Chapitre 4 : Inégalités, intervalles, inéquations.

Objectifs du chapitre :

Capacité	Acquisition
Utiliser les intervalles.	
Utiliser des inégalités.	
Résoudre une inéquation du 1er degré.	
Comparer deux quantités en utilisant leur différence.	
Modéliser un problème par une inéquation.	
Calculer et interpréter des valeurs absolues.	

Pour être sûr d'être au point avec les différentes notions, je me réfère à la page 68 du livre, où sont donnés les exercices associés.

I Intervalles et inégalités

Définition I.1. *Si a et b sont deux réels, on note :*
- $a < b$ *(a inférieur à b) si a est plus petit que b ;*
- $a \leq b$ *(a inférieur ou égal à b) si a est plus petit ou égal à b ;*
- $a > b$ *(a supérieur à b) si a est plus grand que b ;*
- $a \geq b$ *(a supérieur ou égal à b) si a est plus grand ou égal à b.*

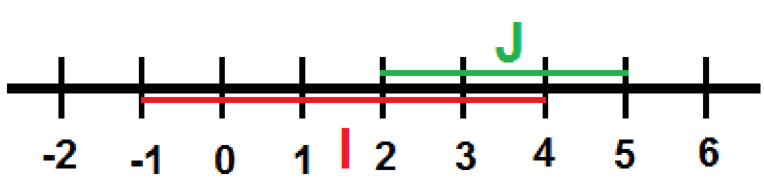
Définition I.2. *Les différents types d'intervalles sont définis par des inégalités, ou des doubles inégalités. Si a, b sont deux réels avec $a < b$, les intervalles possibles sont donnés par le tableau suivant :*

Inégalités	*Intervalle*	*Représentation*
$a \leq x \leq b$	$x \in [a; b]$	
$a < x \leq b$	$x \in]a; b]$	
$a \leq x < b$	$x \in [a; b[$	
$a < x < b$	$x \in]a; b[$	
$a \leq x$	$x \in [a; +\infty[$	
$a < x$	$x \in]a; +\infty[$	
$x \leq b$	$x \in]-\infty; b]$	
$x < b$	$x \in]-\infty; b[$	

Exemples I.3. *L'ensemble des nombres compris entre 3 et 4 est $[3; 4],]3; 4], [3; 4[,]3; 4[$ selon que l'on considère que 3 et 4 sont inclus ou non.*

Définition I.4. *Si I et J sont deux intervalles, on définit :*
- *l'intersection de I et J, notée $I \cap J$, comme l'ensemble des réels à la fois dans I et J ;*
- *l'union de I et J, notée $I \cup J$, comme l'ensemble des éléments dans I ou dans J.*

Remarques I.5.
- *l'intersection de deux intervalles est toujours un intervalle*
- *l'union et l'intersection se lisent bien grâce aux représentations graphiques. Par exemple, si $I = [-1; 4]$ et $J = [2; 5]$, alors : $I \cap J = [2; 4]$ et $I \cup J = [-1; 5]$:*



Exercices : 30 à 38 p.78

II Inéquations et inégalités

A Manipuler des inégalités et des inéquations

Propriété II.1. *Étant donnée une inégalité :*

- *Ajouter ou soustraire une même quantité à chaque membre ne change pas le sens de l'inégalité.*
- *Multiplier ou diviser chaque membre par une même quantité* ***strictement positive*** *ne change pas le sens de l'inégalité.*
- *Multiplier ou diviser chaque membre par une même quantité* ***strictement négative*** *change le sens de l'inégalité.*

Les inégalités ainsi obtenues sont ***équivalentes*** *les unes aux autres.*

Exemple II.2. *On suppose que $a \geq 12$, et on veut en déduire des informations sur $18a - 5$. On a :*

$$\begin{aligned} a \geq 12 \quad &\Leftrightarrow \quad 18a \geq 12 \times 18 = 216 \\ &\Leftrightarrow \quad 18a - 5 \geq 216 - 5 = 211 \end{aligned}$$

et donc : $18a - 5 \geq 211$, c'est-à-dire que $18a - 5 \in [211; +\infty[$.

Définition II.3. *Une inéquation est une inégalité comportant une inconnue.*

Proposition II.4. *Si deux inéquations sont équivalentes, elles ont même ensemble solution.*

Exemple II.5. *Résoudre l'inéquation "$8 + x \leq 7x$".*

$$\begin{aligned} 8 + x \leq 7x \quad &\Leftrightarrow \quad 8 \leq 6x \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \leq x \end{aligned}$$

et donc l'ensemble des solutions est : $[\frac{4}{3}; +\infty[$.

B Manipuler simultanément des inégalités

Propriété II.6. *On peut* ***additionner*** *membre à membres deux inégalités : si $a < b$ et $c < d$, alors $a + c < b + d$.*

Propriété II.7. *Si a, b, c sont tels que $a < b$ et $b < c$, alors $a < c$.*

Remarque II.8. *On n'a pas d'équivalence ici : connaissant l'inégalité finale, on ne peut pas retrouver les inégalités initiales.*

Exemple II.9. *Montrons que $\sqrt{5} > 2$. Supposons par l'absurde que $\sqrt{5} \leq 2$. Alors :*
- *en multipliant l'inégalité par $\sqrt{5}$: $5 = \left(\sqrt{5}\right)^2 \leq 2\sqrt{5}$;*
- *en multipliant l'inégalité par 2 : $2\sqrt{5} \leq 4$.*

Et en combinant ces deux inégalités, on obtiendrait : $5 \leq 4$, ce qui est absurde. Donc on a finalement bien que $\sqrt{5} > 2$.

Remarque II.10. *Pour obtenir des inégalités, on ne peut pas utiliser des "$\simeq$". Il faut raisonner avec des encadrements. Par exemple, on peut utiliser que $2.2 < \sqrt{5} < 2.3$ pour montrer le résultat précédent.*

Exemple II.11. *On suppose que $3 \leq a < 12$, et on veut en déduire un encadrement de $-5a + 2$. On a :*

$$\begin{aligned} 3 \leq a < 12 \quad &\Leftrightarrow \quad -15 \geq -5a > -60 \\ &\Leftrightarrow \quad -13 \geq -5a + 2 > -58 \end{aligned}$$

et donc $-58 < -5a + 2 \leq -13$, c'est-à-dire que : $-5a + 2 \in]-58; -13]$.

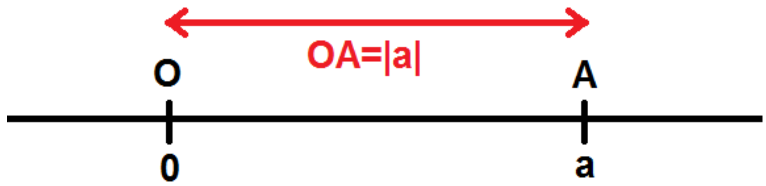
Exercices : 39 à 45 p.79 ; 49 à 54 p.79 ; 61 à 64 p.80 ; 91 à 99 p.82

III Valeurs absolues et inégalités

Définition III.1. *Étant donné un réel a, on définit sa **valeur absolue**, notée $|a|$, comme :*

$$|a| = \left\{ \begin{array}{rcl} a & si & a \geq 0 \\ -a & si & a < 0 \end{array} \right.$$

Remarque III.2. *Sur la droite graduée d'origine O, le point A d'abscisse a est à distance $|a|$ du point O.*

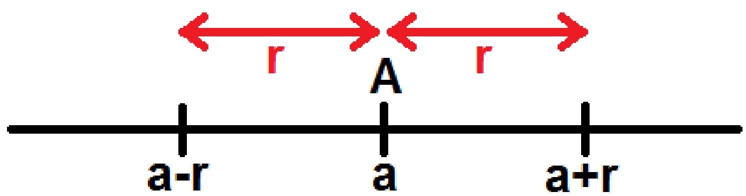


Exemples III.3.
- $|-4| = 4$;
- $|9| = 9$;
- $|\pi - 3| = \pi - 3$ *(car $\pi > 3$, donc $\pi - 3 > 0$)* ;
- $|1 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1$ *(car $1 < \sqrt{2}$, donc $1 - \sqrt{2} < 0$).*

Propriété III.4. *Pour tout réel a, on a : $\sqrt{a^2} = |a|$.*

Propriété III.5. *Si a et b sont les abscisses des points A et B, alors la distance de A à B vaut : $AB = |a - b| = |b - a|$.*

Définition III.6. *Si a est un réel et r un réel positif, l'intervalle $[a - r; a + r]$ est appelé l'intervalle de **centre** a et de **rayon** r.*



Propriété III.7. *L'intervalle de centre a et de rayon r correspond aux abscisses des points à distance au plus r du point d'abscisse a. On a :*

$$x \in [a - r; a + r] \Leftrightarrow |x - a| \leq r.$$

Remarque III.8. *Plus généralement, on a l'équivalence : $|a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b$.*

Exercices : 65 à 71 p.80 ; 100 à 104 p.83