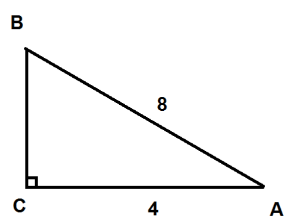
Corrigé exercices géométrie

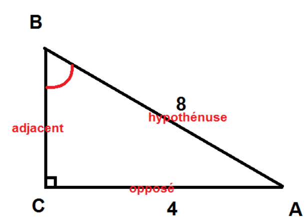
Exercice 51 p.125

L'idée de la trigonométrie est de dire que, dans un triangle rectangle, il suffit de connaître un angle et une longueur pour tout connaître. C'est donc une version un peu plus puissante que le théorème de Pythagore, qui nécessitait de connaître deux longueurs. Les fonctions trigonométriques permettent en fait de relier deux longueurs à un angle. Selon ce que l'on cherche à calculer (s'il s'agit d'une longueur ou d'un angle), on utilise les fonctions $\cos, \sin, \tan$ ou $\arccos, \arcsin, \arctan$.

On part de la situation suivante :



1. Pour calculer l'angle $\widehat{ABC}$, on commence par marquer l'angle dans le triangle, puis on identifie les côtés connus :



Par rapport à l'angle $\widehat{ABC}$, on connaît donc le côté opposé et l'hypothénuse. La fonction trigonométrique qui fait intervenir ces quantités est sin, et on a l'égalité :

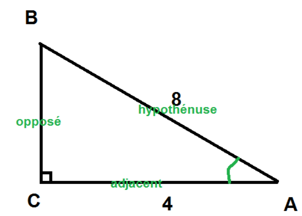
$$\sin(\widehat{ABC}) = \frac{\text{opposé}}{\text{hypothénuse}} = \frac{AC}{AB} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

et ainsi : $\widehat{ABC} = \arcsin(1/2) = 30°$.

2. Pour calculer l'angle $\widehat{CAB}$, on peut invoquer que la somme des angles d'un triangle fait 180°. On trouve alors :

$$\widehat{CAB} = 180° - \widehat{ACB} - \widehat{CBA} = 180° - 90° - 30° = 60°.$$

On peut aussi utiliser la même méthode qu'en 1., ce qui donne la figure suivante :



Par rapport à l'angle $\widehat{CAB}$, on connaît donc le côté adjacent et l'hypothénuse. La fonction trigonométrique qui fait intervenir ces quantités est cos, et on a l'égalité :

$$\cos(\widehat{CAB}) = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypothénuse}} = \frac{AC}{AB} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

et ainsi : $\widehat{ABC} = \arccos(1/2) = 60°$.

On trouve (heureusement !) le même résultat par les deux méthodes.

3. Pour calculer la longueur de BC, on peut utiliser le théorème de Pythagore, ou utiliser à nouveau la trigonométrie (comme les angles sont connus).

Méthode 1 : le théorème de Pythagore donne :

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

et donc :

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}.$$

Méthode 2 : on peut par exemple utiliser l'angle $\widehat{ABC}$ et l'hypothénuse. On a :

$$\cos(\widehat{ABC}) = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypothénuse}} = \frac{BC}{AB} = \frac{BC}{8}$$

et on a aussi :

$$\cos(\widehat{ABC}) = \cos(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Et en combinant ces égalités, on trouve :

$$BC = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}.$$

Et là encore on trouve le même résultat par les deux méthodes. On pourrait envisager d'autres méthodes utilisant la trigonométrie, mais utilisant l'angle $\widehat{CAB}$ au lieu de $\widehat{ABC}$, ou utilisant d'autres fonctions trigonométriques.