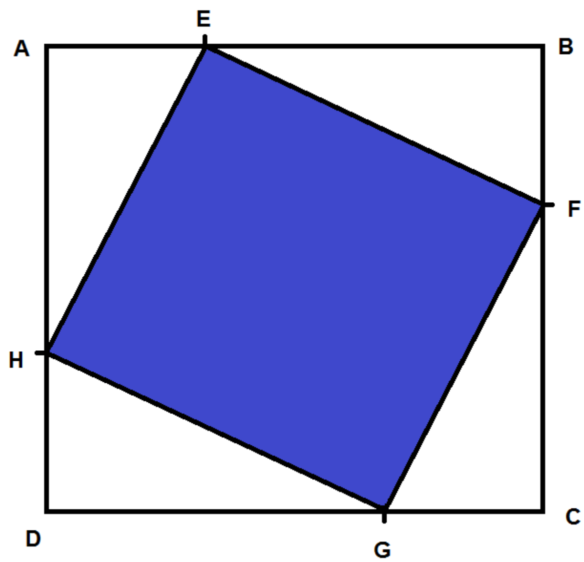
Problème 1 ouvert

On considère un carré $ABCD$ blanc de côté 10. On place les points E, F, G, H sur les segments $[AB], [BC], [CD], [DA]$ de telle sorte que : $AE = BF = CG = DH = x$. On colorie en bleu le quadrilatère $EFGH$: pour quelles valeurs de x aura-t-on autant de bleu que de blanc ?



Problème 1 guidé

1. Exprimer l'aire du triangle EBF en fonction de x. En déduire que l'aire blanche s'exprime en fonction de x par la formule :
$$g(x) = -2x^2 + 20x.$$
2. Calculer l'aide du carré $ABCD$, et en déduire que l'aire bleue s'exprime en fonction de x par la formule :
$$f(x) = 2x^2 - 20x + 100.$$
3. Justifier que les solutions du problèmes sont des solutions de l'équation "$f(x) = g(x)$".
4. Résoudre graphiquement (à l'aide de la calculatrice) l'équation précédente. On prendra garde à bien vérifier, par un calcul exact, que la solution trouvée graphiquement est bien une solution au problème.
5. Suivant la construction de E, F, G, H, à quel intervalle appartient x ?
6. Conclure sur les solutions au problème initial.

Problème 1 corrigé

Étape 1 : Modéliser

On va expliciter les données de l'énoncé en fonction de x, pour traduire la contrainte du problème en une condition à vérifier par x.

Notons $f(x)$ l'aire et $g(x)$ l'aire blanche, qui dépendent toutes les deux de x. Il faut d'abord trouver une expression explicite pour les fonctions f et g. Pour cela, on peut procéder de deux manières :

Méthode 1 : on détermine ces aires séparément. Pour cela, on note $f(x)$ l'aire en bleu et $g(x)$ l'aire en blanc.

Pour $f(x)$: c'est l'aire d'un carré de côté $\sqrt{(10-x)^2+x^2}$.

En effet, on peut déjà calculer les longueurs de chaque côté : ce sont les hypothénuses de triangles rectangles, dont les côtés adjacents à l'angle droit mesurent $(10-x)$ et x, et donc par le théorème de Pythagore on trouve la bonne longueur pour les côtés.

Ensuite, comme tous les coté sont égaux, on sait déjà qu'on a un losange, et il suffit de vérifier qu'il a un angle droit pour montrer que c'est un carré. Montrons par exemple que $\widehat{HEF}$ est un angle droit. Pour cela, on utilise que les triangles AEH et BFE sont égaux (ce sont deux triangles rectangles avec deux longueurs en commun), donc leurs angles sont égaux. En utilisant que la somme des angles d'un triangle fait 180°, on trouve que l'angle $\widehat{HEF}$ vaut 90°, et donc on a bien un carré.

L'aire d'un carré est égale au carré de son côté, et donc :

$$f(x) = (10-x)^2 + x^2 = 2x^2 - 20x + 100.$$

Pour $g(x)$: c'est la somme des aires de quatre triangles rectangles, dont les côtés adjacents à l'angle droit valent x et $10-x$. Et ainsi :

$$g(x) = 4 \times \frac{x(10-x)}{2} = -2x^2 + 20x$$

Méthode 2 : on détermine détermine une de ces aires, et on utilise que leur somme fait tout le carré.

On reprend pour cela une partie de la méthode 1 pour déterminer $f(x)$ ou $g(x)$. Il est plus facile de déterminer $g(x)$, et on trouve comme précédemment :

$$g(x) = -2x^2 + 20x.$$

Comme le carré $ABCD$ a un côté de 10, alors il a une aire de $10^2 = 100$, donc $f(x) + g(x) = 100$. On peut alors déduire $f(x)$:

$$f(x) = 100 - g(x) = 2x^2 - 20x + 100.$$

Conclusion : Résoudre le problème revient à trouver les valeurs de x pour lesquelles $f(x) = g(x)$, où les fonction f et g sont définies par :

$$f(x) = 2x^2 - 20x + 100 \text{ et } g(x) = -2x^2 + 20x.$$

Étape 2 : Étudier des fonctions

On résout le problème d'après sa reformulation, c'est-à-dire trouver les valeurs de x pour lesquelles $f(x) = g(x)$.

On peut déjà voir si les expressions de f et g ne sont pas trop compliquées. On constate que résoudre l'équation $f(x) = g(x)$ revient à résoudre l'équation :

$$2x^2 - 20x + 100 = -2x^2 + 20x.$$

On aura beau faire de nombreuses transformations de cette équation, il n'est pas possible de se ramener à une des équations du chapitre 3, qui sont les seules équations que l'on sait résoudre pour le moment par des techniques de calcul littéral. Il n'y a donc pas le choix : on **doit** faire une résolution graphique.

On trace donc les fonctions f et g à la calculatrice, et on cherche quand elles se coupent. On donne ci-contre le tracé obtenu sur geogebra.

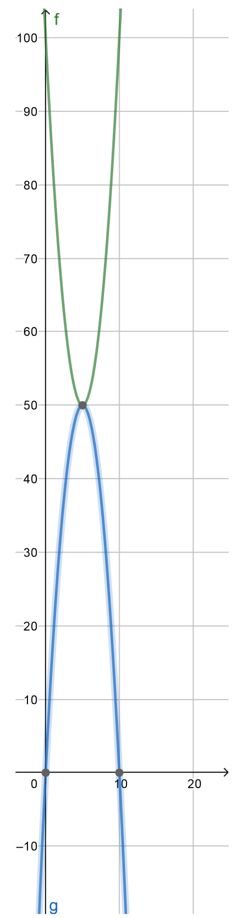
On constate que les courbes se coupent en un seul point, qui semble être d'abscisse 5.

La résolution graphique nous fournit des incertitudes et des exactitudes :

– il y a une unique solution : les courbes se coupent en un seul point, et c'est une certitude ;
– cette solution est environ 5 : le point en lequel les courbes se coupent a une abscisse environ de 5, mais ce n'est qu'une valeur approchée.

Pour vérifier que la solution est bien 5, il suffit de voir que l'on a bien $f(5) = g(5)$. Pour cela, on peut soit calculer directement à la main, soit utiliser le tableau de valeurs de la calculatrice (comme on a déjà rentré les fonctions dans la calculatrice pour tracer leurs courbes). On trouve de toute manière :

$$f(5) = 50 = g(5).$$



Conclusion : L'équation $f(x) = g(x)$ admet 5 comme unique solution.

Étape 3 : Retour au problème initial

Par construction des points E, F, G, H, le nombre x doit être compris enter 0 et 10. Ainsi, la valeur de 5 est possible, et constitue bien une solution à notre problème.

On déduit finalement que $x = 5$ est la seule valeur pour laquelle l'aire bleue et l'aire blanche ont la même valeur, et cette valeur vaut alors : 50.