# Les raisonnements logiques.

"*La logique est l'hygiène des mathématiques.*"
André Weil
"*C'est avec la logique que nous prouvons et avec l'intuition que nous trouvons.*"
Henri Poincaré
"*Prise en trop grande quantité, la logique, comme le whisky, perd sa vertu bénéfique.*"
Lord Dunsany

## I Implications, contraposées et équivalences

**Principe :**
- dans un raisonnement, pour montrer qu'une proposition $Q$ est vraie, on peut montrer qu'une autre proposition $P$ est vraie et montrer que "**si** $P$ est vraie, **alors** $Q$ est vraie" (ce que l'on note $P \Rightarrow Q$) ;
- si on a les deux implications $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$, on dit que $P$ et $Q$ sont équivalentes (ce que l'on note $P \Leftrightarrow Q$) : les propositions $P$ et $Q$ ont même valeur de vérité, c'est-à-dire qu'elles sont soit toutes les deux vraies, soit toutes les deux fausses.

**Mise en garde :**
- l'implication $P \Rightarrow Q$ ne permet rien de dire si $P$ est fausse ;
- au lieu de montrer que $P \Rightarrow Q$, on peut montrer sa **contraposée** : "non $Q$"$\Rightarrow$"non $P$" (qui ont même valeur de vérité) ;
- dire que $P \Rightarrow Q$ est fausse, cela veut dire que $P$ peut être vraie **et** $Q$ peut être fausse **en même temps**.

## II Les exemples et les contre-exemples

**Principe :**
- pour montrer qu'une proposition avec un "il existe $x$" est vraie, il suffit de donner un exemple ;
- pour montrer qu'une proposition avec un "pour tout $x$" est fausse, il suffit de donner un contre-exemple.

**Mise en garde :**
- pour montrer qu'une proposition avec un "il existe $x$" est fausse, on ne peut pas se contenter d'un contre-exemple.
- pour montrer qu'une proposition avec un "pour tout $x$" est vraie, on ne peut pas se contenter d'un exemple.

## III Le raisonnement par l'absurde

**Principe :** Pour montrer qu'une proposition est vraie, on peut montrer que son contraire est faux. Pour cela, on peut :
- supposer que la proposition est fausse ;
- utiliser les théorèmes du cours pour construire de nouvelles propositions ;
- arriver à une proposition dont on sait qu'elle est fausse.

**Mise en garde :** Pour montrer l'implication "$P \Rightarrow Q$" à l'aide d'un raisonnement par l'absurde, on suppose simultanément que $P$ est vraie alors que $Q$ est fausse, et on cherche à aboutir à une contradiction.

## IV Le raisonnement par disjonction de cas

**Principe :** On raisonne en séparant les différentes situations possibles.
**Mise en garde :** Il faut bien faire attention à ce que toutes les situations envisagées regroupent toutes les possibilités.

**Exercice 1. Implications, contraposées et équivalences**
Compléter le tableau suivant, selon que $P \Rightarrow Q$, $P \Leftarrow Q$ ou $P \Leftrightarrow Q$. Puis choisir trois implications vraies, les énoncer comme une phrase de la forme “si ...alors ...” et énoncer la contraposée.

| $P$ | $\Rightarrow, \Leftarrow, \Leftrightarrow$ | $Q$ |
|---|---|---|
| $x$ est un multiple de 5 | | Le dernier chiffre de $x$ est 5. |
| $x$ est multiple de 10 | | Le dernier chiffre de $x$ est 0 ou 5. |
| $x$ est multiple de 10 | | Le dernier chiffre de $x$ est 0. |
| $x^2 = 9$ | | $x = 3$ |
| $x \geq 3$ | | $x^2 \geq 4$ |
| $x \geq 3$ | | $x^2 \geq 9$ |
| $x \geq 3$ | | $x^2 \geq 9$ et $x > 0$ |
| $x$ est rationnel. | | $x^2$ est rationnel. |
| Le quadrilatère ABCD est un losange. | | Le quadrilatère ABCD est un carré. |
| Le quadrilatère ABCD est un losange. | | Les segments $[AB], [BC], [CD], [DA]$ ont même longueur. |

**Exercice 2. Les exemples et les contre-exemples**
Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses, et le montrer :
- il existe un entier naturel $x$ qui est premier et pair ;
- il existe un entier naturel $x$ qui est premier et divisible par 10 ;
- pour tout réel $x$, on a : $x^2 > 0$ ;
- pour tout entier $x$, $x$ est soit pair, soit impair ;

**Exercice 3. Le raisonnement par l’absurde**
- Une autre preuve que $\sqrt{2}$ est irrationnel :
  On suppose par l’absurde que $\sqrt{2}$ est rationnel, et on écrit $\sqrt{2} = p/q$, où la fraction $p/q$ est irréductible
  1. Montrer que l’on a alors : $2 \times q^2 = p^2$.
  2. En fonction du dernier chiffre dans l’écriture de $p$ et de $q$, donner le dernier chiffre de $2 \times q^2$ et de $p^2$.
  3. En déduire le dernier chiffre possible pour $p$ et $q$.
  4. Conclure.
- Preuve par l’absurde d’une implication.
  Montrer par l’absurde que, pour $a$ et $b$ des entiers relatifs :

$$a + b \times \sqrt{2} = 0 \Rightarrow b = 0.$$

  On pourra utiliser que $\sqrt{2}$ est irrationnel pour aboutir à une contradiction.

**Exercice 4. Le raisonnement par disjonction de cas.**
Tous les matins, le facteur apporte son courrier apporte à monsieur Dupont. Et comme chaque matin, monsieur Dupont parle beaucoup. Il dit alors au facteur : “J’ai trois filles, dont le produit des âges vaut 36, et dont la somme des âges est égale au numéro de la maison d’en face. Pouvez-vous deviner leurs âges ?”.
Le facteur réfléchit un moment, se retourne pour voir le numéro de la maison d’en face, et dit alors : “Il me manque encore une information.”
Monsieur Dupont dit alors : ”J’avais oublié de vous dire que l’aînée est rousse !”.
Le facteur donne alors l’âge des trois filles de monsieur Dupont.
Quels sont ces trois âges ?