Chapitre 1 : Manipuler les nombres réels.

Objectifs du chapitre :

Capacité	En début de chapitre	En cours de chapitre	En fin de chapitre
Utiliser les notions de multiples, diviseurs et nombres premiers.			
Calculer avec les puissances.			
Calculer avec des quotients.			
Calculer avec des racines carrées.			
Déterminer la nature d'un nombre.			

Pour être sûr d'être au point avec les différentes notions, je me réfère à la page 42 du livre, où sont donnés les exercices associés.

I Les entiers

A Multiples et diviseurs

Définition I.1. *Soient a et b deux nombres entiers. S'il existe un entier c tel que $a = bc$, on dit que :*
- *b **divise** a, ou que b est un **diviseur** de a ;*
- *a est un **multiple** b, ou que a est divisible par b.*

Exemples I.2. • *On a : $37 \times 3 = 111$, donc 111 est multiple un multiple de 3 et de 37.*
- *L'ensemble des diviseurs de 6 est : $\{1, 2, 3, 6\}$.*

Remarques I.3. • *Dire que a est un multiple de b, cela revient à dire que le reste de la division euclidienne de a par b est nul.*
- *Si $a = bc$, alors a est aussi un multiple de c.*
- *Un entier a est toujours divisible par 1 et lui-même.*
- *L'entier 0 est le seul nombre multiple de tout autre entier.*

Propriété I.4. *Si a est un entier, la somme de deux multiples de a est un multiple de a.*

Exemple I.5. ** Montrons le résultat pour $a = 10$.*
Soient b et c des multiples de 10. Alors il existe des entiers d et e tels que : $b = 10 \times d$ et $c = 10 \times e$. Et alors :

$$b + c = 10 \times d + 10 \times e = 10 \times (d + e).$$

On pose $f = d + e$. Alors f est un entier tel que : $b + c = 10 \times f$.
Donc $b + c$ est un multiple de 10.

Définition I.6. *Un entier a est dit :*
- ***pair** si, et seulement si, il existe un entier b tel que $a = 2b$;*
- ***impair** si, et seulement si, il existe un entier b tel que $a = 2b + 1$.*

Remarque I.7. *Un entier est toujours soit un nombre pair, soit un nombre impair, **et jamais les deux !**.*

Propriété I.8. *Si a est un nombre impair, alors a^2 est un nombre impair.*

Démonstration. * Soit a un entier impair. On considère b entier tel que $a = 2b + 1$. Alors on a :

$$\begin{array}{rcl} a^2 & = & (2b+1)^2 \\ & = & (2b+1) \times (2b+1) \\ & = & (2b) \times (2b) + (2b) \times 1 + 1 \times (2b) + 1 \times 1 \\ & = & 2 \times (2b^2 + 2b) + 1 \end{array}$$

On pose $B = 2b^2 + 2b$. Alors B est un entier tel que : $a^2 = 2B + 1$.
Donc a^2 est un nombre impair. □

Propriété I.9. *Un entier a est un multiple de :*
- *2 s'il se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8 ;*
- *3 si le nombre formé par la somme de ses chiffres est un multiple de 3 ;*
- *4 si le nombre formé de ses deux derniers chiffres est un multiple de 4 ;*
- *5 s'il se termine par 0 ou 5 ;*
- *9 si le nombre formé par la somme de ses chiffres est un multiple de 9.*

Exercices : 28-31 p.54 ; 66-74 p.57

B Nombres premiers

Définition I.10. *Un nombre **premier** est un nombre entier qui n'a que deux diviseurs : 1 et lui-même.*

Remarques I.11. • *l'entier 1 n'est pas un nombre premier, car un ne possède qu'un seul diviseur ;*
- *il existe une infinité de nombres premiers.*

Exemple I.12. *Les premiers nombres premiers sont : $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, \ldots\}$.*

Propriété I.13. *Soit a un entier autre que 1 qui n'est pas premier. Alors son plus petit diviseur différent de 1 est **un nombre premier** qui est **plus petit ou égal** à $\sqrt{a}$.*

Exemples I.14. 37 *est premier, car* $\sqrt{37} \simeq 6,1$, *et* 37 *n'est multiple d'aucun nombre premier plus petit ou égal à* 6 *(à savoir : $2, 3, 5$).*

Propriété I.15. *Tout nombre entier peut se décomposer de manière **unique** sous la forme d'un produit de nombres premiers.*

Exemples I.16. *On a les écritures suivantes en produits de nombres premiers :*
- $649 = 11 \times 59$ *;*
- $293 = 293$ *;*
- $1758 = 2 \times 3 \times 293$ *;*
- $2020 = 2 \times 2 \times 5 \times 101$.

Exercices : 32-38 p.54 ; 39-44 p.55

C Fractions

Définition I.17. *Une fraction est dite **irréductible** si le numérateur et le dénominateur admettent 1 pour seul diviseur commun.*

Propriété I.18. *Toute fraction peut s'écrire sous forme d'une fraction irréductible.*

Exemples I.19. • *la fraction* $\dfrac{18}{121}$ *est irréductible ;*
• *la fraction* $\dfrac{18}{27}$ *n'est pas irréductible, car* 18 *et* 27 *sont divisibles par* 9 *; sa forme irréductible est :* $\dfrac{2}{3}$.

Propriété I.20. *Les fractions obéissent aux règles de calculs suivantes :*
Somme : $\dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c} = \dfrac{a+b}{c}$ *et il faut réduire au **même dénominateur** deux fractions pour les additionner ;*
Produit : $\dfrac{a}{c} \times \dfrac{b}{d} = \dfrac{a \times b}{c \times d}$ *;*
Quotient : $\dfrac{a}{c} \div \dfrac{b}{d} = \dfrac{a}{c} \times \dfrac{d}{b} = \dfrac{a \times d}{c \times b}$ *qui n'a de sens que si* $b \neq 0$.

Exemples I.21. *On a les égalités suivantes :*
- $-\dfrac{13}{8} + \dfrac{7}{24} = -\dfrac{4}{3}$ *;*
- $\dfrac{9}{16} - \dfrac{7}{12} = -\dfrac{1}{48}$ *;*
- $\dfrac{123}{17} \times \dfrac{102}{41} = 18$ *;*
- $\dfrac{23}{8} - \dfrac{7}{3} \div \dfrac{4}{5} = -\dfrac{1}{24}$
- $\dfrac{\frac{1}{19}}{4} = \dfrac{1}{76} \neq \dfrac{1}{\frac{19}{4}} = \dfrac{4}{19}$.

Exercices : 51-55 + 64 p.55-56 ; 88-95 p.58-59

II Puissances entières d'un nombre

Définition II.1. *Soit n un entier positif non nul, et a un nombre réel. On écrit alors :* $a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs}}$.

Si a est non nul, on définit : $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n} = \dfrac{1}{\underbrace{a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs}}}$.

Par convention, on pose : $a^0 = 1$ *(pour toute valeur de a).*
*La quantité a^n est appelé **puissance** n**-ème** de a, et n est appelé l'**exposant**.*

Exemples II.2. • $256 = 2^8$;
• $6^3 = 216$;
• $5^{-3} = \dfrac{1}{5^3} = \dfrac{1}{125} = 0,008$.

Propriété II.3. *Soient a et b deux nombres réels, et n et m des entiers relatifs. Alors :*
• $(a \times b)^n = a^n \times b^n$;
• $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$;
• $a^n \times a^m = a^{n+m}$;
• $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$;
• $(a^n)^m = a^{n \times m}$.

Exemples II.4. • $2^{17} \times 2^{-16} = 2^1 = 2$;
• $5^2 \times 5^3 = 5^5 = 3125$;
• $4^4 = (2^2)^4 = 2^8 = 256$;
• $\dfrac{a^3}{a^{-5}} = a^{3+5} = a^8$.

Exercices : 45-50 p.55 ; 75-87 p.57-58

III Racines carrée

Définition III.1. *Soit a un réel **positif ou nul**. La **racine carrée** de a, notée $\sqrt{a}$, est l'unique nombre réel positif ou nul tel que :* $(\sqrt{a})^2 = a$.

Remarque III.2. *Le carré d'un nombre réel est toujours positif, donc la racine carré d'un nombre négatif n'existe pas.*

Exemples III.3. • $\sqrt{9} = 3$;
• *si a est un réel :* $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a \leq 0 \end{cases}$

Propriété III.4. *Si a est b sont des réels positifs ou nuls, alors :*
• $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$;
• $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Démonstration. * Si a et b sont des réels positifs ou nuls, alors :
• $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ sont positifs ou nuls, donc $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ aussi ;
• $\left(\sqrt{a} \times \sqrt{b}\right)^2 = (\sqrt{a})^2 \times \left(\sqrt{b}\right)^2 = a \times b$.
Par définition de $\sqrt{a \times b}$, on a donc bien l'égalité voulue. □

Remarque III.5. *En pratique, si a est une fraction, on essaiera d'écrire $\sqrt{a}$ sous la forme :* $\dfrac{b}{c} \times \sqrt{d}$, *où b, c, d sont des entiers, la fraction $\dfrac{b}{c}$ est irréductible, et d est le plus petit possible.*

Exemples III.6. • $\sqrt{12} \times \sqrt{3} = \sqrt{36} = 6$;
• $\sqrt{\dfrac{99}{25}} = \dfrac{\sqrt{99}}{\sqrt{25}} = \dfrac{\sqrt{9} \times \sqrt{11}}{\sqrt{25}} = \dfrac{3}{5} \times \sqrt{11}$;
• $\sqrt{\dfrac{16}{5}} = \dfrac{\sqrt{16}}{\sqrt{5}} = \dfrac{4}{\sqrt{5}} = \dfrac{4 \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \dfrac{4}{5} \times \sqrt{5}$.

Exercices : 56-63 + 65 p.56 ; 96-104 p.59-60

IV Les ensembles de nombres

Définition IV.1. *On note :*
- $\mathbb{N}$ *l'ensemble des* ***entiers naturels****, c'est-à-dire des entiers positifs ou nuls :* $\{0; 1; 2; 3; \dots\}$ *;*
- $\mathbb{Z}$ *l'ensemble des* ***entiers relatifs****, c'est-à-dire de tous les entiers :* $\{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$ *;*
- $\mathbb{D}$ *l'ensemble des* ***nombres décimaux****, c'est-à-dire des quotients de la forme :* $\dfrac{a}{10^n}$*, où* a *est un entier relatif et* n *est un entier naturel ;*
- $\mathbb{Q}$ *l'ensemble des* ***nombres rationnels****, c'est-à-dire des quotients de la forme :* $\dfrac{a}{b}$*, où* a *et* b *sont des entiers relatifs, et* $b \neq 0$ *;*
- $\mathbb{R}$ *l'ensemble des* ***nombres réels****, c'est-à-dire l'ensemble des abscisses d'une droite graduée, qu'on appelle alors la* ***droite des réels****.*

Propriété IV.2. *Les ensembles* $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ *sont différents, et sont inclus les uns dans les autres de la manière suivante :* $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$*.*

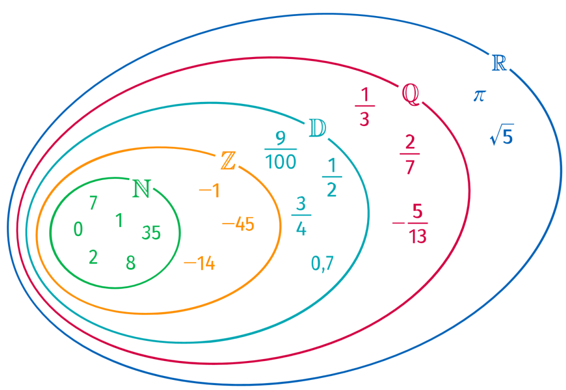
Propriété IV.3. • *le rationnel* $1/3$ *n'est pas décimal ;*
- *le réel* $\sqrt{2}$ *n'est pas rationnel.*

Preuve que $1/3$ *n'est pas décimal :* * On procède par l'absurde. Supposons que $1/3$ est décimal. Il existe deux entiers a et n, avec n positif ou nul, tels que : $\dfrac{1}{3} = \dfrac{a}{10^n}$, c'est-à-dire que : $3 \times a = 10^n$.
On déduit que 3 est un diviseur de 10^n, ce qui est impossible car l'écriture de 10^n est constitué de une fois 1 et de n fois 0, donc la somme des chiffres de 10^n fait 1, ce qui n'est pas un multiple de 3.
Donc $1/3$ n'est pas décimal. □

Preuve que $\sqrt{2}$ *n'est pas rationnel :* * On procède par l'absurde. Supposons que $\sqrt{2}$ soit rationnel. On peut donc écrire $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$, où a et b sont des entiers, et n'ont aucun diviseur en commun autre que 1.
Comme $\sqrt{2} = a/b$, en élevant au carré on déduit que : $a^2 = 2 \times b^2$. Donc a^2 est pair, donc a est pair (par contraposée de "si a est impair, alors a^2 est impair").
Comme a est pair, on écrit $a = 2 \times c$, pour un entier c. On déduit donc que : $a^2 = 4 \times c^2$, puis : $b^2 = 2 \times c^2$. Donc b^2 est pair, donc b est pair.
Et ainsi a et b sont tous les deux divisibles par 2, ce qui est impossible. □

Définition IV.4. *Les réels qui ne sont pas des nombres rationnels sont appelés des nombres irrationnels.*

Propriété IV.5. *On a le diagramme de Venn (ou "diagramme patates") suivant :*



Exercices : 105-107 p.60