Chapitre 5 : Généralités sur les fonctions.

Objectifs du chapitre :

Capacité	Acquisition
Exploiter l'équation $y = f(x)$ d'une courbe représentative pour savoir si un point appartient à cette courbe.	
Résoudre graphiquement des équations ou inéquation à l'aide de courbes représentatives.	
Modéliser une situation avec une fonction.	
Conjecturer la parité d'une fonction.	
Connaître des fonctions de référence (fonction carré, fonction inverse, ~~fonctions affines~~, fonction racine carrée, fonction cube)	
Résoudre des équations et inéquations avec des fonctions de références	
Décrire les variations d'une fonction.	
Comparer des images en utilisant un tableau de variations.	
Déterminer le minimum ou le maximum de fonctions à l'aide d'un tableau de variations ou d'une représentation graphique.	
Utiliser les variations des fonctions carré, inverse, racines carrée et cube.	
Résoudre des inéquations à l'aide des variations.	
Résoudre un problème d'optimisation.	
Déterminer graphiquement le signe d'une fonction.	
Interpréter un tableau de signe.	

Pour être sûr d'être au point avec les différentes notions, je me réfère aux pages 188, 216 et 240 du livre, où sont donnés les exercices associés, et à la fiche sur Pronote, avec les explications et des exercices corrigés.

I Notion de fonction

Définition I.1. *Soit $\mathcal{D}$ un ensemble de nombres réels (par exemple un intervalle, ou une réunion d'intervalles).*
*Définir une **fonction** f sur $\mathcal{D}$, c'est associer à chaque élément x de $\mathcal{D}$ un **unique** réel, que l'on note $f(x)$.*
On dit alors que :

- *$\mathcal{D}$ est **l'ensemble de définition**, ou le **domaine de définition**, de la fonction f ;*
- *si $y = f(x)$, alors y est **l'image** de x, et x est **un antécédent** de y.*

Remarques I.2. • *On note en général : $\begin{array}{rcl} f : \mathcal{D} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$ ou plus simplement $f : x \mapsto f(x)$ (que l'on lit "la fonction f qui à x associe $f(x)$") pour désigner f.*
• *Tout élément de $\mathcal{D}$ a **une seule** image.*
• *Un réel donné peut très bien n'avoir aucun antécédent, comme il peut en avoir un seul ou plusieurs.*

Exemple I.3. *Considérons la fonction $\begin{array}{rcl} f : [0;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$.*
– *$f(4) = \sqrt{4} = 2$, donc 2 est l'image de 4, et 4 est un antécédent de 2 ;*
– *$f(0) = 0$, donc 0 est l'image de 0, et 0 est un antécédent de 0 ;*
– *d'après les résultats sur l'équation "$\sqrt{x} = k$", on peut même donner le cadre général : si y est un réel négatif, il n'a pas d'antécédent par f ; si y est positif ou nul, il a exactement un antécédent (à savoir y^2).*

Exemple I.4. *Considérons la fonction $\begin{array}{rcl} f : [0;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 - 3 \end{array}$.*
– *$f(4) = 4^2 - 3 = 13$, donc 13 est l'image de 4, et 4 est un antécédent de 13 ;*
– *$f(-4) = 13$, donc 13 est aussi l'image de -4, et -4 est un autre antécédent de 13 ;*
– *d'après les résultats sur l'équation "$x^2 = k$", on peut là aussi donner le cadre général : si y est un réel :*
  – *si $y > -3$, alors y a deux antécédents, à savoir $\sqrt{y+3}$ et $-\sqrt{y+3}$;*
  – *si $y = -3$, alors y admet 0 pour seul antécédent ;*
  – *si $y < -3$, alors y n'a pas d'antécédent par f.*

Remarque I.5. *Les deux exemples ci-dessus sont très particuliers, puisqu'on a une expression bien déterminée pour $f(x)$, et que de plus on sait résoudre les équations du type "$f(x) = k$". Parfois, on a seulement les images de certaines valeurs, regroupées dans un **tableau de valeurs**.*

Exemple I.6. *On se donne f une fonction, dont on donne certaines valeurs dans le tableau suivant :*

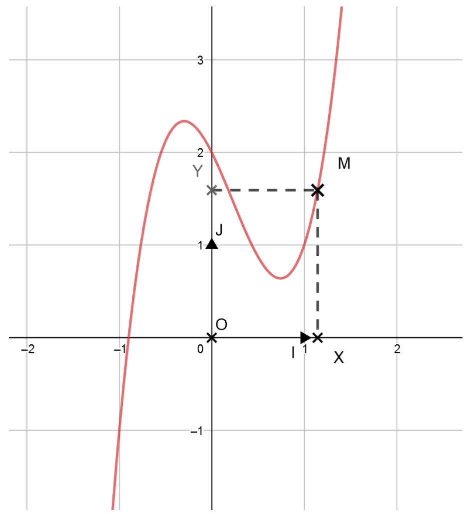
x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	7	2	-1	-2	-1	2	7	14

II Courbes représentatives et résolutions graphiques

A Courbe représentative d'une fonction

Définition II.1. *Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}$. Dans un repère fixé, on appelle **courbe représentative** ou **représentation graphique** de f l'ensemble $\mathscr{C}$ des points du plan de coordonnées $(x, f(x))$, pour $x \in \mathcal{D}$. L'ensemble de ces points forme la **courbe d'équation** $y = f(x)$.*

Exemple II.2. *Dans le repère $(O; I; J)$, le tracé de la fonction $f : x \mapsto 3x^3 - 2x^2 - 2x + 2$ est donné par :*



Propriété II.3. *Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}$, et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative. Si M est un point de $\mathscr{C}$ d'abscisse x, alors :*
– x est un point de $\mathcal{D}$; et M est l'unique point de $\mathscr{C}$ d'abscisse x ;
– l'ordonnée de M est $f(x)$.

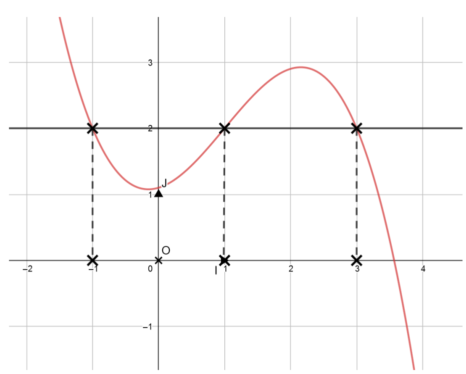
Remarques II.4.
- *la représentation graphique d'une fonction f permet de voir facilement les antécédents et les images par f ; mais les résultats seront approchés ;*
- *un tableau de valeur permet de donner certains points de la courbe d'une fonction, et aide ainsi à la tracer.*

Exemple II.5. *Dans l'exemple précédent, le point M est l'unique point de la courbe d'abscisse $1,15$. Son ordonnée est d'environ $1,6$, ce qui veut dire que $f(1,15) \simeq 1,6$.*

B Résolution graphique d'équations et d'inéquations

Propriété II.6. *Si f est une fonction et k un réel, alors résoudre l'équation "$f(x) = k$" revient à chercher les antécédents de k par f.*
*Graphiquement, cela revient à chercher les abscisses des points de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f qui ont pour ordonnée k, c'est-à-dire des points de $\mathscr{C}$ qui sont **sur la droite** horizontale passant par le point $(0; k)$.*

Exemple II.7. *On cherche à résoudre graphiquement l'équation "$f(x) = 2$", où f est donnée ci-dessous par sa représentation graphique.*



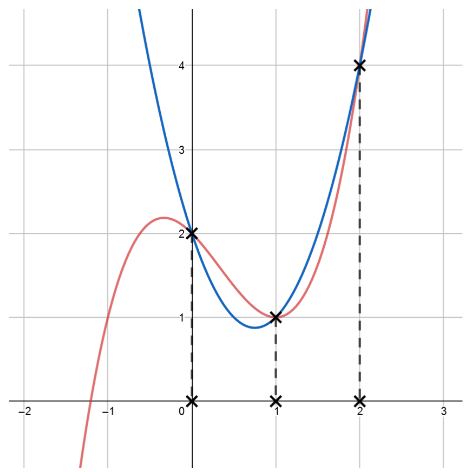
Pour cela, on trace la droite horizontale passant par $(0;2)$: elle coupe la courbe de f en trois points, dont les abscisses sont -1, 1 et 3 : donc l'ensemble solution est $\{-1;1;3\}$.

Propriété II.8. *Si f est une fonction définie sur $\mathcal{D}$ et k un réel, alors résoudre l'inéquation "$f(x) \leq k$" revient à chercher les éléments de $\mathcal{D}$ dont l'image est inférieure ou égale à k.*
*Graphiquement, cela revient à chercher les abscisses des points de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f qui sont **sous la droite** horizontale passant par le point $(0;k)$.*

Exemple II.9. *Dans l'exemple précédente, l'inéquation "$f(x) \leq 2$" a pour ensemble solution :* $[-1;1] \cup [3;+\infty[$.

Propriété II.10. *Si f et g sont deux fonctions définies sur $\mathcal{D}$, alors résoudre l'équation "$f(x) = g(x)$" revient à chercher les éléments de $\mathcal{D}$ ayant même image par f et g.*
Graphiquement, cela revient à chercher les abscisses des points qui sont à la fois sur les courbes représentatives de f et de g.

Exemple II.11. *On cherche à résoudre graphiquement l'équation "$f(x) = g(x)$", où f et g sont données ci-dessous par leurs représentations graphiques (f en rouge et g en bleu).*



On voit que les courbes de f et g se coupent en les trois points de coordonnées $(0,2)$, $(1,1)$ et $(2,4)$. Donc l'ensemble solution de l'équation est : $\{0;1;2\}$.

Propriété II.12. *Si f et g sont deux fonctions définies sur $\mathcal{D}$, alors résoudre l'inéquation "$f(x) \leq g(x)$" revient à chercher les éléments de $\mathcal{D}$ ayant une image plus petite par f que par g.*
Graphiquement, cela revient à chercher les abscisses des points de la courbe représentative de f qui sont en dessous de la courbe représentative de g.

Exemple II.13. *Dans l'exemple précédente, l'inéquation "$f(x) \leq g(x)$" a pour ensemble solution :* $]-\infty;0] \cup [1;2]$.

Remarque II.14. *On peut de même s'intéresser aux inéquations utilisant les signes $<, >, \geq$. Les méthodes de résolutions sont les mêmes.*

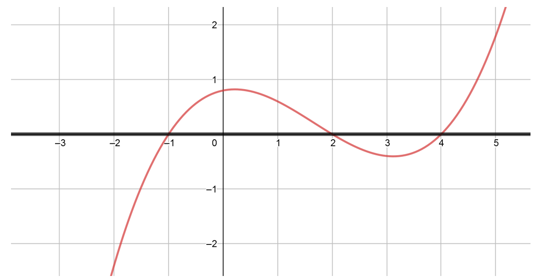
III Propriétés générales des fonctions

A Signe

Définition III.1. *Le **tableau de signe** d'une fonction est un tableau donnant le signe de $f(x)$ selon la valeur de x. On l'établit en résolvant les inéquations "$f(x) > 0$", "$f(x) < 0$" et l'équation "$f(x) = 0$".*

Exemple III.2.

Le tableau de signe de la fonction f donnée par la représentation graphique ci-contre est donné par :



x	$-\infty$		-1		2		4		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

En terme d'équation et d'inéquation, cela veut dire que :
– l'équation "$f(x) = 0$" a pour ensemble solution : $\{-1; 2; 4\}$;
– l'inéquation "$f(x) < 0$" a pour ensemble solution : $]-\infty; -1[\cup]2; 4[$;
– l'inéquation "$f(x) > 0$" a pour ensemble solution : $]-1; 2[\cup]4; +\infty[$.

B Parité

Définition III.3. *Un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ est dit **symétrique** si, dès qu'un nombre lui appartient, son opposé aussi.*

Exemple III.4. *L'ensemble $\mathbb{R}$ est symétrique, tout comme les intervalles de la forme $[-a; a]$ (pour $a > 0$).*

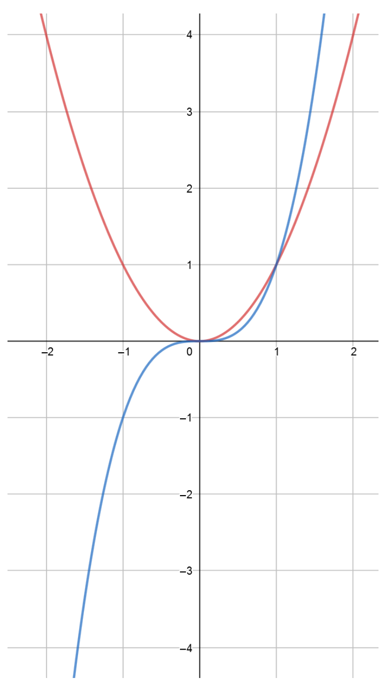
Définition III.5. *Soit f une fonction définie sur un ensemble symétrique $\mathcal{D}$. On dit que f est :*
- *paire : si pour tout $x \in \mathcal{D}$ on a $f(-x) = f(x)$;*
- *impaire : si pour tout $x \in \mathcal{D}$ on a $f(-x) = -f(x)$;*

Propriété III.6. *Soit f une fonction de courbe $\mathscr{C}$. La parité de f se lit graphiquement :*
- *f est paire revient à dire que $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées ;*
- *f est impaire revient à dire que $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport au point d'origine O.*

Exemple III.7. *On considère les fonctions f, g définies sur $\mathbb{R}$ par :*

$$f(x) = x^2 \text{ et } g(x) = x^3$$

On représente ci-dessous les courbes représentatives de f (en rouge) et de g (en bleu). On constate que celle de f est bien symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, tandis que celle de g est symétrique par rapport au point d'origine :



Ceci permet d'avoir graphiquement la parité de f ou de g.
Ici, comme on a une formule pour f et g, on peut le démontrer par le calcul :
• *f est paire : soit $x \in \mathbb{R}$, alors :*

$$f(-x) = (-x)^2 = (-1)^2 \times x^2 = x^2 = f(x).$$

• *g est impaire : soit $x \in \mathbb{R}$, alors :*

$$g(-x) = (-x)^3 = (-1)^3 \times x^3 = -x^3 = -g(x).$$

Remarque III.8. *Il existe des fonctions qui ne sont ni paires, ni impaires, et ce même si l'ensemble de définition est symétrique.*
Par exemple, soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + 1$. Alors :
• $f(1) = 1 + 1 = 2$;
• $f(-1) = -1 + 1 = 0$.
Donc $f(-1)$ n'est ni égal à $f(1)$, ni à $-f(1)$: la fonction f n'est ni paire ni impaire.

C Variations et extremums

Définition III.9. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que :*
• *f est **croissante** sur I si $f(x)$ **augmente** quand x **augmente**, c'est-à-dire que, pour $a, b \in I$:*

$$a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b);$$

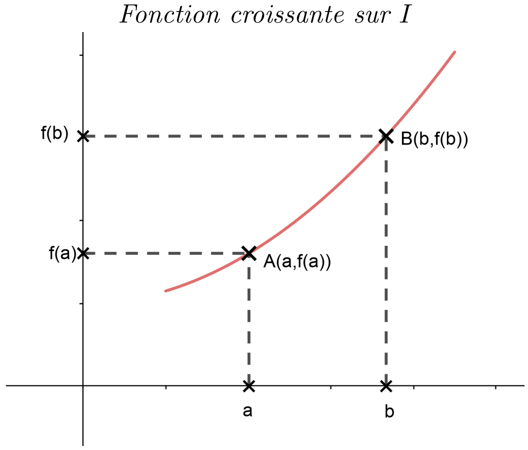
• *f est **décroissante** sur I si $f(x)$ **diminue** quand x **augmente**, c'est-à-dire que, pour $a, b \in I$:*

$$a \leq b \Rightarrow f(a) \geq f(b).$$

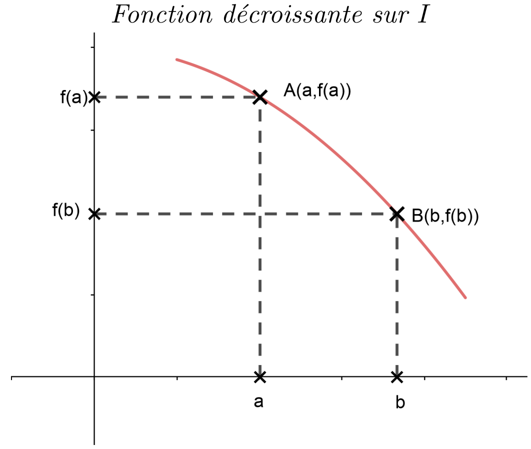
*Dans un cas comme dans l'autre, on dit que f est **monotone**.*

Propriété III.10. *La monotonie d'une fonction se lit graphiquement :*
• *f est croissante si la courbe de f **monte** quand on se déplace **vers la droite** ;*
• *f est décroissante si la courbe de f **descend** quand on se déplace **vers la droite**.*

Fonction croissante sur I



Fonction décroissante sur I



Remarques III.11. • *On parle de même de fonctions **strictement croissantes** ou strictement décroissantes en remplaçant dans la définition les symboles $\leq$ et $\geq$ par $<$ et $>$;*
• *Il existe des fonctions qui ne sont ni croissantes ni décroissantes.*

Définition III.12. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f admet :*
• *M pour **maximum** : s'il existe $a \in I$ tel que $f(a) = M$ et que de plus $f(x) \leq M$ pour tout x de I ;*
• *m pour **minimum** : s'il existe $a \in I$ tel que $f(b) = m$ et que de plus $f(x) \geq m$ pour tout x de I.*
Graphiquement, le maximum (respectivement le minimum) de f est l'ordonnée du point de la courbe de f le plus haut (respectivement le plus bas).
*Un maximum ou un minimum est appelé un **extremum**.*

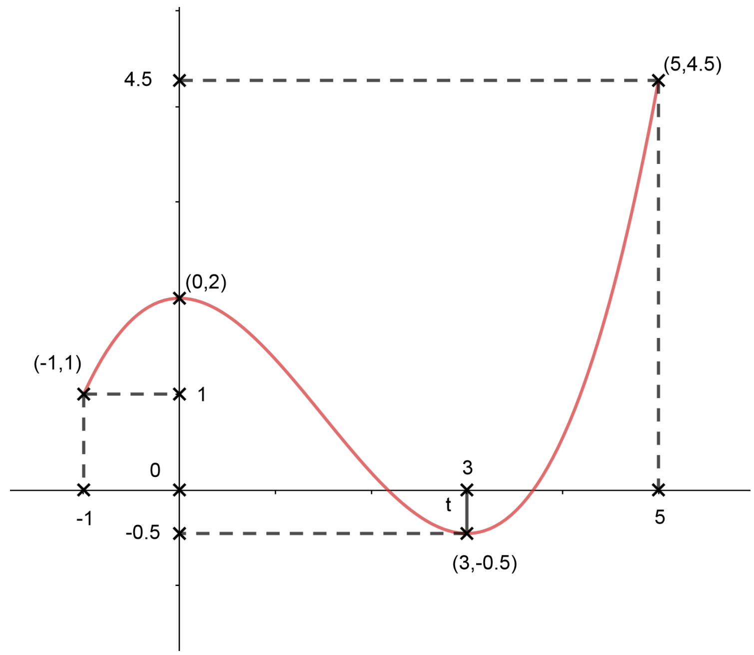
Définition III.13. *Le **tableau de variation** d'une fonction est un tableau donnant les variations f. On y fait figurer :*
– *sur la première lignes : les extrémités des intervalles sur lesquels f est monotone ;*

– *sur la seconde ligne : les variations de f, ainsi que les valeurs extrémales.*

Remarque III.14. *Le tableau de variation d'une fonction est une version schématisée de la courbe représentative. Il permet de lire facilement les **variations**, les **minimums** et les **maximums** de la fonction, et de comparer les images de certains points.*

Exemple III.15. *On considère la fonction f définie sur $[-1;5]$, et dont la courbe représentative est donnée ci-dessous. Son tableau de variations est le suivant :*

x	-1		0		3		5
f	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	-0.5	$\nearrow$	4.5



Sur le tableau, on peut lire les choses suivantes :
– *f est croissante sur $[-1;0]$;*
– *f est décroissante sur $[0;3]$;*
– *f est croissante sur $[3;5]$;*
– *f admet -0.5 comme minimum, atteint en 3 ;*
– *f admet 4.5 comme maximum, atteint en 5.*

Remarque III.16. *Dans l'exemple précédent, on a en 0 un **maximum local** : ce n'est pas vraiment un maximum, mais on pourrait le faire devenir un maximum en diminuant l'ensemble de définition. Par exemple, si f était seulement définie sur $[-1;3]$, alors f aurait un maximum en 0.*

IV Fonctions de références

A La fonction carré

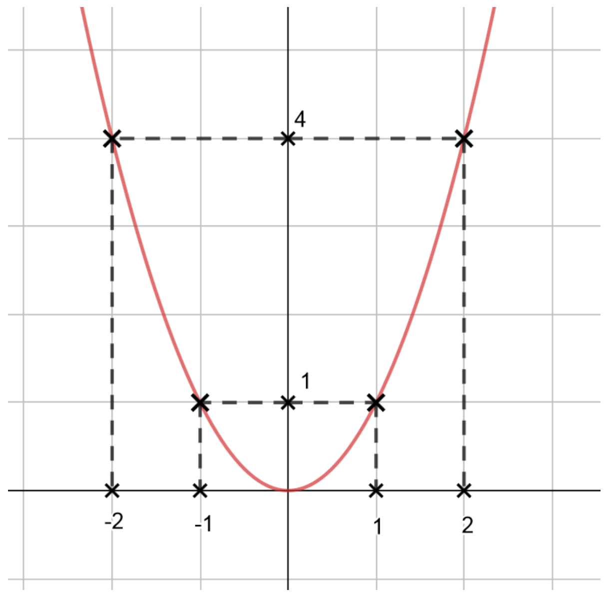
Définition IV.1. *La **fonction carré** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$.*

Propriété IV.2. *La fonction carrée est **paire**. Elle est **strictement décroissante** sur $\mathbb{R}_- =]-\infty; 0]$ et **strictement croissante** sur $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty[$. Son tableau de variation, son tableau de signe, un tableau de valeurs et sa représentation graphique sont donnés ci-dessous :*

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	

x	-2	-1	$-1/2$	0	$1/2$	1	2	3
$f(x)$	4	1	$1/4$	0	$1/4$	1	4	9



B La fonction inverse

Définition IV.3. *La **fonction inverse** est la fonction définie sur $\mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x}$.*

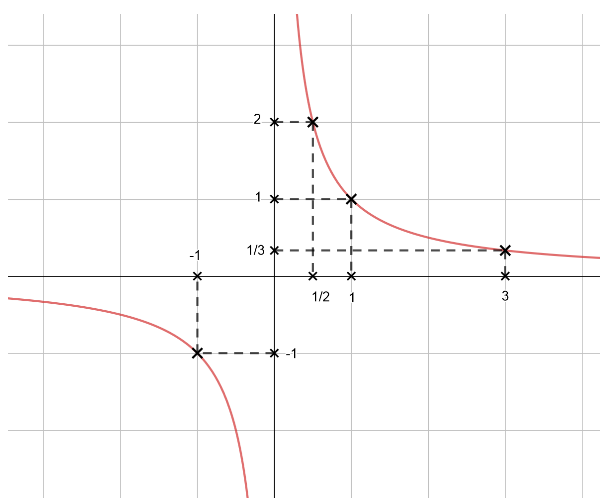
Remarque IV.4. *La fonction inverse **n'est pas définie** en 0.*

Propriété IV.5. *La fonction inverse est **impaire**. Elle est **strictement décroissante** sur $\mathbb{R}^*_- =]-\infty; 0[$ et **strictement décroissante** sur $\mathbb{R}^*_+ =]0; +\infty[$. Son tableau de variation, son tableau de signe, un tableau de valeurs et sa représentation graphique sont donnés ci-dessous :*

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f	0 $\searrow$ $-\infty$		$\|$		$+\infty$ $\searrow$ 0

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$-$	$\|$	$+$	

x	-2	-1	$-1/2$	0	$1/2$	1	2	3
$f(x)$	$-1/2$	-1	-2	✘	2	1	$1/2$	$1/3$



C La fonction racine carrée

Définition IV.6. *La* ***fonction racine carrée*** *est la fonction définie sur* $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty[$ *par :* $f(x) = \sqrt{x}$.

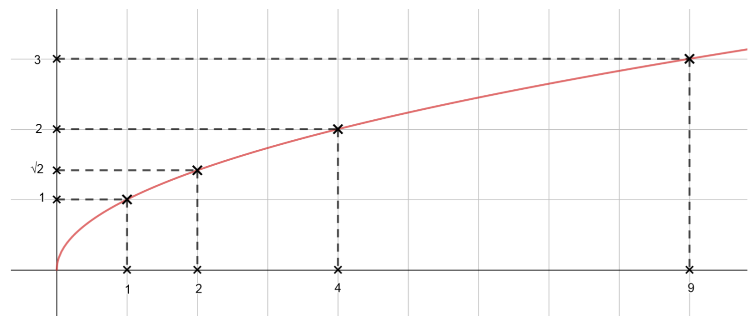
Remarque IV.7. *La fonction racine carrée* ***n'est pas définie*** *sur* $\mathbb{R}_-^* =]-\infty; 0[$. *Son ensemble de définition n'est pas symétrique, et elle n'est donc ni paire ni impaire.*

Propriété IV.8. *La fonction racine carrée est* ***strictement croissante*** *sur* $\mathbb{R}_+$*, et est donc monotone. Son tableau de variation, son tableau de signe, un tableau de valeurs et sa représentation graphique sont donnés ci-dessous :*

x	0	$+\infty$
f	0 $\nearrow$	$+\infty$

x	0	$+\infty$
$f(x)$	0	$+$

x	0	1	2	4	9
$f(x)$	0	1	$\sqrt{2}$	2	3



D La fonction cube

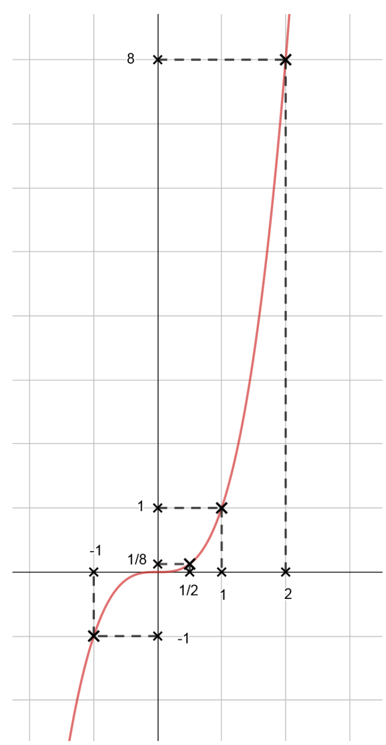
Définition IV.9. *La* ***fonction cube*** *est la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f(x) = x^3$.

Propriété IV.10. *La fonction cube est* ***impaire****. Elle est* ***strictement croissante*** *sur* $\mathbb{R}$*, et est donc monotone. Son tableau de variation, son tableau de signe, un tableau de valeurs et sa représentation graphique sont donnés ci-dessous :*

x	$-\infty$	$+\infty$
f	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

x	-2	-1	$-1/2$	0	$1/2$	1	2	3
$f(x)$	-8	-1	$-1/8$	0	$1/8$	1	8	27



E Positions relatives

Propriété IV.11. *On note $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2, \mathscr{C}_3$ les courbes d'équations respectives $y = x$, $y = x^2$ et $y = x^3$, pour $x \geq 0$. Alors :*
- *les courbes $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2, \mathscr{C}_3$ se coupent en les deux points $(0,0)$ et $(1,1)$;*
- *si $x \in]0;1[$: alors $\mathscr{C}_1$ est au-dessus de $\mathscr{C}_2$, et $\mathscr{C}_2$ est au-dessus de $\mathscr{C}_3$;*
- *si $x \in]1;+\infty[$, alors $\mathscr{C}_3$ est au-dessus de $\mathscr{C}_2$, et $\mathscr{C}_2$ est au-dessus de $\mathscr{C}_1$.*

Démonstration. * L'idée est de comparer les quantités x, x^2 et x^3 en fonction de la valeur de x :
- si $x = 0$: alors $x = x^2 = x^3 = 0$, donc les courbes se coupent en le point $(0,0)$;
- si $x = 1$: alors $x = x^2 = x^3 = 1$, donc les courbes se coupent en le point $(1,1)$;
- si $x \in]0;1[$: on a donc $0 < x < 1$:
  - $x - x^2 = x \times (1-x)$: comme $x > 0$ et $1 - x > 0$, alors $x - x^2 > 0$, donc $\mathscr{C}_1$ est au-dessus de $\mathscr{C}_2$;
  - $x^2 - x^3 = x^2 \times (1-x)$: comme $x^2 > 0$ et $1 - x > 0$, alors $x^2 - x^3 > 0$, donc $\mathscr{C}_2$ est au-dessus de $\mathscr{C}_3$;
- si $x \in]1;+\infty[$: on a donc $1 < x$:
  - $x^2 - x = x \times (x-1)$: comme $x > 0$ et $x - 1 > 0$, alors $x^2 - x > 0$, donc $\mathscr{C}_2$ est au-dessus de $\mathscr{C}_3$;
  - $x^3 - x^2 = x^2 \times (x-1)$: comme $x^2 > 0$ et $x - 1 > 0$, alors $x^3 - x^2 > 0$, donc $\mathscr{C}_3$ est au-dessus de $\mathscr{C}_2$;

□

On représente ci-dessous les courbes $\mathscr{C}_1$ (en rouge), $\mathscr{C}_2$ (en bleu) et $\mathscr{C}_3$ (en vert) :