Chapitre 3 : Calcul littéral.

Objectifs du chapitre :

Capacité	Acquisition
Développer, factoriser une expression.	
Utiliser les identités remarquables.	
Transformer des expressions fractionnaires simples.	
Résoudre une équation produit nul.	
Résoudre une équation quotient.	
Résoudre des équations du type $x^2 = k$, $\sqrt{x} = k$, $\frac{1}{x} = k$.	
Résoudre algébriquement un problème associé à une équation.	
Travailler sur des expressions ou des relations simples.	

Pour être sûr d'être au point avec les différentes notions, je me réfère à la page 90 du livre, où sont donnés les exercices associés.

I Développer et factoriser

A La distributivité

Propriété I.1. *Pour des réels a, b, c, d, on a les règles de **distributivité**, données par les égalités suivantes :*

$$\begin{array}{rcl} a \times (b+c) & = & a \times b + a \times c \\ (a+b) \times (c+d) & = & a \times c + a \times d + b \times c + b \times d \end{array}.$$

Remarques I.2. • *Les formes de gauche s'appellent les formes **factorisées**, et celles de droite les formes **développées**.*
• *On **factorise** en allant des formes de droite à celles de gauche, et on **développe** en allant dans l'autre sens.*

B Les identités remarquables

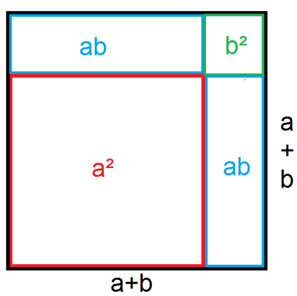
Propriété I.3. *Soient a, b deux réels. On a les identités remarquables suivantes :*
• $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ *;*
• $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ *;*
• $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

Démonstration. * Montrons la première identité remarquable :
Preuve formelle : On utilise les règles de distributivité :

$$\begin{array}{rcl} (a+b)^2 & = & (a+b) \times (a+b) \\ & = & a \times a + a \times b + b \times a + b \times b \\ & = & a^2 + ab + ab + b^2 \\ & = & a^2 + 2ab + b^2 \end{array}.$$

□

Illustration géométrique : Si a et b sont positifs. On considère le carré de côté $(a+b)$ que l'on découpe comme sur la figure ci-dessous en : un carré de côté a ; un carré de côté b ; deux rectangles de côtés a et b.



L'aire du grand carré est égale à la somme des aires des carrés et rectangles qui le composent, et on retrouve : $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$.

Exemple I.4. * *Soient a, b deux réels strictement positifs. Montrons que : $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.*
Pour cela, posons $c = \sqrt{a+b}$ et $d = \sqrt{a} + \sqrt{b}$. On a :
• $c^2 = a + b$ *(par définition) ;*
• $d^2 = a + b + 2\sqrt{ab}$ *(par identité remarquable) ;*
• *donc* $d^2 - c^2 = 2\sqrt{ab} > 0$ *;*
• *donc* $(d-c)(d+c) > 0$, *et comme* $(d+c) > 0$, *alors :* $d - c > 0$.
Et finalement $d > c$, ce qui était le résultat voulu.

Exercices : 105-107 p.60

II Résoudre des équations

A Manipuler des équations

Propriété II.1. *Pour transformer une équation sans changer l'ensemble de ses solutions, on peut :*

1. *développer, factoriser ou réduire les membres ;*
2. *ajouter ou soustraire la même quantité à chaque membre ;*
3. *multiplier ou diviser chaque membre par une même quantité* ***non nulle****.*

Remarques II.2.

1. *Le point le plus important est que toutes les modifications que l'on apporte à l'égalité de départ ne modifient pas l'ensemble solution. Pour cela, il faut prendre garde, quand on fait une modification, à pouvoir "revenir en arrière". On dit alors que les équations considérées sont* ***équivalentes****, et on passe d'une ligne à l'autre en notant le symbole $\Leftrightarrow$.*
2. *En pratique, pour éviter des erreurs de calcul, on vérifiera que la solution trouvée est bien une solution. En revanche, cela n'assure en rien que l'on ait bien trouvé* ***toutes*** *les solutions.*

Exemple II.3. *Résolvons l'équation "$3 \times (2x-2) = 4x+12$" :*

$$\begin{array}{rrcl}
 & 3 \times (2x-2) & = & 4x+12 \\
 & \textit{développer}\downarrow & & \uparrow \textit{factoriser} \\
\Leftrightarrow & 6x-6 & = & 4x+12 \\
 & (-4x)\downarrow & & \uparrow (+4x) \\
\Leftrightarrow & 2x-6 & = & 12 \\
 & (+6)\downarrow & & \uparrow (-6) \\
\Leftrightarrow & 2x & = & 18 \\
 & (\div 2)\downarrow & & \uparrow (\times 2) \\
\Leftrightarrow & x & = & 9
\end{array}$$

Donc l'équation admet pour ensemble solution : $\mathcal{S} = \{9\}$.
Vérification :
- $3 \times (2 \times 9 - 2) = 2 \times (18-2) = 3 \times 16 = 48$;
- $4 \times 9 + 12 = 36 + 12 = 48$

B Quelques équations particulières

Propriété II.4. *Un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un au moins des facteurs est nul.*

Exemple II.5. *Résolvons l'équation "$(3x+1)(2x-4) = 0$"*

$$\begin{array}{rcl}
(3x+1)(2x-4) = 0 & \Leftrightarrow & 3x+1 = 0 \text{ ou } 2x-4 = 0 \\
 & \Leftrightarrow & 3x = -1 \text{ ou } 2x = 4 \Leftrightarrow x = -1/3 \text{ ou } x = 2
\end{array}$$

Donc l'équation admet pour ensemble solution : $\mathcal{S} = \{-\frac{1}{3}; 2\}$.
Vérification :
- $\left(3 \times \frac{-1}{3} + 1\right)\left(2 \times \frac{-1}{3} - 4\right) = 0 \times \frac{-14}{3} = 0$;
- $(3 \times 2 + 1)(2 \times 2 - 4) = 7 \times 0 = 0$.

Exemple II.6. *Résolvons l'équation "$9x^2 - 12x + 4 = 0$" On utilise les identités remarquables pour voir que :*

$$9x^2 - 12x + 4 = (3x)^2 - 2 \times 3x \times 2 + 2^2 = (3x-2)^2$$

Et ainsi :

$$\begin{array}{rcl}
9x^2 - 12x + 4 = 0 & \Leftrightarrow & (3x-2)^2 = 0 \\
 & \Leftrightarrow & 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow 3x = 2 \Leftrightarrow x = 2/3
\end{array}$$

Donc l'équation admet pour seule solution $2/3$.
Vérification : $9 \times (2/3)^2 - 12 \times 2/3 + 4 = 4 - 8 + 4 = 0$, *donc $2/3$ est bien solution.*

Propriété II.7. *On considère l'équation $x^2 = k$:*

- *si $k < 0$: il n'y a pas de solution ;*

- *si* $k = 0$ *: la seule solution est* 0 *;*
- *si* $k > 0$ *: il y a deux solutions, à savoir* $\pm\sqrt{k}$*.*

Exemples II.8.
- *l'équation* $x^2 + 3 = 0$ *n'admet pas de solution :* $x^2 = 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -3$ *;*
- *l'équation* $x^2 + 9 = 25$ *admet pour solutions* ± 4 *:* $x^2 + 9 = 25 \Leftrightarrow x^2 = 25 - 9 = 16$*.*

Exemple II.9. *Développer l'expression* $(x+1)^2 + 3$*, et en déduire les solutions de l'équation : "*$x^2 + 2x + 4 = 0$*".*
En utilisant les identités remarquables, on trouve : $(x+1)^2 + 3 = x^2 + 2x + 1 + 3 = x^2 + 2x + 4$*.*
Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 4 = 0 &\Leftrightarrow (x+1)^2 + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+1)^2 = -3 \end{aligned}$$

et la dernière équation n'a pas de solution, car $-3 < 0$*. Donc il n'y a pas de solution.*

Propriété II.10. *On considère l'équation* $\sqrt{x} = k$ *:*
- *si* $k < 0$ *: il n'y a pas de solution ;*
- *si* $k \geq 0$ *: la seule solution est* k^2*.*

Exemples II.11.
- *l'équation* $\sqrt{x} = 3$ *a pour solution* $x = 3^2 = 9$ *;*
- *l'équation* $\sqrt{x} = \sqrt{2}$ *a pour solution* $x = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$*.*

Propriété II.12. *Un quotient est nul si, et seulement si, son numérateur est nul, et son dénominateur est non nul.*

Exemple II.13. *Résolvons l'équation "*$\frac{3x+1}{2x-4} = 0$*"*

$$\begin{aligned} \tfrac{3x+1}{2x-4} = 0 &\Leftrightarrow 3x + 1 = 0 \text{ et } 2x - 4 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x = -1/3 \text{ et } x \neq 2 \end{aligned}$$

Donc la seule solution de l'équation est $\frac{-1}{3}$*.*

Propriété II.14. *On considère l'équation* $\frac{1}{x} = k$ *:*
- *si* $k = 0$ *: il n'y a pas de solution ;*
- *si* $k \neq 0$ *: la seule solution est* $\frac{1}{k}$*.*

Exemple II.15.
- *l'équation* $\frac{1}{x} = 3$ *a pour solution* $x = \frac{1}{3}$ *;*
- *l'équation* $\frac{1}{x} = \frac{1}{2}$ *a pour solution* $x = 2$ *;*
- *l'équation* $\frac{1}{x} = \frac{3}{4}$ *a pour solution* $x = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$*.*