercices associés.

I Proportions et pourcentages

Définition I.1. *Si un ensemble A possède a élément, et un sous-ensemble B possède b éléments, la* ***proportion*** *de B par rapport à A est la quantité :* $\frac{a}{b}$.



Remarque I.2. *Si l'on connaît la proportion p de B par rapport à A, alors on peut retrouver l'effectif de A ou de B en connaissant l'autre.*

Exemple I.3. *Une boulangerie produit chaque jour 500 viennoiseries, dont 260 sont des croissants, tandis que 1/5 sont des pains au chocolat. Alors :*
- *la proportion des croissants est de* $\frac{260}{500} = \frac{13}{25}$;
- *le nombre de pains au chocolat est de* $500 \times \frac{1}{5} = 100$.

Définition I.4. *Un* ***pourcentage*** *est une proportion exprimée par rapport à une quantité de 100.*

Remarque I.5. *L'expression sous forme de pourcentage permet de mieux se représenter les proportions. On utilise alors des arrondis : par exemple, un arrondi au dixième (de pourcent) demande de calculer la proportion trois chiffres après la virgule.*

Exemple I.6. *Dans l'exemple précédent :*
- *la proportion de croissants est de* 52% ;
- *la proportion de pains au chocolat est de* 20%.

Exemple I.7. *Une proportion de un tiers correspond environ à :* $33,3\%$ *(car* $\frac{1}{3} \simeq 0,333$*).*

Propriété I.8. *Soient A un ensemble, B un sous-ensemble de A, et C un sous-ensemble de B. On note p_1 la proportion de B dans A et p_2 la proportion de C dans B.*
Alors C est un sous-ensemble de A de proportion $p_1 \times p_2$ dans A.

Exemple I.9. *Dans l'exemple de la boulangerie, parmi tous les croissants, un tiers sont des croissants ordinaires et le reste des croissants au beurre.*
La proportion des croissants au beurre par rapport à tous les croissants est donc de $1 - 1/3 = 2/3 \simeq 66,7\%$.
La proportion des croissants au beurre par rapport aux viennoiseries est de : $\frac{2}{3} \times \frac{13}{25} = \frac{26}{75} \simeq 34,7\%$.
Cela représente un nombre de croissants au beurre de $500 \times \frac{26}{75} \simeq 173$.

Exercices 17-24 p.276 et 42-47 p.278

II Évolutions, taux et coefficients multiplicateurs

Définition II.1. *Si une quantité passe d'une valeur V_0 à une valeur V_1, on dit que :*
– *la **variation absolue** est $V_1 - V_0$;*
– *la **variation relative**, ou **taux d'évolution**, est $\dfrac{V_1 - V_0}{V_0}$;*
– *le **coefficient multiplicateur** est $\dfrac{V_1}{V_0}$.*

Remarque II.2. *Même s'il n'y a rien d'obligatoire, on travaille toujours avec des quantités strictement positives lorsque l'on parle de taux, pour ne pas créer de bizarreries...*

Exemple II.3. *La population de rhinocéros blanc en Afrique du sud était de :*
– *20 en 1885 ;*
– *1000 en 1970 ;*
– *2000 en 1980 ;*
– *4000 en 2001 ;*
– *11000 en 2021.*
Entre 1885 et 1970, la variation absolue est de 980, ce qui représente un taux d'évolution de $49 = 4900\%$ et un coefficient multiplicateur de 50.
Entre 1970 et 2001, la variation absolue est de 3000, ce qui représente un taux d'évolution de $3 = 300\%$ et un coefficient multiplicateur de 4.

Propriété II.4. *Une **augmentation** correspond à un taux d'évolution ou à une variation absolue **positive**, et à un coefficient multiplicateur **supérieur à** 1*
*Une **diminution** correspond à un taux d'évolution ou à une variation absolue **négative**, et à un coefficient multiplicateur **inférieur à** 1*

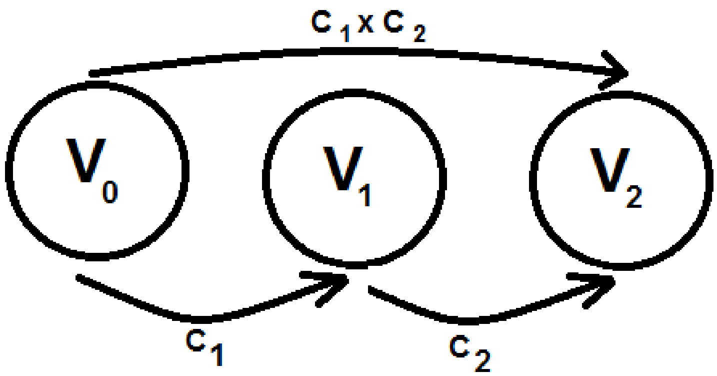
Propriété II.5. *Le coefficient multiplicateur c et le taux d'évolution t sont reliés par l'égalité : $c = 1 + t$.*
En particulier :
– *augmenter de $t\%$ revient à multiplier par $1 + \dfrac{t}{100}$;*
– *diminuer de $t\%$ revient à multiplier par $1 - \dfrac{t}{100}$.*

Exemples II.6.
- *Si un article coûte 49,99 euros, mais bénéficie d'une réduction de 30% :*
  – *avec les variations : la variation absolue est de $-\dfrac{30}{100} \times 49,99 \simeq -15,00$, donc le nouveau prix est de : $34,99$ euros ;*
  – *avec le coefficient multiplicateur : le coefficient multiplicateur est de $1 - \dfrac{30}{100} = 0,7$, donc le nouveau prix est de $49,99 \times 0,7 \simeq 34,99$ euros.*
- *Si un article coûte 49,99 euros, mais voit sont prix augmenter de 20% :*
  – *avec les variations : la variation absolue est de $+\dfrac{20}{100} \times 49,99 \simeq +10,00$, donc le nouveau prix est de : $59,99$ euros ;*
  – *avec le coefficient multiplicateur : le coefficient multiplicateur est de $1 + \dfrac{20}{100} = 1,2$, donc le nouveau prix est de $49,99 \times 1,2 \simeq 59,99$ euros.*

Exercices 25-33 p.276 et 48-54 p.278

III Évolutions successives et évolutions réciproques

Propriété III.1. *Si une quantité évolue de V_0 à V_1 avec un coefficient multiplicateur c_1, puis de V_1 à V_2 avec un coefficient multiplicateur c_2, alors l'évolution de V_0 à V_2 a pour coefficient multiplicateur $c_1 \times c_2$:*



Remarque III.2. *Pour manipuler des évolutions successives, il est préférable de raisonner en termes de coefficients multiplicateurs.*

Exemple III.3. *Si un article coûte 30 euros, et voit son prix augmenter de 20% puis diminuer de 20%, alors les deux coefficients multiplicateurs qui correspondent sont $1,2$ et $0,8$, donc le coefficient global est $1,2 \times 0,8 = 0,96$. Ceci correspond donc à une diminution de 4% par rapport au prix de départ, et à un prix final de $28,80$ euros.*
On peut détailler l'évolution des prix à chaque étape :
– *après l'augmentation augmentation : le prix devient $30 \times 1,2 = 36$ euros ;*
– *après la diminution : le prix devient $36 \times 0,8 = 28,80$ euros.*
Et finalement, on trouve un coefficient de $\dfrac{28,80}{30} = 0,96$, qui correspond à un taux de $\dfrac{28,80-30}{30} = -0,04 = -4\%$.

Exemple III.4. *Si le prix d'une baguette augmente de 3% par an, ce qui correspond à un coefficient multiplicateur de $1,03$ alors, au bout de 25 ans, le coefficient multiplicateur est de :*

$$\underbrace{1,03 \times 1,03 \times \cdots \times 1,03}_{25\ fois} = 1,03^{25} = 2,09$$

donc le prix a plus que doublé en 25 ans.

Définition III.5. *Si une quantité évolue de V_0 à V_1, on appelle* ***évolution réciproque*** *l'évolution de V_1 à V_0.*

Propriété III.6. *Si une évolution a comme coefficient multiplicateur c, alors l'évolution réciproque a comme coefficient multiplicateur $\dfrac{1}{c}$.*

Remarques III.7.
- *Les évolutions réciproques s'expriment bien en terme de coefficients multiplicateurs, mais plus difficilement en terme de taux. Si le taux d'une évolution est t, le taux de l'évolution réciproque est : $-\dfrac{t}{1+t}$*
- *Si une évolution est une augmentation, son évolution réciproque est une diminution (et inversement).*

Exemples III.8.
- *Si le prix d'un article augments de 25%, le coefficient multiplicateur est $1,25$, donc l'évolution réciproque a comme coefficient multiplicateur $\dfrac{1}{1,25} = 0,8$, c'est-à-dire un taux de -20%.*
  Ainsi, pour compenser une augmentation de 25%, il faut faire une diminution de 20%.
- *À l'inverse, si le prix d'un article diminue de 25%, le coefficient multiplicateur est $0,75$, donc l'évolution réciproque a comme coefficient multiplicateur $\dfrac{1}{0,75} = \dfrac{4}{3} \simeq 1,333$, c'est-à-dire un taux de d'un tiers (33,3% environ).*
  Ainsi, pour compenser une diminution de 25%, il faut faire une augmentation d'un tiers (environ 33,3%).

Exercices 34-39 p.277 et 55-61 p.278