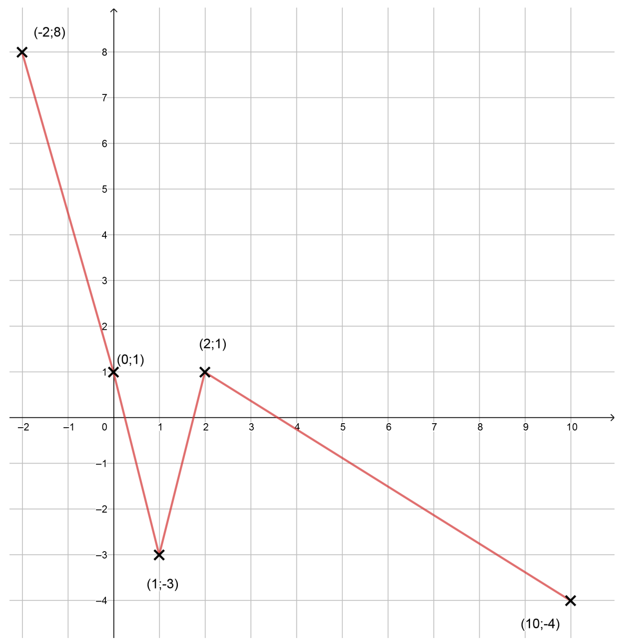
Parcours A

Pour ceux qui ont besoin de reprendre les tableaux de variations ou de signe, et de se familiariser avec la calculatrice.

Exercice 22 p.227

1. On considère la fonction g, dont le tableau de variation est le suivant :

x	-2		1		2		10
g	8	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	-4



On donne ci-contre, pour s'aider à comprendre, la courbe d'une fonction qui a le même tableau de variation, et qui pourrait donc très bien être g, en n'oubliant pas d'utiliser l'information que "$g(0) = 1$" donnée dans l'énoncé.

2. Pour résoudre l'inéquation "$g(x) \leq 1$", on peut procéder suivant deux méthodes :

Méthode 1 : avec le tableau de variation. On raisonne sur les trois intervalles sur lesquels g est monotone :

- sur $[-2; 1]$: g est décroissante, avec $g(0) = 1$, on déduit que les solutions sur $[-2; 1]$ constituent l'intervalle $[0; 1]$;
- sur $[1; 2]$: g est croissante, avec $g(2) = 1$, on déduit que tous les réels x de $[1; 2]$ vérifient $g(x) \leq 1$, et sont donc solution de l'inéquation étudiée ;
- sur $[2; 10]$: g est décroissante, avec $g(2) = 1$, on déduit que tous les réels x de $[2; 10]$ vérifient $g(x) \leq 1$, et sont donc solution de l'inéquation étudiée.

Finalement, l'inéquation "$g(x) \leq 1$" admet pour ensemble solution l'union de ces intervalles, à savoir : $[0; 1] \cup [1; 2] \cup [2; 10] = [0; 10]$.

Méthode 2 : avec la courbe précédente.

Il faut partir du principe que l'énoncé est bien posé : si on peut résoudre l'inéquation en utilisant le tableau de variation, alors n'importe quelle fonction qui a le bon tableau de variations doit permettre de résoudre le problème.

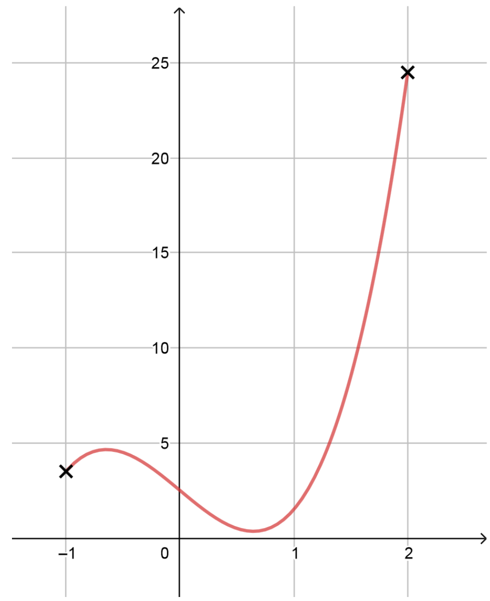
On utilise la courbe précédente. Résoudre l'inéquation revient à chercher l'abscisse des points de la courbe rouge située sous la droite horizontale passant par le point $(0; 1)$, et on trouve le même résultat.

3. D'après le tableau de variation (ou la courbe), la fonction est décroissante sur l'intervalle $[3; 5]$, et donc : $g(3) > g(5)$.

Exercice 44 p.228

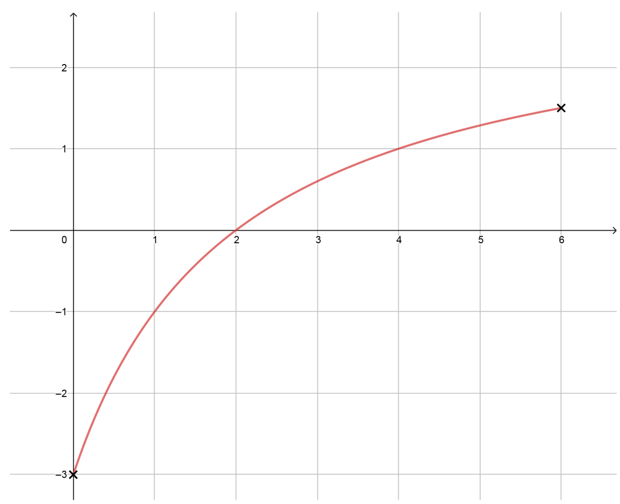
a) On trace la fonction f sur $[-1; 2]$: on constate qu'elle est :
– croissante sur $[-1; -0,7]$ et sur $[0,7; 2]$;
– décroissante sur $[-0,7; 0,7]$;
avec des valeurs approchées (comme on ne tombe pas pile sur des carreaux). Avec comme valeurs : $f(-1) = 3,5$; $f(-0,7) \simeq 4,5$; $f(0,7) \simeq 0,5$; $f(2) = 24,5$. Et on trouve le tableau suivant :

x	-1		$-0,7$		$0,7$		2
f			$4,5$				$24,5$
		↗		↘		↗	
	$3,5$				$0,5$		

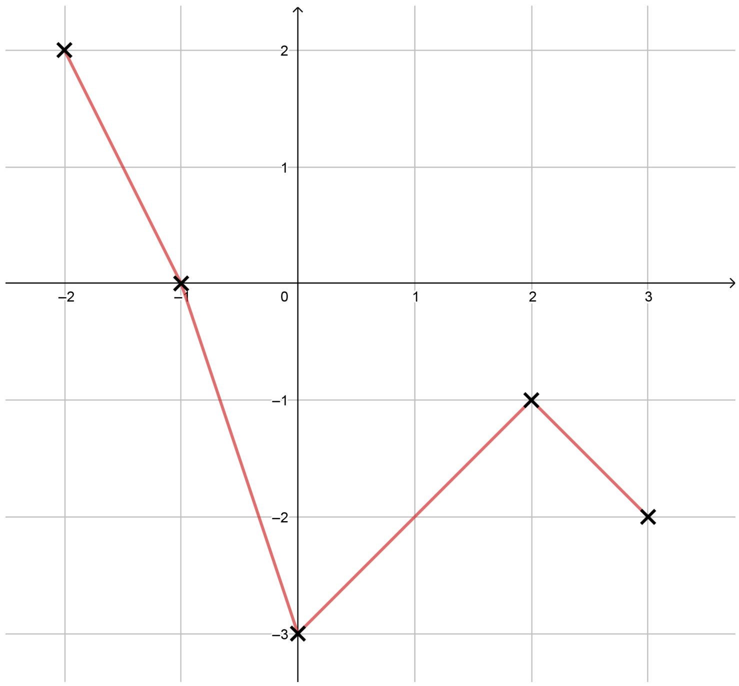


b) On trace la fonction g sur $[0; 6]$, et on voit qu'elle est croissante. On trouve comme valeurs : $g(0) = -3$ et $g(6) = 1,5$. On trouve le tableau suivant :

x	0		6
f			$1,5$
		↗	
	-3		



Exercice 84 p.258



On trace la courbe d'une fonction ayant le bon tableau de variation, et satisfaisant aussi que $f(-1) = 0$. On peut alors faire le tableau de signe de f, en constatant que la fonction est :

- positive entre -2 et -1 ;
- nulle en -1 ;
- négative entre -1 et 3.

Et on trouve le tableau de signe suivant :

x	-2		-1		3
f		$+$	0	$-$	

Parcours B

Pour les élèves qui maîtrisent les tableaux de signes et variations, et qui veulent se renforcer sur les fonctions de référence ou l'utilisation de la calculatrice.

Exercice 63 p.231

1. Soit on se souvient directement du tableau de variations, soit on sait le retrouver en traçant la courbe de la fonction carré à la calculatrice, et on trouve comme tableau :

x			0		
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2. a) La fonction carré est croissante sur $[1,5;6]$, donc $(1,5)^2 < 6^2$.

b) La fonction carré est décroissante sur $[-0,7;-0,082]$, donc $(-0,7)^2 > (-0,082)^2$.

c) On utilise que $3 < \pi < 4$, et donc $0 < \pi - 1 < 4$. De plus, on a $16 = 4^2$. La fonction carré est croissante sur $[\pi - 1; 4]$, donc $(\pi - 1)^2 < 16$.

d) On a : $(-1,25)^2 = (-1 \times 1,25)^2 = 1,25^2$. La fonction carré est croissante sur $[1,25;2,25]$, donc $(-1,25)^2 < 2,25^2$.

Exercice 66 p.231

1. Soit on se souvient directement du tableau de variations, soit on sait le retrouvant en traçant la courbe de la fonction inverse à la calculatrice, et on trouve comme tableau :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g	0	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	0

2. a) La fonction inverse est décroissante sur $[-2,05;-1,95]$, donc $-\dfrac{1}{2,05} > -\dfrac{1}{1,95}$.

b) On utilise que $1 < \sqrt{2} < 2$, et donc : $0 < 5 - \sqrt{2} < 5 + \sqrt{2}$. Et la fonction inverse est décroissante sur $[5 - \sqrt{2}; 5 + \sqrt{2}]$, donc $\dfrac{1}{5+\sqrt{2}} < \dfrac{1}{5-\sqrt{2}}$.

c) Comme $0.5 = \dfrac{1}{2}$, et que la fonction inverse est décroissante sur $[2;3]$, alors $\dfrac{1}{3} < 0,5$.

Exercice 72 p.232

1. Soit on se souvient directement du tableau de variations, soit on sait le retrouvant en traçant la courbe de la fonction racine carrée à la calculatrice, et on trouve comme tableau :

x	0		$+\infty$
h			$+\infty$
		$\nearrow$	
	0		

2. a) La fonction racine carrée est croissante sur $[5; 5,7]$, donc $\sqrt{5} < \sqrt{5,7}$.

b) La fonction racine carrée est croissante sur $[2; 5/2]$, donc $\sqrt{5} < \sqrt{\dfrac{5}{2}}$.

c) On a $7 = \sqrt{49}$. La fonction racine carrée est croissante sur $[49; 50]$, donc $\sqrt{50} > 7$.

d) On a : $\dfrac{10}{3} = 3 + \dfrac{1}{3} > 3 > 2,7$. La fonction racine carrée est croissante sur $[2,7; 10/3]$, donc $\sqrt{\dfrac{10}{3}} > \sqrt{2,7}$.

Exercice 52 p.202

On donne ici une méthode de résolution avec les tableaux de variation. On peut aussi résoudre les inéquations à l'aide de l'allure des courbes.

a) et b) On rappelle le tableau de variations de la fonction carré, que l'on note f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f	$+\infty$				$+\infty$
		$\searrow$		$\nearrow$	
			0		

Et ainsi :

- pour le a) : $f(-3) = f(3) = 9$, et f est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$. Ainsi, on trouve :

$$x^2 \geq 9 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -3] \text{ ou } x \in [3; +\infty[\Leftrightarrow x \in]-\infty; -3] \cup [3; +\infty[$$

  donc l'ensemble solution est : $]-\infty; -3] \cup [3; +\infty[$.
- pour le b) : $f(-\sqrt{5}) = f(\sqrt{5}) = 5$, et f est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$. Ainsi, on trouve :

$$x^2 < 5 \Leftrightarrow x \in]-\sqrt{5}; \sqrt{5}[$$

  donc l'ensemble solution est : $]-\sqrt{5}; \sqrt{5}[$.

c) et d) On rappelle le tableau de variations de la fonction inverse, que l'on note g :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g	0		$\|$	$+\infty$	
		$\searrow$	$\|$		$\searrow$
		$-\infty$	$\|$		0

Et ainsi :

- pour le c) : $g(1/5) = 5$, et g est décroissante sur $]0; +\infty[$. De plus, g ne prend que des valeurs négatives (donc inférieurs à 5) sur $]-\infty; 0[$. Ainsi, on trouve :

$$\frac{1}{x} < 5 \Leftrightarrow x \in]-\infty; 0[\text{ ou } x \in]1/5; +\infty[\Leftrightarrow x \in]-\infty; 0[\cup]1/5; +\infty[$$

  donc l'ensemble solution est : $]-\infty; 0[\cup]1/5; +\infty[$.
- pour le d) : $f(-1/2) = -2$, et g est décroissante sur $]-\infty; 0]$. De plus, g ne prend que des valeurs positives (donc supérieurs ou égales à 2) sur $]0; +\infty[$. Ainsi, on trouve :

$$\frac{1}{x} \geq -2 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -1/2] \text{ ou } x \in]0; +\infty[\Leftrightarrow x \in]-\infty; -1/2]\cup]0; +\infty[$$

  donc l'ensemble solution est : $]-\infty; -1/2]\cup]0; +\infty[$.

e) et f) On rappelle le tableau de variations de la fonction racine carrée, que l'on note h :

x	0		$+\infty$
h			$+\infty$
		$\nearrow$	
	0		

Et ainsi :

- pour le e) : $h(9) = 3$, et h est croissante sur $[0; +\infty[$. Ainsi, on trouve :

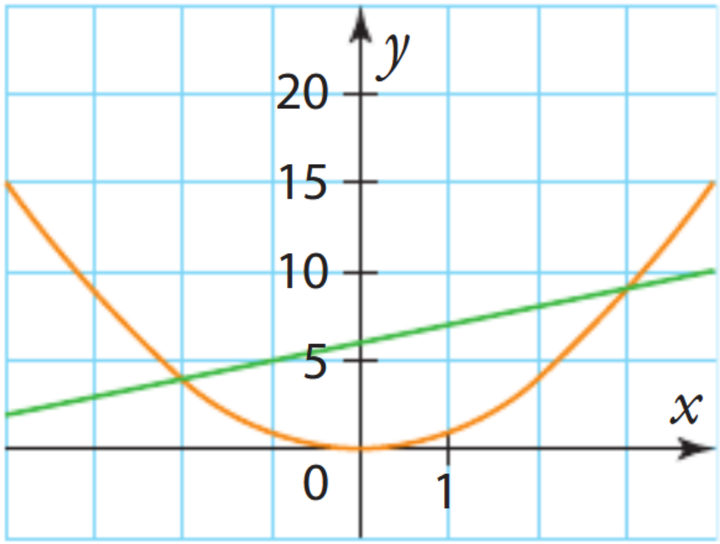
$$\sqrt{x} \leq 3 \Leftrightarrow x \in [0; 9]$$

  donc l'ensemble solution est : $[0; 9]$.
- pour le f) : $h(81) = 9$, et h est croissante sur $[0; +\infty[$. Ainsi, on trouve :

$$\sqrt{x} > 9 \Leftrightarrow x \in]81; +\infty[$$

  donc l'ensemble solution est : $]81; +\infty[$.

Exercice 86 p.205



1. On reconnaît en orange la courbe de la fonction carré : la courbe orange est donce celle de f, et la verte celle de g.

2. Graphiquement, on voit que les courbes verte et orange se coupent en deux points : les points de coordonnées $(-2;4)$ et $(3;9)$. Ce sont les abscisses de ces points qui nous intéressent pour déterminer les solutions de l'équation "$f(x) = g(x)$", à savoir -2 et 3.

Et finalement, l'ensemble solution est : $\{-2;3\}$.

On peut vérifier ce résultat en calculant les images de -2 et 3 par f et g :

– pour -2 : $f(-2) = (-2)^2 = 4$ et $g(-2) = -2+6 = 4$, donc $f(-2) = g(-2)$;

– pour 3 : $f(3) = 3^2 = 9$ et $g(3) = 3+6 = 9$, donc $f(3) = g(3)$.

3. a) Par distributivité, on trouve :

$$(x-3)(x+2) = x^2 - 3x + 2x - 6 = x^2 - x - 6$$

b) On raisonne par équivalences. On a :

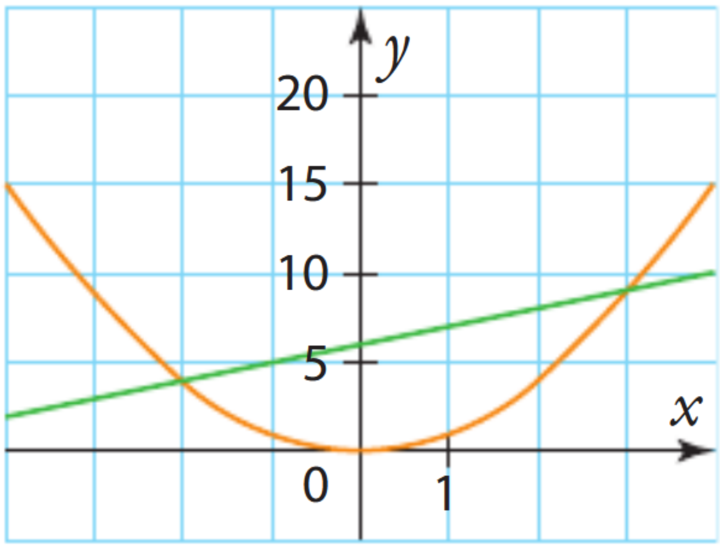
$$\begin{aligned} x^2 = x + 6 &\Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-3)(x+2) = 0 \\ &\Leftrightarrow x - 3 = 0 \text{ ou } x + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 3 \text{ ou } x = -2 \end{aligned}$$

en utilisant la règle du produit nul. Et on retrouve bien que l'ensemble solution de l'équation est $\{-2;3\}$.

Parcours C

Pour les élèves à l'aise avec les tableaux, les courbes et la calculatrice.

Exercice 86 p.205



1. On reconnaît en orange la courbe de la fonction carré : la courbe orange est donce celle de f, et la verte celle de g.

2. Graphiquement, on voit que les courbes verte et orange se coupent en deux points : les points de coordonnées $(-2; 4)$ et $(3; 9)$. Ce sont les abscisses de ces points qui nous intéressent pour déterminer les solutions de l'équation "$f(x) = g(x)$", à savoir -2 et 3.

Et finalement, l'ensemble solution est : $\{-2; 3\}$.

On peut vérifier ce résultat en calculant les images de -2 et 3 par f et g :
- pour -2 : $f(-2) = (-2)^2 = 4$ et $g(-2) = -2 + 6 = 4$, donc $f(-2) = g(-2)$;
- pour 3 : $f(3) = 3^2 = 9$ et $g(3) = 3 + 6 = 9$, donc $f(3) = g(3)$.

3. a) Par distributivité, on trouve :

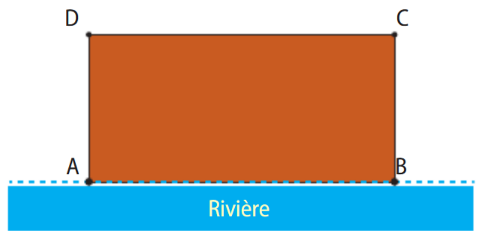
$$(x - 3)(x + 2) = x^2 - 3x + 2x - 6 = x^2 - x - 6$$

b) On raisonne par équivalences. On a :

$$\begin{aligned} x^2 = x + 6 &\Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 3)(x + 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow x - 3 = 0 \text{ ou } x + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 3 \text{ ou } x = -2 \end{aligned}$$

en utilisant la règle du produit nul. Et on retrouve bien que l'ensemble solution de l'équation est $\{-2; 3\}$.

Exercice 88 p.233



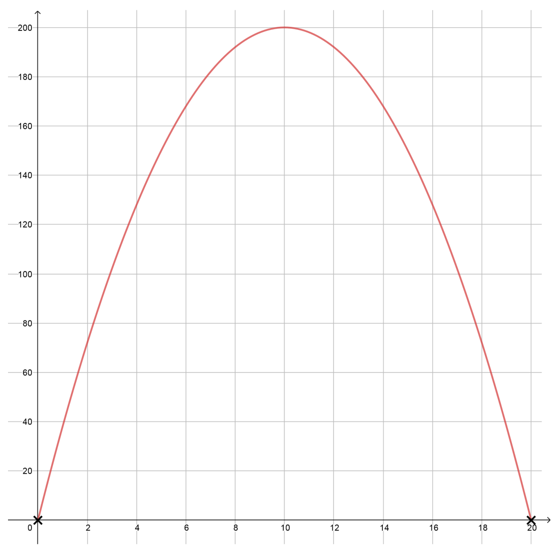
1. Si $x = 5$, alors $AD = BC = 5$. Et donc $DC = 40 - 5 - 5 = 30$. Et donc l'aire du rectangle est $5 \times 30 = 150$.

2. Comme $AD = x = BC$, et que l'on a $40m$ de clôture, alors on déduit que : $0 \leq 2x \leq 40$, c'est-à-dire que $x \in [; 20]$.

3.Comme $AD = x$, et que $ABCD$ est un rectangle, alors $BC = x$. Et donc $DC = 40 - 2x$. Et finalement :

$$f(x) = x \times (40 - 2x).$$

4. On trace la courbe de f pour x allant de 0 à 20. On trouve :



Et donc l'aire maximale qu'Aya pourrait obtenir semble être de $200m^2$ (atteinte pour $x = 10$).

5. a) On développe l'expression proposée. On a :

$$-2(x-10)^2+200 = -2\times(x^2-20x+100)+200 = -2x^2+40x-200+200 = x\times(40-2x) = f(x).$$

b) On utilise qu'un carré est positif ou nul, et on donc $(x - 10)^2 \geq 0$. On a alors :

$$\begin{aligned} (x-10)^2 \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad -2(x-10)^2 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad -2(x-10)^2 + 200 \leq 200 \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité nous dit que $f(x)$ vaut au plus 200. Comme $f(10) = 200$, alors le maximum de f est bien de 200.