Chapitre 7 : Fonctions affines.

Objectifs du chapitre :

Capacité	Acquisition
Connaître les fonctions affines (courbe représentative et expression).	
Déterminer les variations des fonctions affines.	
Déterminer algébriquement le signe d'une fonction affine.	
Déterminer le signe d'un produit ou d'un quotient.	
Interpréter un tableau de signes.	
Résoudre une inéquation à l'aide d'une étude de signe.	

Pour être sûr d'être au point avec les différentes notions, je me réfère aux pages 188, 216 et 240 du livre, où sont donnés les exercices associés.

I Les fonctions affines

Définition I.1. *Une fonction* ***affine*** *est une fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = ax + b$*, où* a *et* b *sont deux réels quelconques*

Remarques I.2. *Avec les mêmes notations :*
– *si* $a = 0$ *: alors on la fonction est* **constante** *(elle prend toujours la même valeur) ;*
– *si* $b = 0$ *: alors la fonction est* **linéaire** *(elle traduit une relation de proportionnalité).*

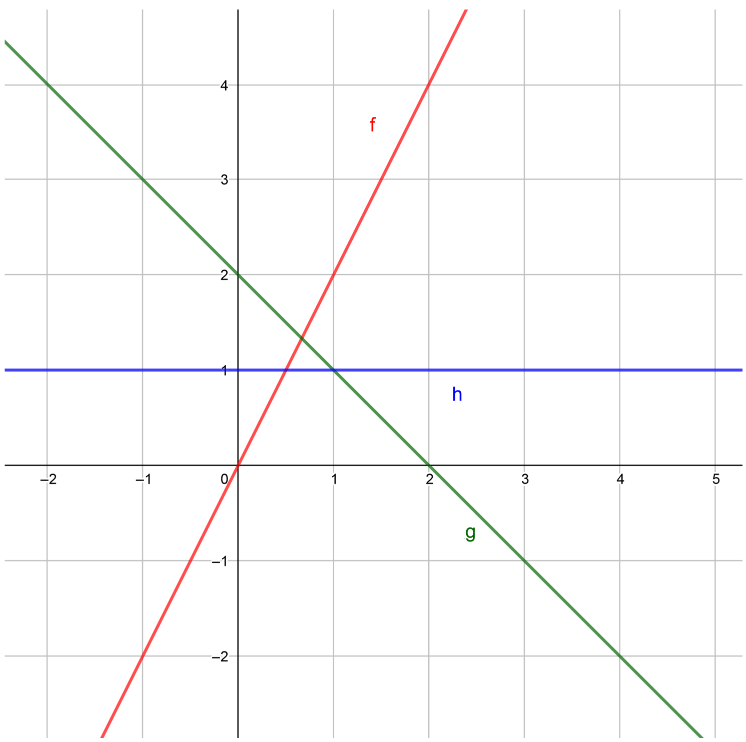
Exemples I.3. – *la fonction définie par* $f(x) = 2x + 3$ *est affine, avec* $a = 2$ *et* $b = 3$
– *la fonction définie par* $g(x) = -x - 1$ *est affine, avec* $a = -1$ *et* $b = -3$
– *la fonction définie par* $h(x) = 4$ *est affine, avec* $a = 0$ *et* $b = 4$
– *la fonction définie par* $k(x) = 3(x + 4)$ *est affine, avec* $a = 3$ *et* $b = 12$
– *la fonction définie par* $l(x) = 3x^2 - 4x(x - 1) + (x + 2)^2$ *est affine, avec* $a = 8$ *et* $b = 4$.

Propriété I.4. *Les fonctions affines sont exactement les fonctions définies sur* $\mathbb{R}$ *dont les courbes sont des droites.*

Définition I.5. *On considère la droite* $\mathcal{D}$ *qui est la courbe de la fonction affine définie par* $f(x) = ax + b$*. On dit que* $\mathcal{D}$ *est la droite d'équation* $y = ax + b$*, et :*
- a *est le* ***coefficient directeur*** de $\mathcal{D}$ *(ou sa* ***pente****) ;*
- b *est* ***l'ordonnée à l'origine*** de $\mathcal{D}$.

Remarques I.6. *Si* $\mathcal{D}$ *est la courbe représentative d'une fonction* f *:*
– $\mathcal{D}$ *passe par l'origine si, et seulement si,* f *est linéaire ;*
– $\mathcal{D}$ *est horizontale si, et seulement si,* f *est constante.*

Exemples I.7. *Les courbes représentatives des fonctions définies par* $f(x) = 2x, g(x) = -x + 2, h(x) = 1$ *sont représentées ci-dessous respectivement en rouge, vert et bleu :*



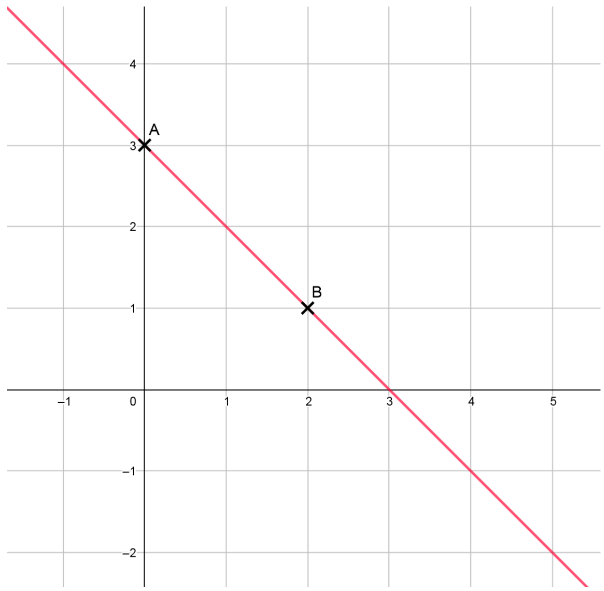
Remarques I.8. • *Comme une droite est entièrement déterminée par deux points, il suffit de calculer deux images, si on connaît une fonction affine et qu'on veut tracer sa courbe.*
- *Pour une fonction linéaire, il suffit d'un seul point de coordonnées non nulles pour connaitre sa formule.*

Propriété I.9. *Soient* $A(x_A; y_A)$ *et* $B(x_B; y_B)$ *deux points avec* $x_A \neq x_B$*. Alors la droite* (AB) *a pour coefficient directeur :*

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

Remarque I.10. *On retrouve qu'une droite horizontale est de coefficient directeur nul.*

Exemple I.11. *On considère les points $A(0;3)$ et $B(2;1)$. Si on note a et b tels que la droite (AB) a pour équation $y = ax + b$, alors :*
– d'après la propriété précédente : $a = \dfrac{1-3}{2-0} = \dfrac{-2}{2} = -1$;
– le point A fait partie de la droite, donc : $y_A = a \cdot x_A + b$, et donc en remplaçant a, x_A, y_A par leurs valeurs, on trouve : $b = 3$.
Et donc la droite (AB) a pour équation : $y = -x + 3$.



II Variations et signes des fonctions affines

Propriété II.1. *Si f définie par $f(x) = ax + b$ est une fonction affine non constante (c'est-à-dire que $a \neq 0$), alors elle s'annule uniquement en $x_0 = -\dfrac{b}{a}$. De plus, on a :*
– si $a > 0$ elle est croissante : elle est négative avant x_0 et positive ensuite ;
– si $a < 0$ elle est décroissante : elle est positive avant x_0 et négative ensuite.
Ainsi, les tableaux de signe et de variations de f sont donné par :
– si $a > 0$:

x	$-\infty$		$-b/a$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$	$+\infty$
f	$\nearrow$	

– si $a < 0$:

x	$-\infty$		$-b/a$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

x	$-\infty$	$+\infty$
f	$\searrow$	

Propriété II.2. *Un produit de facteurs est :*
– nul si un de ses facteurs est nul ;
– positif s'il a un nombre pair de facteurs négatifs ;
– négatif sinon.

Remarques II.3. • *Pour déterminer le signe d'un produit, il suffit d'étudier le signe de chacun de ses facteurs.*
• *La même règle fonctionne avec des quotient, mais les valeurs pour lesquelles le dénominateur s'annule deviennent des valeurs interdites.*

Exemple II.4. *Étudions le signe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2x-3)(-x+2)$.*

- *signe de $2x-3$: on reconnaît une fonction affine, avec $a = 2$ et $b = -3$, donc la fonction s'annule en $3/2$, et est négative avant et positive après. Son tableau de signe est :*

x	$-\infty$		$3/2$		$+\infty$
$2x-3$		$-$	0	$+$	

- *signe de $-x+2$: on reconnaît une fonction affine, avec $a = -1$ et $b = 2$, donc la fonction s'annule en 2, et est positive avant et négative après. Son tableau de signe est :*

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$-x+2$		$+$	0	$-$	

On regroupe les deux tableaux de signes en un seul :

x	$-\infty$		$3/2$		2		$+\infty$
$2x-3$		$-$	0	$+$	$\vdots$	$+$	
$-x+2$		$+$	$\vdots$	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Exemple II.5. *Étudions le signe de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \dfrac{x+4}{x-1}$.*

- *signe de $x+4$: on reconnaît une fonction affine, avec $a = 1$ et $b = 4$, donc la fonction s'annule en -4, et est négative avant et positive après. Son tableau de signe est :*

x	$-\infty$		-4		$+\infty$
$x+4$		$-$	0	$+$	

- *signe de $x-1$: on reconnaît une fonction affine, avec $a = 1$ et $b = -1$, donc la fonction s'annule en 1, et est négative avant et positive après. Son tableau de signe est :*

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	

On regroupe les deux tableaux de signes en un seul :

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$x+4$		$-$	0	$+$	$\vdots$	$+$	
$x-1$		$-$	$\vdots$	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

Exemple II.6. *Résolvons l'inéquation "$x^2 \geq 4$". On a :*

$$\begin{aligned} x^2 \geq 4 &\Leftrightarrow x^2 - 4 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (x-2)(x+2) \geq 0 \end{aligned}$$

et on peut donc résoudre l'inéquation par un tableau de signe :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	$\vdots$	$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$	$\vdots$	$+$	
$(x-2)(x+2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Et ainsi, l'ensemble solution est : $]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[$.