Chapitre 2 : Repérage et problèmes de géométrie.

Objectifs du chapitre 2 :

Capacité	En début de chapitre	En cours de chapitre	En fin de chapitre
Utiliser le projeté orthogonal.			
Calculer des longueurs, des aires et des volumes.			
Utiliser les coordonnées pour calculer des longueurs.			
Calculer les coordonnées du milieu d'un segment.			

Pour être sûr d'être au point avec les différentes notions, je me réfère à la page 114 du livre, où sont donnés les exercices associés.

Rappels de géométrie

Cercles, triangles et quadrilatères particuliers

Exercices : 19-25 p.122-123 ; 43-46 p.124

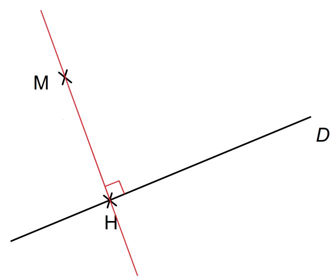
Calculs de longueurs, aires et volumes

Exercices : 26-27 p.123 ; 47-50 p.125

I Éléments de géométrie

A Le projeté orthogonal

Définition I.1. *Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan, et M un point du plan. On appelle **projeté orthogonal** de M sur $\mathcal{D}$ le point H intersection de $\mathcal{D}$ avec la perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par M.*



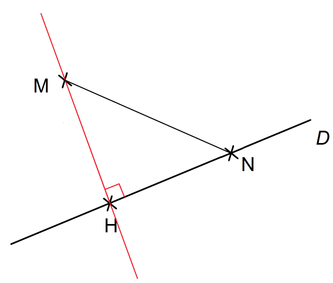
Remarque I.2. *Si M est sur la droite $\mathcal{D}$, alors M coïncide avec son projeté orthogonal.*

Définition I.3. *Si H est le projeté orthogonal du point M sur la droite $\mathcal{D}$, alors on définit la **distance** du point M à la droite $\mathcal{D}$ comme la longueur HM.*

Propriété I.4. *Le projeté orthogonal H du point M sur une droite $\mathcal{D}$ est l'**unique point** de $\mathcal{D}$ le plus proche de M.*

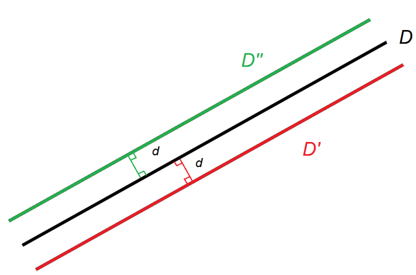
Démonstration. * Soit N un point de $\mathcal{D}$ distinct de H. On veut montrer que $MN > MH$. On distingue selon la position de M par rapport à $\mathcal{D}$:

- si M appartient à $\mathcal{D}$: alors $MH = 0$. Comme N est distinct de H, donc de M, on a : $MN > 0$. Et ainsi : $MN > MH$;
- si M n'appartient pas à $\mathcal{D}$: alors le triangle MNH est un triangle rectangle en H. Par théorème de Pythagore, on a donc : $MN^2 = MH^2 + HN^2$. Comme $HN^2 > 0$, on déduit que : $MN^2 > MH^2$, et finalement $MN > MH$.



□

Propriété I.5. *Étant donnée une droite $\mathcal{D}$ et une distance fixée d, l'ensemble des points à distance d de $\mathcal{D}$ est la réunion de deux droites, parallèles à $\mathcal{D}$, situées de part et d'autre de $\mathcal{D}$.*

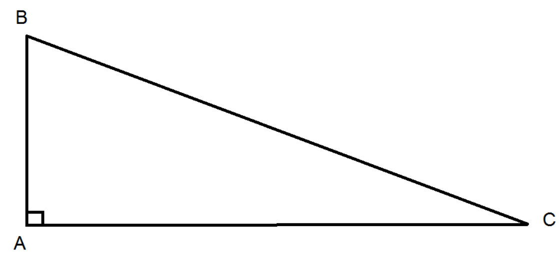


Exercices : 28-31 p.123 ; 39-42 p.124

B Trigonométrie

Définition I.6. *Soit ABC un triangle rectangle en A. On définit :*

- *le **cosinus** de l'angle $\widehat{ABC}$, noté $\cos(\widehat{ABC})$, comme le rapport des longueurs du côté adjacent et de l'hypoténuse :* $\cos(\widehat{ABC}) = \dfrac{AB}{BC}$;
- *le **sinus** de l'angle $\widehat{ABC}$, noté $\sin(\widehat{ABC})$, comme le rapport des longueurs du côté opposé et de l'hypoténuse :* $\sin(\widehat{ABC}) = \dfrac{AC}{BC}$;
- *la **tangente** de l'angle $\widehat{ABC}$, notée $\tan(\widehat{ABC})$, comme le rapport des longueurs du côté opposé et du côté adjacent :* $\tan(\widehat{ABC}) = \dfrac{AC}{AB}$;



Remarque I.7. *Dans le triangle ABC rectangle en A, le cosinus, le sinus et la tangente de l'angle $\widehat{ABC}$ sont reliés par la relation :*

$$\tan(\widehat{ABC}) = \frac{\sin(\widehat{ABC})}{\cos(\widehat{ABC})}.$$

Exemple I.8. *Si $\widehat{ABC} = 45°$, alors le triangle ABC est isocèle rectangle en A. On trouve alors : $AB = BC$ et $BC = \sqrt{2} \times AB$. Et ainsi : $\cos(45°) = \sin(45°) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\tan(45°) = 1$.*

Exemple I.9. *Selon la valeur de l'angle $\widehat{ABC}$, le sinus, le cosinus et la tangente sont données par le tableau suivant :*

$\widehat{ABC}$	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin(\widehat{ABC})$	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$
$\cos(\widehat{ABC})$	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$
$\tan(\widehat{ABC})$	$\frac{0}{1} = 0$	$\frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = 1$	$\frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$	*non défini*

Propriété I.10. *Dans le triangle ABC rectangle en A, on a : $\cos^2(\widehat{ABC}) + \sin^2(\widehat{ABC}) = 1$.*

Démonstration. * Par définition, on a :

$$\left(\cos(\widehat{ABC})\right)^2 + \left(\sin(\widehat{ABC})\right)^2 = \left(\frac{AB}{BC}\right)^2 + \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{BC^2}.$$

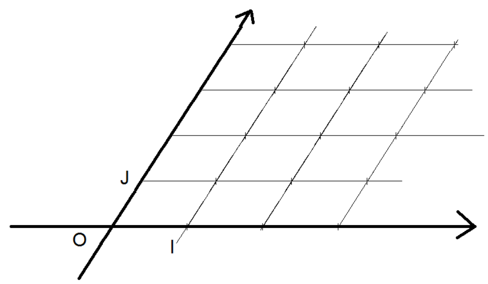
Comme ABC est rectangle en A, par le théorème de Pythagore, on a : $AB^2 + AC^2 = BC^2$.
Et finalement : $\left(\cos(\widehat{ABC})\right)^2 + \left(\sin(\widehat{ABC})\right)^2 = \dfrac{BC^2}{BC^2} = 1$. □

Exercices : 51-53 p.125

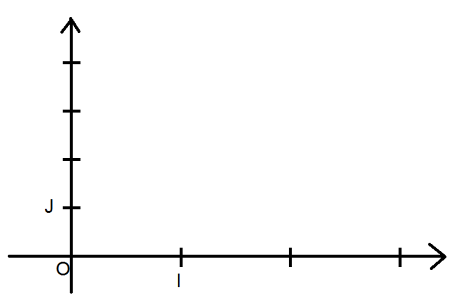
II Repères et coordonnées

A Repères

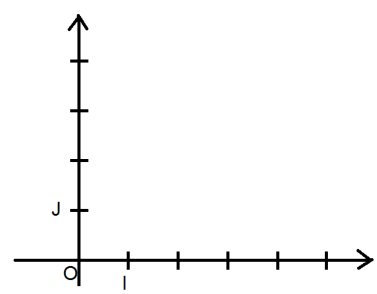
Définition II.1. *Étant donnés trois points non alignés du plan* $0, I, J$*, on leur associe le* ***repère*** *noté* (O, I, J)*, où :*
- *le point* O *est l'****origine*** *du repère ;*
- *la droite* (OI) *est l'axe des* ***abscisses*** *; elle est graduée régulièrement, avec* O *pour la graduation* 0 *et* I *pour la graduation* 1 *;*
- *la droite* (OJ) *est l'axe des ordonnées ; elle est graduée régulièrement, avec* O *pour la graduation* 0 *et* J *pour la graduation* 1*.*



Définition II.2. *Le repère* $(0, I, J)$ *est dit :*
– ***orthogonal*** *si le triangle* OIJ *est rectangle en* 0 *;*
– ***orthonormé*** *si le triangle* OIJ *est isocèle rectangle en* O*.*



Repère orthogonal.



Repère orthonormé.

B Coordonnées

Propriété II.3. *Étant donné un repère, tout point* M *du plan est repéré par* ***un unique couple*** (x_M, y_M)*, appelées* ***coordonnées*** *du point* M*. Le réel* x_M *est l'abscisse de* M*, et* y_M *son ordonnée.*

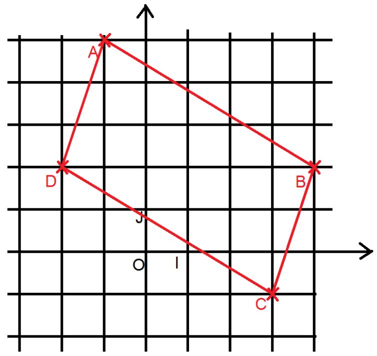
Exemple II.4. *Dans le repère* (O, I, J) *:*
– *le point* O *a pour coordonnées* $(0, 0)$ *;*
– *le point* I *a pour coordonnées* $(1, 0)$ *;*
– *le point* J *a pour coordonnées* $(0, 1)$*.*

Propriété II.5. *Dans un repère* ***quelconque****, si* A *et* B *ont pour coordonnées respectives* (x_A, y_A) *et* (x_B, y_B)*, alors le milieu de* $[AB]$ *a pour coordonnées :* $\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$.

Propriété II.6. *Dans un repère* ***orthonormé****, si* A *et* B *ont pour coordonnées respectives* (x_A, y_A) *et* (x_B, y_B)*, alors la longueur* AB *du segment* $[AB]$ *est donnée par :*

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Exemple II.7. *On considère les points* $A(-1, 5), B(4, 2), C(3, -1), D(-2, 2)$*, supposées prises dans un repère orthonormé. On obtient la figure ci-dessous :*



Alors $ABCD$ est un parallélogramme car on trouve : $AB = DC = \sqrt{34}$ et $AD = BC = \sqrt{10}$. En revanche, ce n'est pas un losange (donc pas un carré) car il a des côtés consécutifs de tailles différentes. Ce n'est pas non plus un rectangle car :

- ***Méthode 1 :*** *on trouve $AC = 2\sqrt{13} \neq 6 = BD$, donc les diagonales de $ABCD$ n'ont pas la même longueur.*
- ***Méthode 2 :*** *on trouve $AC^2 = 52 \neq 25 + 10 = AB^2 + BC^2$, donc par le théorème de Pythagore l'angle $\widehat{ABC}$ n'est pas un angle droit (et on pourrait montrer de même que n'importe quel autre de ses sommets ne forme pas un angle droit, mais un seul suffit).*

Si le repère n'est plus orthonormé, on ne peut rien dire sur les longueurs, car la propriété précédente ne s'applique plus. On ne peut donc pas dire s'il s'agit d'un losange, un rectangle ou un carré. Mais on peut voir qu'on a toujours un parallélogramme car :

- *le milieu de la diagonale $[AC]$ a pour coordonnées : $(1, 2)$;*
- *le milieu de la diagonale $[BD]$ a pour coordonnées : $(1, 2)$.*

Donc les diagonales de $ABCD$ se coupent en leurs milieux.

Exercices : 32-36 p.123 ; 54-72 p.125-126