

## DM 1 (à rendre pour le 18/09)

### Exercice 1. Obligatoire : Recherche d'un entier

On cherche un entier  $n$  compris entre 3700 et 3799 qui vérifie les propriétés suivantes :

- (i)  $n$  est un multiple de 9 ;
- (ii)  $n$  est divisible par 5 ;
- (iii) le chiffre des dizaines est plus petit ou égal à celui des unités ;
- (iv) le chiffre des dizaines est pair.

1. Justifier que le nombre  $n$  peut s'écrire sous la forme  $\overline{37ab}$ .
2. À l'aide des critères usuels de divisibilité, traduire les propriétés (i) et (ii) en condition sur  $a$  et  $b$ .
3. Traduire les propriétés (iii) et (iv) en conditions sur  $a$  et  $b$ .
4. En déduire l'ensemble des entiers  $n$  cherchés.
5. On remplace la propriété (i) par :  $n$  est un multiple de 3. Que devient l'ensemble cherché ?

### Exercice 2. Facultatif : L'infinité des nombres premiers

On veut montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers. Pour cela, on suppose par l'absurde qu'il en existe seulement  $n$ , et on les note :  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . On note  $N = p_1 \times \dots \times p_n + 1$ .

1. Montrer que  $N$  est strictement plus grand que chacun des nombres premiers  $p_1, \dots, p_n$ . En déduire que  $N$  n'est pas premier.
2. En déduire que  $N$  possède un diviseur premier, que l'on note  $p$ .
3. Montrer que  $N$  n'est divisible par aucun des nombres premiers  $p_1, \dots, p_n$  (on pourra écrire la division euclidienne de  $N$  par chacun de ces nombres).
4. Montrer que  $p$  n'est pas l'un des nombres premiers  $p_1, \dots, p_n$ .
5. Conclure.