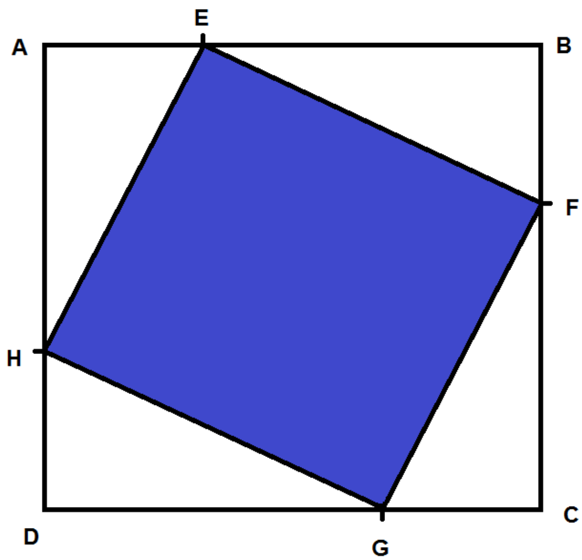
Problème 0

On considère un carré blanc de côté 5, dont on colorie deux bandes rectangulaires de côté x en rouge. Pour quelles valeurs de x aura-t-on autant de rouge que de blanc ?

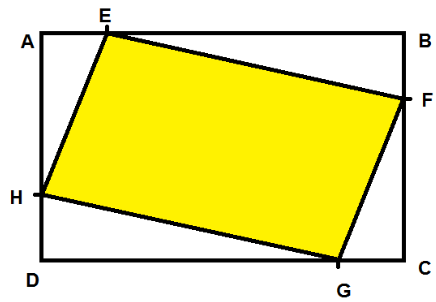
Problème 1

On considère un carré $ABCD$ blanc de côté 10. On place les points E, F, G, H sur les segments $[AB], [BC], [CD], [DA]$ de telle sorte que : $AE = BF = CG = DH = x$. On colorie en bleu le quadrilatère $EFGH$: pour quelles valeurs de x aura-t-on autant de bleu que de blanc ?



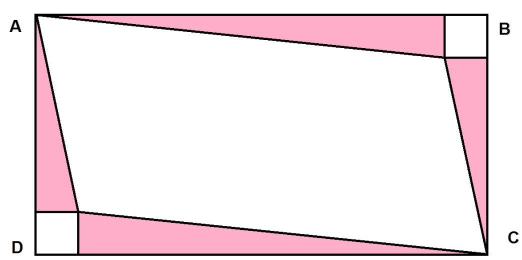
Problème 2

On considère un rectangle $ABCD$ avec $AB = 10$ et $BC = 4$. On place les points E, F, G, H sur les segments $[AB], [BC], [CD], [DA]$ de telle sorte que : $AE = BF = CG = DH$. On colorie en jaune le quadrilatère $EFGH$: peut-on avoir autant de jaune que de blanc ?



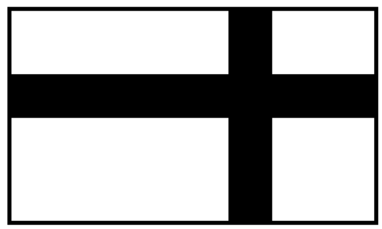
Problème 3

On considère un gâteau rectangulaire, représenté par le rectangle $ABCD$ ci-dessous, avec $AB = 10$ et $BC = 6$. On le décore de pâte d'amande rose, comme sur le dessin, de telle sorte que les coins sans pâte d'amande (en B et D) forment des carrés de même taille. Comment faire pour pouvoir mettre le plus possible de pâte d'amande ?



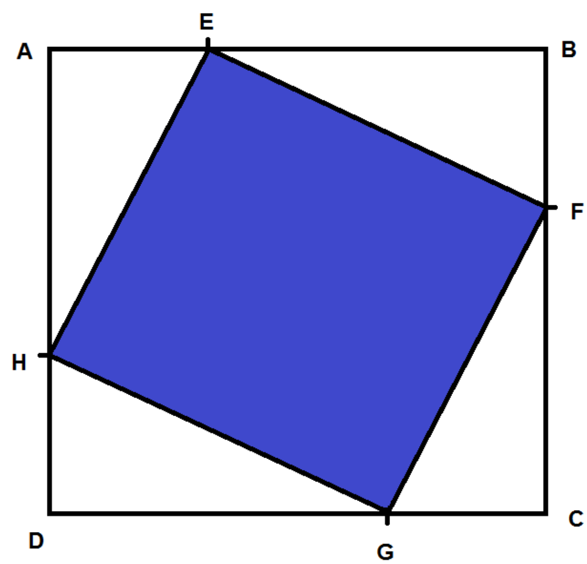
Problème 4

On considère un rectangle de côtés 5 et 12 dont on colorie deux bandes rectangulaires noire de même largeur. Pour quelles largeurs aura-t-on autant de blanc que de noir ?



Problème 1 avec questions intermédiaires

On considère un carré $ABCD$ blanc de côté 10. On place les points E, F, G, H sur les segments $[AB], [BC], [CD], [DA]$ de telle sorte que : $AE = BF = CG = DH = x$. On colorie en bleu le quadrilatère $EFGH$: pour quelles valeurs de x aura-t-on autant de bleu que de blanc ?



1. Exprimer l'aire du triangle EBF en fonction de x. En déduire que l'aire blanche s'exprime en fonction de x par la formule :

$$g(x) = -2x^2 + 20x.$$

2. Calculer l'aide du carré $ABCD$, et en déduire que l'aire bleue s'exprime en fonction de x par la formule :

$$f(x) = 2x^2 - 20x + 100.$$

3. Justifier que les solutions du problèmes sont des solutions de l'équation "$f(x) = g(x)$".
4. Résoudre graphiquement (à l'aide de la calculatrice) l'équation précédente. On prendra garde à bien vérifier, par un calcul exact, que la solution trouvée graphiquement est bien une solution au problème.
5. Suivant la construction de E, F, G, H, à quel intervalle appartient x ?
6. Conclure sur les solutions au problème initial.

Correction Problème 1

Étape 1 : Modéliser

On va expliciter les données de l'énoncé en fonction de x, pour traduire la contrainte du problème en une condition à vérifier par x.

Notons $f(x)$ l'aire bleue et $g(x)$ l'aire blanche, qui dépendent toutes les deux de x. Il faut d'abord trouver une expression explicite pour les fonctions f et g. Pour cela, on peut procéder de deux manières :

Méthode 1 : on détermine ces aires séparément. Pour cela, on note $f(x)$ l'aire en bleu et $g(x)$ l'aire en blanc.

Pour $f(x)$: c'est l'aire d'un carré de côté $\sqrt{(10-x)^2+x^2}$.

En effet, on peut déjà calculer les longueurs de chaque côté : ce sont les hypothénuses de triangles rectangles, dont les côtés adjacents à l'angle droit mesurent $(10-x)$ et x, et donc par le théorème de Pythagore on trouve la bonne longueur pour les côtés.

Ensuite, comme tous les coté sont égaux, on sait déjà qu'on a un losange, et il suffit de vérifier qu'il a un angle droit pour montrer que c'est un carré. Montrons par exemple que $\widehat{HEF}$ est un angle droit. Pour cela, on utilise que les triangles AEH et BFE sont égaux (ce sont deux triangles rectangles avec deux longueurs en commun), donc leurs angles sont égaux. En utilisant que la somme des angles d'un triangle fait 180°, on trouve que l'angle $\widehat{HEF}$ vaut 90°, et donc on a bien un carré.

L'aire d'un carré est égale au carré de son côté, et donc :

$$f(x) = (10-x)^2 + x^2 = 2x^2 - 20x + 100.$$

Pour $g(x)$: c'est la somme des aires de quatre triangles rectangles, dont les côtés adjacents à l'angle droit valent x et $10-x$. Et ainsi :

$$g(x) = 4 \times \frac{x(10-x)}{2} = -2x^2 + 20x$$

Méthode 2 : on détermine détermine une de ces aires, et on utilise que leur somme fait tout le carré.

On reprend pour cela une partie de la méthode 1 pour déterminer $f(x)$ ou $g(x)$. Il est plus facile de déterminer $g(x)$, et on trouve comme précédemment :

$$g(x) = -2x^2 + 20x.$$

Comme le carré $ABCD$ a un côté de 10, alors il a une aire de $10^2 = 100$, donc $f(x) + g(x) = 100$. On peut alors déduire $f(x)$:

$$f(x) = 100 - g(x) = 2x^2 - 20x + 100.$$

Conclusion : Résoudre le problème revient à trouver les valeurs de x pour lesquelles $f(x) = g(x)$, où les fonction f et g sont définies par :

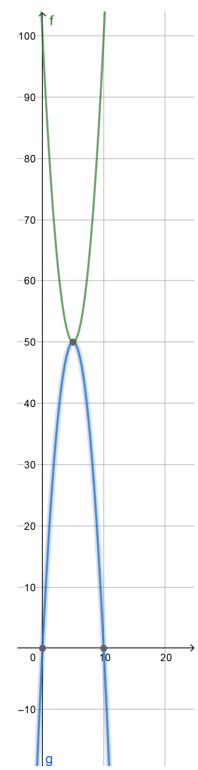
$$f(x) = 2x^2 - 20x + 100 \text{ et } g(x) = -2x^2 + 20x.$$

Étape 2 : Étudier des fonctions

On résout le problème d'après sa reformulation, c'est-à-dire trouver les valeurs de x pour lesquelles $f(x) = g(x)$.

On peut déjà voir si les expressions de f et g ne sont pas trop compliquées. On constate que résoudre l'équation $f(x) = g(x)$ revient à résoudre l'équation :

$$2x^2 - 20x + 100 = -2x^2 + 20x.$$



On aura beau faire de nombreuses transformations de cette équation, il n'est pas possible de se ramener à une des équations du chapitre 3, qui sont les seules équations que l'on sait résoudre pour le moment par des techniques de calcul littéral. Il n'y a donc pas le choix : on **doit** faire une résolution graphique.
On trace donc les fonctions f et g à la calculatrice, et on cherche quand elles se coupent. On donne ci-contre le tracé obtenu sur geogebra.
On constate que les courbes se coupent en un seul point, qui semble être d'abscisse 5.
La résolution graphique nous fournit des incertitudes et des exactitudes :

- il y a une unique solution : les courbes se coupent en un seul point, et c'est une certitude ;
- cette solution est environ 5 : le point en lequel les courbes se coupent a une abscisse environ de 5, mais ce n'est qu'une valeur approchée.

Pour vérifier que la solution est bien 5, il suffit de voir que l'on a bien $f(5) = g(5)$. Pour cela, on peut soit calculer directement à la main, soit utiliser le tableau de valeurs de la calculatrice (comme on a déjà rentré les fonctions dans la calculatrice pour tracer leurs courbes). On trouve de toute manière :

$$f(5) = 50 = g(5).$$

Conclusion : L'équation $f(x) = g(x)$ admet 5 comme unique solution.

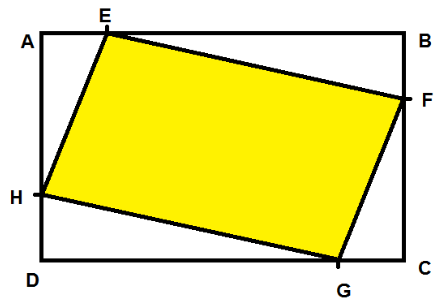
Étape 3 : Retour au problème initial

Par construction des points E, F, G, H, le nombre x doit être compris enter 0 et 10. Ainsi, la valeur de 5 est possible, et constitue bien une solution à notre problème.

On déduit finalement que $x = 5$ est la seule valeur pour laquelle l'aire bleue et l'aire blanche ont la même valeur, et cette valeur vaut alors : 50.

Problème 2 avec questions intermédiaires

On considère un rectangle $ABCD$ avec $AB = 10$ et $BC = 6$. On place les points E, F, G, H sur les segments $[AB], [BC], [CD], [DA]$ de telle sorte que : $AE = BF = CG = DH$. On colorie en jaune le quadrilatère $EFGH$: peut-on avoir autant de jaune que de blanc ?



1. On note $x = AE$. Montrer que l'aire blanche et l'aire jaune sont données par les formules :
$$\mathcal{A}_B = -2x^2 + 14x \text{ et } \mathcal{A}_J = 2x^2 - 14x + 40.$$
2. Montrer que le problème revient à résoudre l'équation :
$$2x^2 - 14x + 40 = -2x^2 + 14x.$$
3. Résoudre graphiquement cette équation, en donnant bien son nombre de solutions ainsi qu'une valeur approchée de chaque solution.
4. Vérifier par un calcul que les solutions exactes de l'équation sont $x = 2$ et $x = 5$.
5. Suivant la construction de E, F, G, H, à quel intervalle appartient x ?
6. Conclure sur les solutions au problème initial.

Correction Problème 2

Modéliser : On pose $x = AE$, et on note $\mathcal{A}_B$ l'aire blanche et $\mathcal{A}_J$ l'aire jaune.

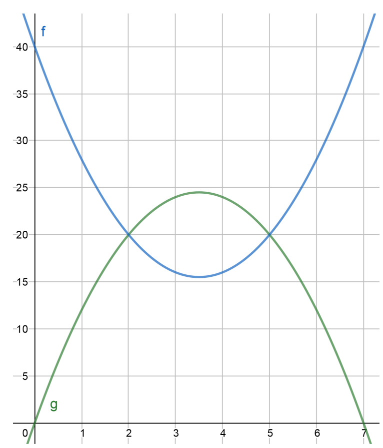
- pour l'aire blanche : il s'agit de calculer les aires des petits triangles blancs, puis de sommer les aires obtenues. Les triangles EBF et GDH ont une aire de $\dfrac{x(10-x)}{2}$, et les triangles FCG et HAE ont une aire de $\dfrac{x(6-x)}{2}$. Et donc : $\mathcal{A}_B = x(10-x) + x(4-x) = -2x^2 + 14x$.
- pour l'aire jaune : les aires blanche et jaune recouvrent le rectangle, donc leur somme vaut l'aire du rectangle, donc 60. Et donc : $\mathcal{A}_J = 40 - \mathcal{A}_B = 2x^2 - 14x + 40$.

Traduire : On cherche à savoir comment placer E, F, G, H pour qu'il y ait autant de blanc que de jaune. Mathématiquement, cela revient à trouver pour quelle valeur de x on a $\mathcal{A}_J = \mathcal{A}_B$. On veut donc résoudre l'équation :

$$2x^2 - 14x + 40 = -2x^2 + 14x.$$

Résolution graphique :

On trace les courbes des fonctions f et g définies par $f(x) = 2x^2 - 14x + 40$ et $g(x) = -2x^2 + 14x$ à la calculatrice, et on cherche quand elles se coupent. On donne ci-contre le tracé obtenu sur Geogebra.
On constate que les courbes se coupent en deux points, dont les abscisses sont environ 2 et 5. Donc il y a deux solutions à l'équation, qui sont environ 2 et 5.



Résolution algébrique : On vérifie que 2 et 5 sont bien solutions. Grâce aux formules de $\mathcal{A}_J$ et $\mathcal{A}_B$, on trouve :

- si $x = 2$: alors $\mathcal{A}_J = \mathcal{A}_B = 30$;
- si $x = 5$: alors $\mathcal{A}_J = \mathcal{A}_B = 30$.

Donc les solutions de l'équation sont 2 et 5.

Retour au problème : Par construction des points E, F, G, H, on a :

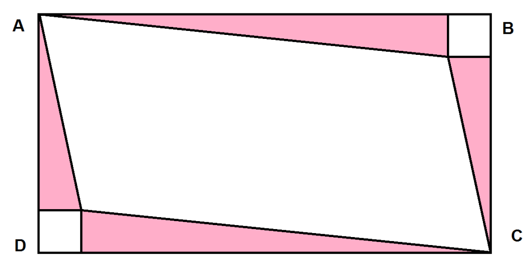
- pour E et G : $x \in [0; 10]$;
- pour F et H : $x \in [0; 4]$.

Et donc $x \in [0; 10] \cap [0; 4] = [0; 4]$. Parmi les solutions trouvées, seule 2 est possible.

Conclusion : La seule possibilité pour avoir autant de jaune que de blanc est de placer E à distance 2 du points A.

Problème 3 avec questions intermédiaires

On considère un gâteau rectangulaire, représenté par le rectangle $ABCD$ ci-dessous, avec $AB = 10$ et $BC = 6$. On le décore de pâte d'amande rose, comme sur le dessin, de telle sorte que les coins sans pâte d'amande (en B et D) forment des carrés de même taille. Comment faire pour pouvoir mettre le plus possible de pâte d'amande ?



1. On note x le côté des deux petits carrés blancs (en B et D). Montrer que l'aire rose s'exprime en fonction de x comme :

$$\mathcal{A}_R = -2x^2 + 16x.$$

2. Montrer que le problème revient à chercher en quel nombre la fonction f définie par $f(x) = -2x^2 + 16x$ atteint son maximum.
3. Trouver graphiquement les variations de f, et le point en lequel elle atteint son maximum (on pourra se contenter d'une valeur approchée).
4. Vérifier par un calcul f atteint bien son maximum en 4 (on chercher à factoriser $f(x) - f(4)$ pour montrer que cette quantité est toujours négative).
5. D'après les dimension du rectangle $ABCD$, à quel intervalle appartient x ?
6. Conclure sur les solutions au problème initial.

Correction Problème 3

Modéliser : On pose x le côté des deux petits carrés blancs. On peut exprimer en fonction de x les aires des quatre triangles rose :

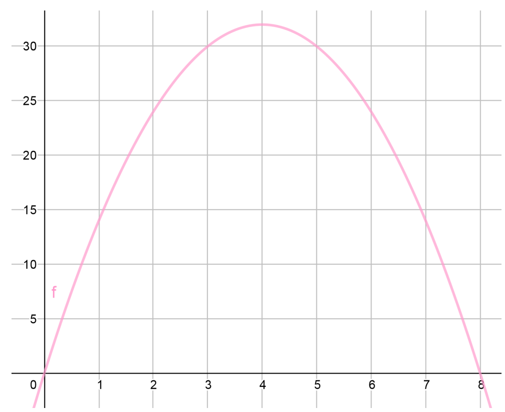
- les deux grands triangles ont une aire de : $\dfrac{x(10-x)}{2}$;
- les deux petits triangles ont une aire de : $\dfrac{x(6-x)}{2}$.

Et donc l'aire rose vaut : $\mathcal{A}_R = -2x^2 + 16x$.

Traduire : La figure dépend uniquement de x. On veut le plus de pâte d'amande, donc on veut trouver x pour que $\mathcal{A}_R$ soit la plus grande possible. On veut donc trouver pour quelle valeur de x la quantité : $-2x^2 + 16x$ est maximale.

Résolution graphique :

On trace la courbe de la fonction f définie par $f(x) = -2x^2 + 16x$ à la calculatrice, et on cherche quand elle est la plus haute. On donne ci-contre le tracé obtenu sur Geogebra.
On constate que f est croissante puis décroissante, avec un maximum atteint pour environ 4



Résolution algébrique : On vérifie que f a un maximum en 4, en montrant que $f(x)$ est toujours plus petit que $f(4) = 32$:

$$f(x) - f(4) = -2x^2 + 16x - 32 = -2 \times (x^2 - 8x + 16) = -2 \times (x-4)^2$$

et, comme un carré est toujours positif, on a bien que $f(x) - f(4)$ est toujours négatif, donc f atteint son maximum en 4.

Retour au problème : D'après la conception du gâteau, on a :

- à cause du côté $[AB]$: $x \in [0; 10]$;
- à cause du côté $[BC]$: $x \in [0; 6]$.

Et donc $x \in [0; 10] \cap [0; 6] = [0; 6]$. La solution trouvée est bien dans $[0; 6]$, donc elle est acceptable.

Conclusion : Pour avoir le plus de pâte d'amande, il faut laisser des coins blancs de côté 4. Et on a alors 32 de pâte d'amande, ce qui est même plus que la moitié de la surface du gâteau !