# Parcours A

Problèmes faisant intervenir des résolutions algébriques d'équations (méthodes du chapitre 3)

## Exercice 78 p.103

1. Le nombre de bactéries (en milliers) est donné en fonction du temps $t$ (en jours) par la fonction $N$ définie par : $N(t) = (0,5t+1)^2$.

Au bout d'un jour, le nombre de bactéries (en milliers) est donc de : $N(1) = 2,25$.

Il y aura donc : 2250 bactéries au bout d'un jour.

2. Pour savoir au bout de combien de temps (en jours) le nombre de bactéries aura atteint 16000, il faut trouver pour quelle valeur de $t$ on a : $N(t) = 16$.

On raisonne par équivalences :

$$\begin{aligned} N(t) = 16 &\Leftrightarrow (0,5t+1)^2 = 16 \\ &\Leftrightarrow 0,5t+1 = 4 \text{ ou } 0,5t+1 = -4 \\ &\Leftrightarrow 0,5t = 3 \text{ ou } 0,5t = -5 \\ &\Leftrightarrow t = 6 \text{ ou } t = -10 \end{aligned}$$

Par définition de $N$, on a : $t \in [0;10]$, donc la solution $t = -10$ est impossible.

Et donc le nombre de bactéries atteint 16000 au bout de 6 jours.

## Exercice 79 p.103

1. Si on regarde les différents bords de la boîte, on obtient :
– deux bords carrés : qui sont des carrés de côté $x$, donc d'aire $x^2$ ;
– quatre bords rectangulaires : qui sont des rectangles de côtés $x$ et 2, donc d'aire $2x$.
La surface extérieur est donc de : $2 \times x^2 + 4 \times 2x = 2x^2 + 8x$.

Pour montrer qu'il s'agit bien de l'expression de l'énoncé, on développe cette dernière expression :

$$S(x) = 2(x+2)^2 - 8 = 2(x^2 + 4x + 4) - 8 = 2x^2 + 8x + 8 - 8 = 2x^2 + 8x$$

Et donc la surface extérieur est bien donnée par la formule $S(x) = 2(x+2)^2 - 8$.

2. On veut résoudre l'équation $S(x) = 72$. On a :

$$S(x) = 72 \Leftrightarrow 2(x+2)^2 - 8 = 72 \Leftrightarrow 2(x+2)^2 = 80 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 40$$

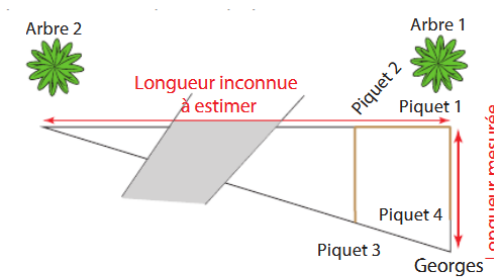
À partir de la dernière équation, on a deux manières de résoudre :
– par une équation produit nul : on constate que $(x+2)^2 - 40 = (x+2)^2 - (2\sqrt{10})^2 = (x + 2 + 2\sqrt{10})(2 + 2 - 2\sqrt{10})$
Et ainsi : $(x+2)^2 = 40 \Leftrightarrow (x + 2 + 2\sqrt{10})(2 + 2 - 2\sqrt{10}) = 0 \Leftrightarrow (x + 2 + 2\sqrt{10}) = 0$ ou $(2 + 2 - 2\sqrt{10}) = 0 \Leftrightarrow x = -2 - 2\sqrt{10}$ ou $x = -2 + 2\sqrt{10}$
– par une équation $x^2 = k$ : comme $40 > 0$, alors : $(x+2)^2 = 40 \Leftrightarrow x + 2 = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ ou $x + 2 = -\sqrt{40} = -2\sqrt{10} \Leftrightarrow x = -2 - 2\sqrt{10}$ ou $x = -2 + 2\sqrt{10}$

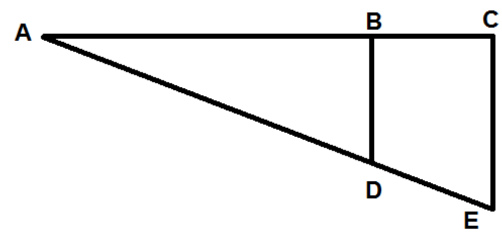
On trouve dans chaque cas qu'il y a a priori deux solutions, à savoir : $-2-2\sqrt{10} \simeq -8,3$ et $-2+2\sqrt{10} \simeq 4,3$. Mais, comme $x$ modélise une longueur, on ne s'intéresse qu'aux solutions positives ou nulles.

Et finalement, la seule solution est : $-2 + 2\sqrt{10}$.

## Exercice 91 p.104

On représente la situation par le schéma ci-dessous :




D'après les données de l'énoncé :
- les droites $(BD)$ et $(CE)$ sont parallèles : elles correspondent au prolongement de deux bords du U ;
- $BC = BD = 1$ : ce sont deux côtés du U ;
- $CE = 1,1$ : c'est la mesure faite par Georges.

Si on note $x = AC$ qui est la longueur à connaître, alors, par théorème de Thalès, on a :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CE}$$

et donc :

$$\frac{x-1}{x} = \frac{1}{1,1}$$

On résous cette équation par méthode du quotient nul. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{x-1}{x} = \frac{1}{1,1} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x-1}{x} - \frac{1}{1,1} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1,1x-1,1}{1,1x} - \frac{x}{1,1x} = 0 \text{ (en mettant au même dénominateur)} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1,1x-1,1}{1,1x} - \frac{x}{1,1x} = 0 \text{ (en mettant au même dénominateur)} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{0,1x-1,1}{1,1x} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x \neq 0 \text{ et } 0,1x = 1,1 \text{ (en utilisant une équation quotient nul)} \\
&\Leftrightarrow \quad x = 11
\end{aligned}$$

# Parcours B

Problèmes faisant intervenir des résolutions algébriques d'inéquations (méthodes du chapitre 4)

## Exercice 62 p.80

1. Si note $x$ le nombre de kilos de carottes à vendre (c'est-à-dire que Assia a réussi à produire), alors on trouve :
   - son chiffre d'affaire (l'argent généré) est de : $1,50 \times x$ ;
   - son coût de production (l'argent qu'elle dépense) est de : $2,90$

Et donc son bénéfice est de : $1,50 \times x - 2,90$.

Le problème revient donc à résoudre l'inéquation :

$$1,50 \times x - 2,90 \geq 25.$$

2. On raisonne avec des équivalences :

$$\begin{aligned} 1,50 \times x - 2,90 \geq 25 \quad &\Leftrightarrow \quad 1,50 \times x \geq 25 + 2,90 = 27,90 \\ &\Leftrightarrow \quad x \geq \frac{27,90}{1,50} = 18,60 \end{aligned}$$

Et finalement : Assia doit produire une quantité supérieure ou égale à $18,60$kg de carottes.

## Exercice 63 p.80

1. On note $x$ le nombre de mois pendant lesquels Rémi touche les sous du loto. Si on note $A$ et $B$ les sous perçus suivant les deux situations, alors $A$ et $B$ s'expriment en fonction de $x$ comme :

$$A = 100000 + 1400x \text{ et } B = 5000 + 2000x$$

La questions que se pose Rémi est de savoir pour quelles valeurs de $x$ on a : $B \geq A$. On veut donc résoudre l'inéquation $B \geq A$, c'est-à-dire :

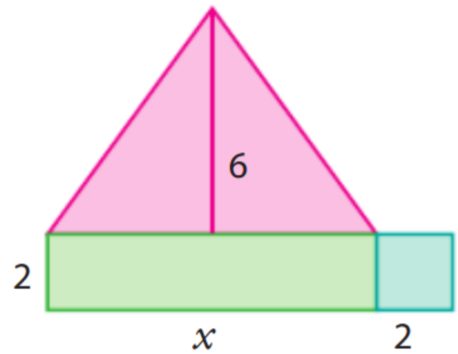
$$5000 + 2000x \geq 100000 + 1400x$$

2. On a ici :

$$\begin{aligned} B \geq A &\Leftrightarrow 5000 + 2000x \geq 100000 + 1400x \\ &\Leftrightarrow 5000 + 600x \geq 100000 \\ &\Leftrightarrow 600x \geq 95000 \\ &\Leftrightarrow x \geq \frac{475}{3} \end{aligned}$$

Suivant la manière dont Rémi recevrait son argent, les mois sont comptés un par un. Il n'y a pas de sens à parler ici de tiers de mois. Comme $475/3 = 158,33...$, on déduit que la deuxième offre devient plus intéressante à partir du 159-ème mois, c'est-à-dire au bout de 13 ans et trois mois.

## Exercice 64 p.80




On commence par calculer les aires de toutes les parties de la figure :

- pour le carré : c'est un carré de côté, donc son aire est $4$ ;
- pour le rectangle : c'est un rectangle de côtés 2 et $x$, donc son aire est $2 \times x$ ;
- pour le triangle (on le voit plutôt comme un grand triangle que comme deux petits) : c'est un triangle de hauteur 6 et de base $x$, donc son aire est $\dfrac{6 \times x}{2} = 3 \times x$.

Et donc l'aire de la figure est :

$$4 + 2 \times x + 3 \times x = 5 \times x + 4.$$

On raisonne par équivalences pour trouver pour quelles valeurs cette aire dépasse $50\text{cm}^2$ :

$$\begin{aligned} 5 \times x + 4 > 50 &\Leftrightarrow 5 \times x > 46 \\ &\Leftrightarrow x > \frac{46}{5} = 9,2 \end{aligned}$$

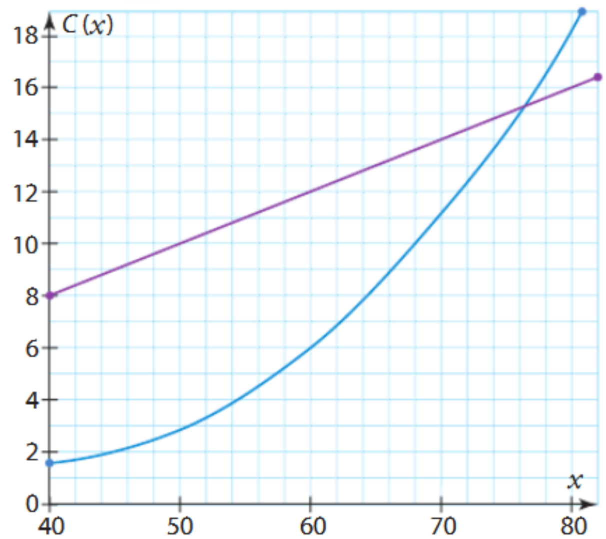
Et donc il faut que $x > 9,2$, donc l'ensemble solution est :

$$S = ]9,2; +\infty[.$$

# Parcours C

Problèmes faisant intervenir des résolutions graphiques d'équations et d'inéquations (méthodes du chapitre 5)

## Exercice 98 p.207




1. On lit le résultat sur la courbe bleu : le point d'abscisse 50 est le point de coordonnées $(50; 2,9)$, c'est-à-dire que $C(50) = 2,9$. Comme la fonction $C$ donne le coût en centaines d'euros, on déduit que : le coût de production de 50 pièces est environ de 290 euros.

2. Un coût de production de 1400 euros veut dire que $C(x)$ vaut $\dfrac{1400}{100} = 14$. Sur la courbe de $C$, il y a un unique point d'ordonnée 14 : le point $(74; 14)$. On déduit que l'on produit 74 pièces avec 1400 euros.

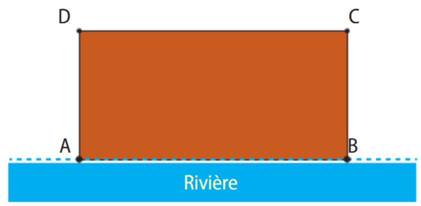
3. Si chaque pièce est vendue 20 euros, c'est-à-dire $0,2$ centaine d'euros, alors pour $x$ pièces fabriquées, la recette en centaines d'euros est : $R(x) = 0,2x$.

4. La courbe de $R$ est une droite (comme $R$ est une fonction affine). Comme la courbe violette est une droite, il suffit de vérifier que deux de ses points sont sur la droite représentative de $R$ : $R(40) = 0,2 \times 40 = 8$ et $R(80) = 0,2 \times 80 = 16$ ce qui correspond bien à la droite violette.

5. Le bénéfice, à $x$ pièces fabriquées, et de : $R(x) - C(x)$. Autrement dit, le bénéfice est positif dès lors que $R(x) > C(x)$. Graphiquement, cela se traduit par le fait que la courbe de $R$ (en violet) doit être au dessus de la courbe de $C$ (en bleu).

Les valeurs de $x$ pour lesquelles cette condition est réalisées sont entre 40 et 76 pièces.

## Exercice 88 p.233



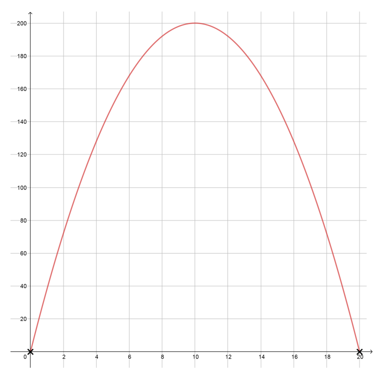

1. Si $x = 5$, alors $AD = BC = 5$. Et donc $DC = 40 - 5 - 5 = 30$. Et donc l'aire du rectangle est $5 \times 30 = 150$.

2. Comme $AD = x = BC$, et que l'on a $40m$ de clôture, alors on déduit que : $0 \leq 2x \leq 40$, c'est-à-dire que $x \in [;20]$.

3.Comme $AD = x$, et que $ABCD$ est un rectangle, alors $BC = x$. Et donc $DC = 40 - 2x$. Et finalement :

$$f(x) = x \times (40 - 2x).$$

4. On trace la courbe de $f$ pour $x$ allant de 0 à 20. On trouve :



Et donc l'aire maximale qu'Aya pourrait obtenir semble être de $200m^2$ (atteinte pour $x = 10$).

5. a) On développe l'expression proposée. On a :

$$-2(x-10)^2+200 = -2\times(x^2-20x+100)+200 = -2x^2+40x-200+200 = x\times(40-2x) = f(x).$$

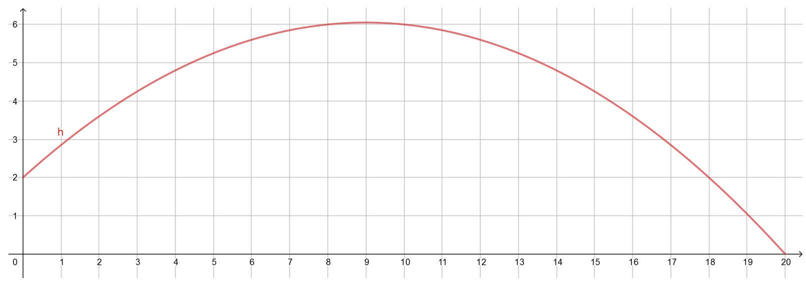
b) On utilise qu'un carré est positif ou nul, et on donc $(x - 10)^2 \geq 0$. On a alors :

$$\begin{aligned} (x-10)^2 \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad -2(x-10)^2 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad -2(x-10)^2 + 200 \leq 200 \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité nous dit que $f(x)$ vaut au plus 200. Comme $f(10) = 200$, alors le maximum de $f$ est bien de 200.

## Exercice 104 p.235

On trace ci-dessous la courbe de la fonction $h$.




1. Après 20 mètres parcourus, la hauteur de la balle est de $h(20)$, qu'on peut calculer :

$$h(20) = -0,05 \times 20^2 + 0,9 \times 20 + 2 = -20 + 18 + 2 = 0$$

Cela veut dire que : au bout de 20 mètres, la balle touche le sol.

2. a) On développe l'expression proposée. On trouve :

$$\begin{array}{rcl} -0,05(x-9)^2 + 6,05 & = & -0,05 \times (x^2 - 18x + 81) + 6,05 \\ & = & -0,05x^2 + 0,9x - 4,05 + 6,05 \\ & = & -0,05x^2 + 0,9x + 2 = h(x) \end{array}$$

Et donc on trouve bien que : $h(x) = -0,05(x-9)^2 + 6,05$.

b) Comme un carré est positif, alors on déduit que l'on a toujours $(x-9)^2 \geq 0$

c) On manipule l'inégalité précédente pour essayer de revenir à l'expression de $h(x)$ de l'énoncé :

$$\begin{array}{rcl} (x-9)^2 \geq 0 & \Leftrightarrow & -0,05(x-9)^2 \leq 0 \\ & \Leftrightarrow & -0,05(x-9)^2 + 6,05 \leq 6,05 \\ & \Leftrightarrow & h(x) \leq 6,05 \end{array}$$

où on a d'abord multiplié l'inégalité par $-0,05$ (qui est négatif, ce qui inverse les sens des inégalités), puis on a ajouté $6,05$.

On en déduit que la hauteur maximale possible est de $6,05$. Comme $h(9) = 6,05$, alors cette hauteur est atteinte au bout de 9 mètres.