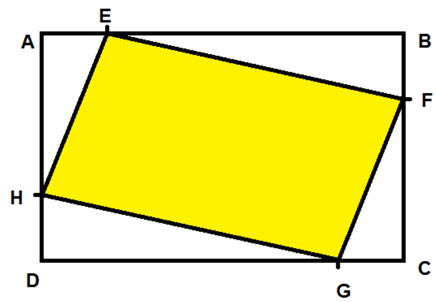
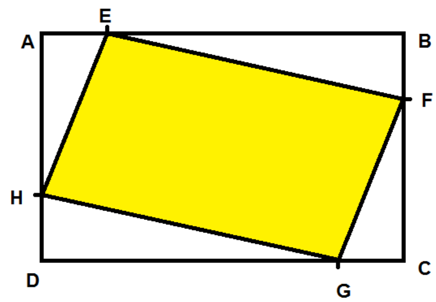
Problème 2 ouvert

On considère un rectangle $ABCD$ avec $AB = 10$ et $BC = 4$. On place les points E, F, G, H sur les segments $[AB], [BC], [CD], [DA]$ de telle sorte que : $AE = BF = CG = DH$. On colorie en jaune le quadrilatère $EFGH$: peut-on avoir autant de jaune que de blanc ?



Problème 2 guidé

On considère un rectangle $ABCD$ avec $AB = 10$ et $BC = 4$. On place les points E, F, G, H sur les segments $[AB], [BC], [CD], [DA]$ de telle sorte que : $AE = BF = CG = DH$. On colorie en jaune le quadrilatère $EFGH$: peut-on avoir autant de jaune que de blanc ?



1. On note $x = AE$. Montrer que l'aire blanche et l'aire jaune sont données par les formules :
$$\mathcal{A}_B = -2x^2 + 14x \text{ et } \mathcal{A}_J = 2x^2 - 14x + 40.$$
2. Montrer que le problème revient à résoudre l'équation :
$$2x^2 - 14x + 40 = -2x^2 + 14x.$$
3. Résoudre graphiquement cette équation, en donnant bien son nombre de solutions ainsi qu'une valeur approchée de chaque solution.
4. Vérifier par un calcul que les solutions exactes de l'équation sont $x = 2$ et $x = 5$.
5. Suivant la construction de E, F, G, H, à quel intervalle appartient x ?
6. Conclure sur les solutions au problème initial.

Problème 2 corrigé

Modéliser : On pose $x = AE$, et on note $\mathcal{A}_B$ l'aire blanche et $\mathcal{A}_J$ l'aire jaune.

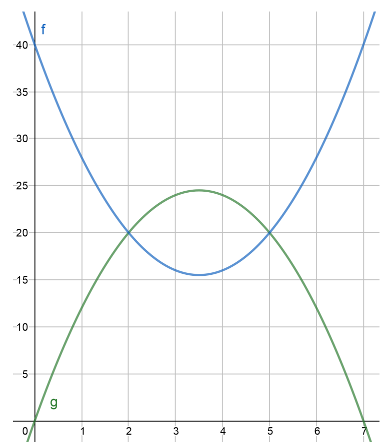
- pour l'aire blanche : il s'agit de calculer les aires des petits triangles blancs, puis de sommer les aires obtenues. Les triangles EBF et GDH ont une aire de $\dfrac{x(10-x)}{2}$, et les triangles FCG et HAE ont une aire de $\dfrac{x(4-x)}{2}$. Et donc : $\mathcal{A}_B = x(10-x) + x(4-x) = -2x^2 + 14x$.
- pour l'aire jaune : les aires blanche et jaune recouvrent le rectangle, donc leur somme vaut l'aire du rectangle, donc 40. Et donc : $\mathcal{A}_J = 40 - \mathcal{A}_B = 2x^2 - 14x + 40$.

Traduire : On cherche à savoir comment placer E, F, G, H pour qu'il y ait autant de blanc que de jaune. Mathématiquement, cela revient à trouver pour quelle valeur de x on a $\mathcal{A}_J = \mathcal{A}_B$. On veut donc résoudre l'équation :

$$2x^2 - 14x + 40 = -2x^2 + 14x.$$

Résolution graphique :

On trace les courbes des fonctions f et g définies par $f(x) = 2x^2 - 14x + 40$ et $g(x) = -2x^2 + 14x$ à la calculatrice, et on cherche quand elles se coupent. On donne ci-contre le tracé obtenu sur Geogebra.
On constate que les courbes se coupent en deux points, dont les abscisses sont environ 2 et 5. Donc il y a deux solutions à l'équation, qui sont environ 2 et 5.



Résolution algébrique : On vérifie que 2 et 5 sont bien solutions. Grâce aux formules de $\mathcal{A}_J$ et $\mathcal{A}_B$, on trouve :

- si $x = 2$: alors $\mathcal{A}_J = \mathcal{A}_B = 20$;
- si $x = 5$: alors $\mathcal{A}_J = \mathcal{A}_B = 20$.

Donc les solutions de l'équation sont 2 et 5.

Retour au problème : Par construction des points E, F, G, H, on a :

- pour E et G : $x \in [0; 10]$;
- pour F et H : $x \in [0; 4]$.

Et donc $x \in [0; 10] \cap [0; 4] = [0; 4]$. Parmi les solutions trouvées, seule 2 est possible.

Conclusion : La seule possibilité pour avoir autant de jaune que de blanc est de placer E à distance 2 du points A.