Chapitre 6 : Les vecteurs.

Objectifs du chapitre :

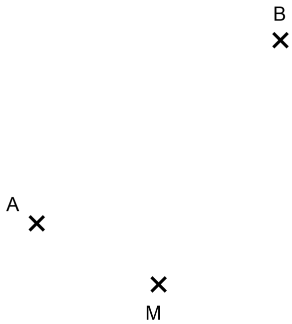
Capacité	Acquisition
Représenter géométriquement des vecteurs et construire leur somme.	
Construire le produit d'un vecteur par un réel.	
Caractériser l'alignement et le parallélisme par la colinéarité de vecteurs.	
Résoudre des problèmes en utilisant la représentation la plus adaptée.	

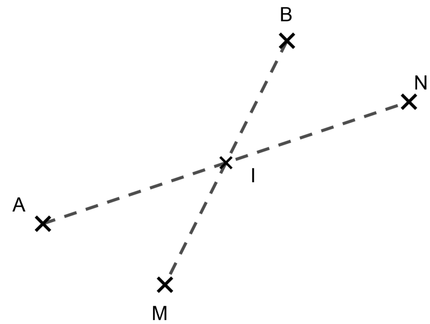
Pour être sûr d'être au point avec les différentes notions, je me réfère à la page 134 du livre, où sont donnés les exercices associés, et à la fiche sur Pronote, avec les explications et des exercices corrigés.

I Vecteurs et translations

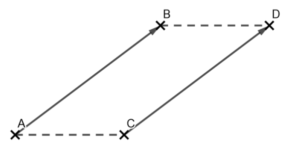
Définition I.1. *Si A et B sont deux points du plan, il existe une unique* ***translation*** *qui transforme A et B.*
Étant donné un point M du plan, elle le transforme en l'unique point N du plan tel que $ABNM$ est un parallélogramme.

Exemple I.2. *Avec les notations précédentes, si on connaît A, B et M, on peut construire M en utilisant qu'un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieux est un parallélogramme :*
– on construit le milieu I du segment $[BM]$;
– N est alors le symétrique de A par rapport à I.





Définition I.3. *La translation qui transforme A en B est appelée* ***translation de vecteur*** *$\overrightarrow{AB}$. On représente le vecteur $\overrightarrow{AB}$ à l'aide d'une flèche allant de A à B. On dit que A est l'origine du vecteur $\overrightarrow{AB}$, B son extrémité. Enfin, deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux s'ils définissent la même translation, c'est-à-dire lorsque $ABDC$ est un parallélogramme, et on note alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.*



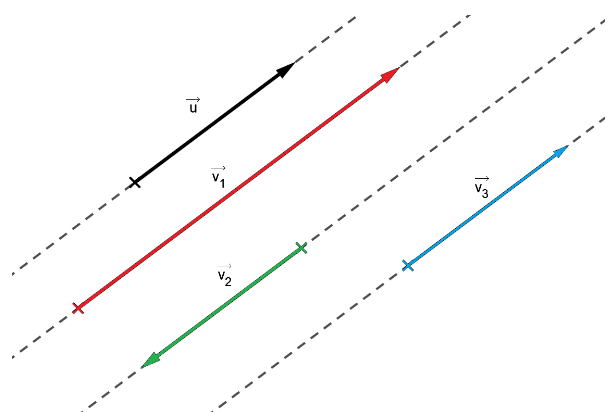
Propriété I.4. *Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par :*
- *sa* ***direction*** *(celle de la droite (AB)) ;*
- *son* ***sens*** *(de A vers B) ;*
- *sa* ***norme*** *(la longueur AB).*

Deux vecteurs sont égaux si, et seulement si, ils ont même direction, sens et norme.

Remarques I.5.
- *On peut noter un vecteur par une lettre surmontée d'une flèche, par exemple $\overrightarrow{u}$, plutôt que d'utiliser deux points.*
- *On note par $\|\overrightarrow{u}\|$ la norme du vecteur $\overrightarrow{u}$ (et donc $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$).*
- *Il existe un unique vecteur de norme 0 : on l'appelle le vecteur nul, noté $\overrightarrow{0}$, il correspond aux vecteurs de la forme $\overrightarrow{AA}$, et est associé à la translation qui ne fait rien (qui change tout point en lui-même).*

Exemple I.6. *Sur la figure ci-contre, les vecteurs :*

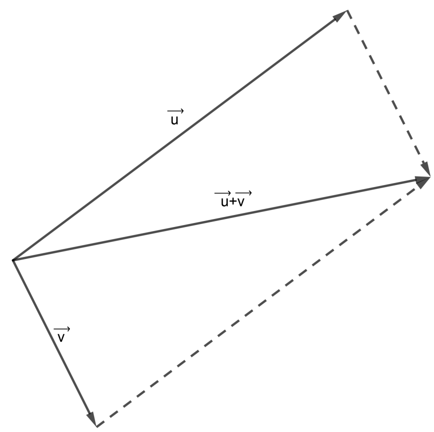
- *$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v_1}$ ont même direction et sens, mais pas même norme ;*
- *$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v_2}$ ont même direction et norme, mais pas même sens ;*
- *$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v_3}$ ont même direction, sens et norme : ils sont égaux.*



II Opérations sur les vecteurs

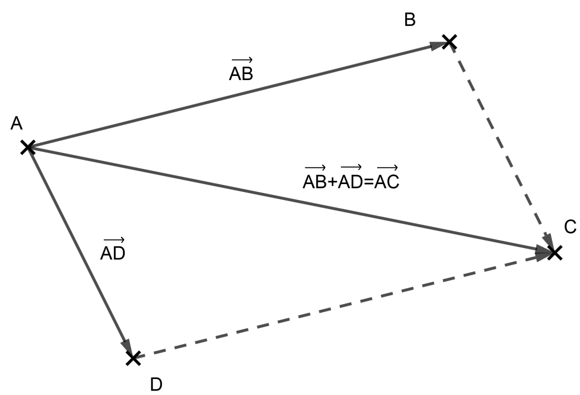
A Somme et différence de vecteurs

Définition II.1. *Étant donnés deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, on définit leur* ***somme****, notée $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$, comme le vecteur associé à la translation obtenue en faisant la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$, puis celle de vecteur $\overrightarrow{v}$.*

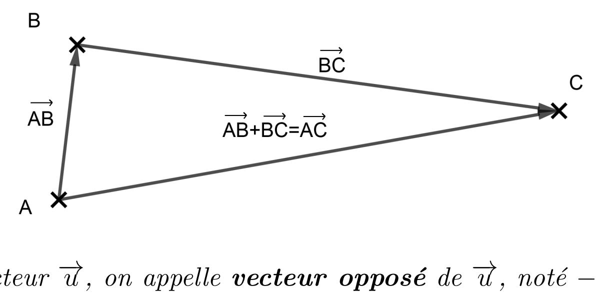


Remarques II.2. • *Avec ces notations, on a : $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}$.*
• *Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$, on a : $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{0}=\overrightarrow{0}+\overrightarrow{u}=\overrightarrow{u}$. Et le vecteur nul $\overrightarrow{0}$ est le seul vecteur satisfaisant cette propriété.*

Propriété II.3. *Si $ABCD$ est un parallélogramme, alors : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.*



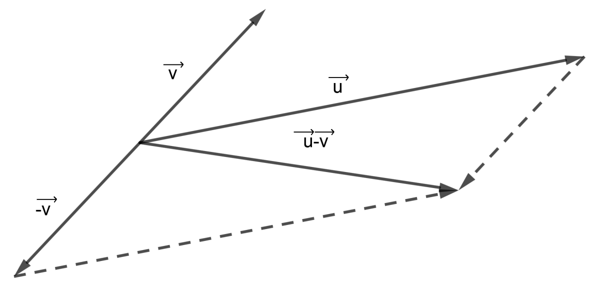
Propriété II.4. *Si A, B, C sont trois points, on a l'égalité suivante, appelée* ***relation de Chasles*** *: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.*



Définition II.5. *Étant donné un vecteur $\overrightarrow{u}$, on appelle* ***vecteur opposé*** *de $\overrightarrow{u}$, noté $-\overrightarrow{u}$, le vecteur qui a même direction et norme que $\overrightarrow{u}$, mais un sens opposé.*

Remarques II.6. • *Si on se donne deux points A et B, alors : $-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$.*
• *Pour un vecteur $\overrightarrow{u}$ donné, on a : $\overrightarrow{u}+(-\overrightarrow{u})=\overrightarrow{0}$ (et le vecteur $-\overrightarrow{u}$ est l'unique vecteur satisfaisant cette propriété).*

Définition II.7. *Étant donnés deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, on définit leur* ***différence****, notée $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$, comme la somme de $\overrightarrow{u}$ et de $-\overrightarrow{v}$: $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}=\overrightarrow{u}+(-\overrightarrow{v})$.*

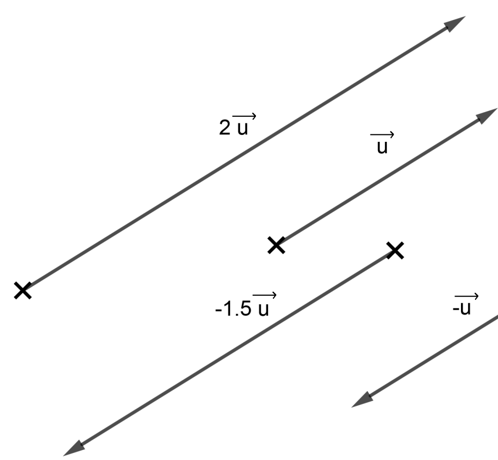


B Multiplication d'un vecteur par un réel

Définition II.8. *Étant donné $\overrightarrow{u}$ un vecteur, et k un nombre réel, on définit le **produit** de $\overrightarrow{u}$ par k, noté $k\overrightarrow{u}$, comme l'unique vecteur qui a :*
– pour direction : celle de $\overrightarrow{u}$;
– pour sens : celle de $\overrightarrow{u}$ si $k \geq 0$, ou la direction opposée si $k < 0$;
– pour norme : $|k|$ fois celle de $\overrightarrow{u}$.

Remarques II.9. • *Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$, ou si $k = 0$, alors : $k\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.*
• *Si $k = -1$, on retrouve l'opposé : $-1 \times \overrightarrow{u} = -\overrightarrow{u}$.*

Exemples II.10.



Propriété II.11. *Si $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs, et k, l deux réels, alors :*

$$(k+l)\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{u} + l\overrightarrow{u} \qquad k(l\overrightarrow{u}) = (kl)\overrightarrow{u} \qquad k(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = k\overrightarrow{u} + k\overrightarrow{v}.$$

Remarque II.12. *Si k est non nul, et $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ vérifient $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$, alors $\overrightarrow{v} = \frac{1}{k}\overrightarrow{u}$.*

Définition II.13. *Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs, on dit qu'il sont **colinéaires** s'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$.*

Remarque II.14. *Le vecteur nul est colinéaire à tout autre vecteur (et c'est le seul vecteur satisfaisant cette propriété). En effet, si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur quelconque :*

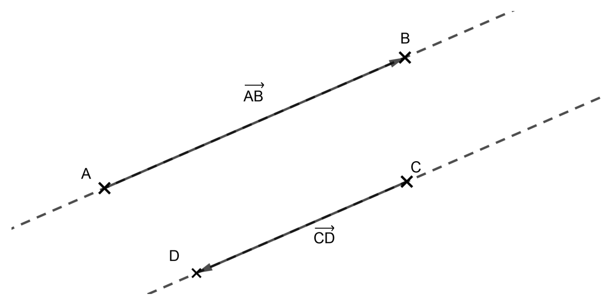
$$\overrightarrow{0} = 0 \times \overrightarrow{u}.$$

Propriété II.15. *Deux vecteurs non nuls sont **colinéaires** si, et seulement si, ils ont la **même direction**.*

III Parallélisme et alignements

Propriété III.1. *Les droites (AB) et (CD) sont* ***parallèles*** *si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont* ***colinéaires****.*

Exemple III.2. *Dans la figure ci-dessous, les droites (AB) et (CD) sont parallèles. On a bien que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, avec : $\overrightarrow{CD} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$.*



Propriété III.3. *Les points A, B, C sont* ***alignés*** *si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont* ***colinéaires****.*

Remarques III.4.
- *Si les points A et B sont confondus, alors : les points A, B, C ne forment que deux points, et le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur nul $\overrightarrow{0}$, qui est colinéaire à tout vecteur. On retrouve ainsi que deux points sont toujours alignés.*
- *Le cas des alignements est un corollaire de la situation de parallélisme, et du postulat des parallèles (le fameux cinquième postulat d'Euclide).*

Propriété III.5. *On considère A, B, I trois points du plan. Alors on a équivalence entre :*
- *I est le milieu de $[AB]$;*
- *$\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{0}$;*
- *$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$;*
- *$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.*

Exemple III.6. *Dans la figure ci-dessous, on a $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{u}$, et donc I est le milieu de $[AB]$:*