DM 1 : corrigé

Exercice 1. Obligatoire : Recherche d'un entier

1. Le nombre n est entre 3700 et 3799. C'est donc un nombre à quatre chiffres, dont le chiffre des milliers est 3 et celui des centaines est 7. Si l'on note a et b respectivement son chiffre des dizaines et son chiffre des unités, alors : $n = \overline{37ab}$.
2. Par les critères de divisibilités, les propriétés (i) et (ii) se traduisent par :
$$\begin{array}{rcl} (i) & : & 3+7+a+b \text{ est un multiple de } 9 \\ (ii) & : & b = 0 \text{ ou } 5 \end{array}.$$
3. Les propriétés (iii) et (iv) se traduisent par :
$$\begin{array}{rcl} (iii) & : & a \leq b \\ (iv) & : & a \text{ est pair} \end{array}.$$
4. On étudie les cas suivant la valeur de b :
   - si $b = 0$: alors $a = 0$ (par la propriété (iv)). Mais alors la propriété (i) n'est pas vérifiée car $3+7+a+b = 10$, qui n'est pas un multiple de 9 ;
   - si $b = 5$: alors $a = 0$, 2 ou 4 (par les propriétés (iii) et (iv)). Mais alors la propriété (i) n'est pas vérifiée car $3+7+a+b = 15$, 17 ou 19 (selon les valeurs de a), et aucun de ces nombres n'est un multiple de 9.

   Donc il n'y a pas de solution.
5. En changeant la condition (i) comme dans l'énoncé, on souhaite que $3+7+a+b$ soit un multiple de 3. On reprend alors les calculs précédents :
   - si $b = 0$: alors $a = 0$ (par la propriété (iv)). Mais alors la propriété (i) n'est pas vérifiée car $3+7+a+b = 10$, qui n'est pas un multiple de 3 ;
   - si $b = 5$: alors $a = 0$, 2 ou 4 (par les propriétés (iii) et (iv)). Si $a = 0$, on trouve $3+7+a+b = 15$, qui est un multiple de 3, et toutes les conditions sont vérifiées. Mais sinon on trouve $3+7+a+b = 17$ ou 19 (selon les valeurs de a), et aucun de ces nombres n'est un multiple de 3, donc la condition (i) ne peut être vérifiée.

   Finalement, la seule solution est : 3705.

   Remarque : Il est clair que 3705 vérifie les propriétés (iii) et (iv). Et il vérifie aussi les propriétés (i) et (ii) car : $3705 = 1235 \times 3 = 741 \times 5$.

Exercice 2. Facultatif : L'infinité des nombres premiers

1. Le nombre $p_1 \times \cdots \times p_n$ est le produit de tous les nombres premiers, qui sont des entiers positifs, donc il est plus grand que chacun de ses facteurs. Donc $p_1 \times \cdots \times p_n$ est plus supérieur ou égal à chacun des nombres premiers $p_1, \ldots, p_n$.

   Comme $N = p_1 \times \cdots \times p_n + 1$, alors N est strictement plus grand que $p_1 \times \cdots \times p_n$, donc strictement plus grand que chacun des nombres premiers $p_1, \ldots, p_n$.
2. Comme N est strictement plus grand que tous les nombres premiers, il est différent de tous les nombres premiers : il n'est pas premier. Par propriété du cours, son plus petit diviseur distinct de 1 est un nombre premier, que l'on note p.
3. Fixons i un entier entre 1 et n, et regardons la division euclidienne de N par le nombre p_i. On a, par définition de N :

   $$N = p_i \times \underbrace{p_1 \times \cdots \times p_n}_{\text{tous les nombres premiers à part } p_i} + 1$$

   donc le reste de la division euclidienne de N par p_i est 1. Donc N n'est divisible par aucun des nombres premiers $p_1, \ldots, p_n$.
4. Comme N est divisible par p, et par aucun des nombres premiers $p_1, \ldots, p_n$, alors p est un nombre premier distinct de $p_1, \ldots, p_n$.
5. Ainsi, on a trouvé un nombre premier (à savoir p) qui n'est pas dans l'ensemble $\{p_1, \ldots, p_n\}$. D'où la contradiction avec le fait que l'ensemble des nombres premiers est fini : cet ensemble est donc infini.