DM facultatif

Exercice 1. Les critères de divisibilité

On souhaite démontrer les critères de divisibilité usuels. Pour cela, on se donne n un entier.

1. On note a le chiffre des unités de n.
   (a) Montrer que l'entier $n - a$ est un multiple de 10.
   (b) En déduire que $n - a$ est un multiple de 2 et de 5.
   (c) En déduire que n est un multiple de 2 (resp. de 5, 10) si, et seulement si, a est un multiple de 2 (resp. de 5, 10).
   (d) En déduire les critères de divisibilité par 2 et par 5.
   (e) Montrer de même les critères par 4 et par 25, en notant b le chiffre des dizaines de n et en montrant que $n - \overline{ba}$ est un multiple de 4 et de 25.
2. On écrit n sous la forme $\overline{a_m \dots a_1 a_0}$, suivant son écriture décimale.
   (a) Montrer que $n = a_0 + a_1 \times 10 + a_2 \times 100 + \cdots + a_m \times 10^m$.
   (b) Montrer que, pour tout entier k compris entre 0 et m, l'entier : $a_k \times 10^k - a_k$ est un multiple de 9.
   (c) En déduire que $n - (a_0 + a_1 + \cdots + a_m)$ est un multiple de 9 et de 3.
   (d) En déduire les critères de divisibilité par 3 et par 9.

Exercice 2. L'écriture décimale illimité périodique des nombres rationnels

On souhaite montrer qu'un nombre dont l'écriture décimale est illimitée périodique est rationnel, et pour cela l'exprimer sous forme d'une fraction d'entiers. Pour cela, on considère le nombre $x = 0,146146146\dots$ (on répète les chiffres "146" à l'infini).

1. Calculer $1000 \times x$.
2. En déduire que $1000x - x$ est un entier.
3. En déduire que x est rationnel.
4. Appliquer la même méthode au nombre $y = 0,142857142857\dots$. Que vaut y ?
5. Appliquer la même méthode au nombre $z = 0,99999\dots$. Que vaut z ? Retrouver ce résultat en utilisant que $\frac{1}{9} = 0,11111\dots$.