DM 2 (à rendre pour le 16/10)

Attention :
Les exercices 1 et 2 sont **obligatoires**, et ont pour but de montrer que $\sqrt{3}$ est irrationnel.

Exercice 1. Un raisonnement par disjonction de cas

On se donne un entier n, et on veut montrer le résultat suivant par disjonction de cas : si n^2 est un multiple de 3, alors n est un multiple de 3.

1. Énoncer la contraposée de l'implication précédente.
2. Montrer que n s'écrit de l'une des formes suivantes : $3 \times k$, $3 \times k + 1$ ou $3 \times k + 2$, où k est un entier. En particulier, on précisera quelles sont les formes possibles si n n'est pas un multiple de 3.
3. Montrer que, si $n = 3 \times k + 1$, alors n^2 n'est pas un multiple de 3.
4. Montrer de même que, si $n = 3 \times k + 2$, alors n^2 n'est pas un multiple de 3.
5. En déduire que, si n n'est pas un multiple de 3, alors n^2 n'est pas un multiple de 3.
6. Conclure.

Exercice 2. Un raisonnement par l'absurde

On suppose par l'absurde que $\sqrt{3}$ est rationnel. On pose donc $\sqrt{3} = \dfrac{p}{q}$, où p et q sont deux entiers, et la fraction $\frac{p}{q}$ est irréductible.

1. Montrer que p et q vérifient : $p^2 = 3 \times q^2$.
2. En déduire que p^2 est un multiple de 3.
3. Déduire de l'exercice précédent que p est un multiple de 3.
4. En déduire que q^2 est un multiple de 3.
5. Déduire de l'exercice précédent que q est un multiple de 3.
6. Conclure.

Exercice 3. Facultatif : Le théorème de l'angle inscrit

On veut montrer le théorème suivant :

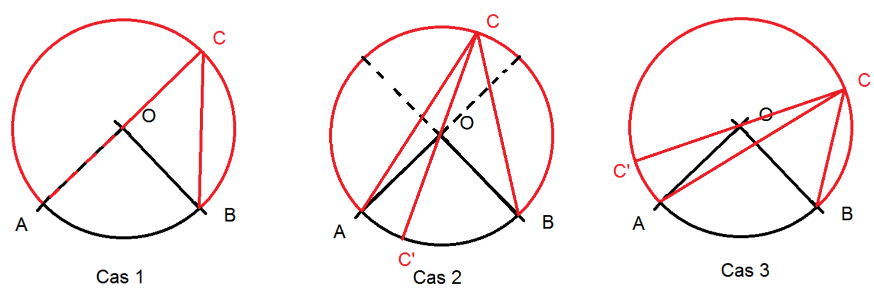
Théorème : Soient deux points A, B sur un cercle de centre O. Soit un point C placé sur l'arc $\overset{\frown}{AB}$, du même côté que O par rapport à la droite (AB). Alors :

$$\widehat{AOB} = 2 \times \widehat{ACB}.$$

Pour cela, on procède par disjonction de cas, en traitant les trois cas suivants :

– Cas 1 : le point O est sur l'un des côtés du triangle ABC ;
– Cas 2 : le point O est à l'intérieur du triangle ABC ;
– Cas 3 : le point O est à l'extérieur du triangle ABC.

On donne ci-dessous un dessin des différents cas, dans lesquels le point C' est le symétrique de C par rapport au point O.



1. En utilisant que les triangles AOB et BOC sont isocèles en O, montrer que le théorème est vrai dans le cas 1 (on pourra utiliser que la somme des angles dans un triangle fait 180°, et que les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOC}$ sont supplémentaires).
2. En appliquant le résultat précédent aux points A, C', C et B, C', C, montrer que le théorème est vrai dans le cas 1.
3. Procéder de même pour le cas 3, en appliquant le théorème aux points A, C', C et B, C', C.
4. (difficile) Que devient le théorème si l'on suppose que le point C est sur l'autre arc de cercle $\overset{\frown}{AB}$ (de l'autre côté de O par rapport à la droite (AB)).